

TADEUSZ CHMIELNIAK

Katedra Ciepłych Maszyn Wirnikowych

ROZKŁAD TEMPERATUR W POBLIŻU ŚCIANKI PŁASKIEJ
PRZY NAGŁYM WPROWADZENIU JEJ W RUCH

Streszczenie. W pracy rozpatrzono zagadnienie nieściśliwego napływu ze stałą prędkością na powierzchnię płaską. Problem sprowadzono do rozwiązania uproszczonych równań Naviera-Stokesa i równania energii. W wyniku ich rozwiązania otrzymano podobne rozkłady temperatur względem czasu t , dla ciepła tarcia równego zeru i przy jego uwzględnieniu. Dla obliczonego pola temperatur podano wyrażenia dla strumieni ciepła.

1. Wstęp

Rozpatrując równania Naviera-Stokesa zauważamy możliwość ich uproszczenia dla wszystkich wypadków bardzo małych wartości konwekcyjnych członów przyspieszenia. W procesach (tzw. procesach napływu) opisywanych tego rodzaju uproszczonymi równaniami równowagę przepływu określa przyspieszenie lokalne oraz siły tarcia. Dla nieściśliwego przepływu płaskiego (rys. 1) przy stałej wartości lepkości kinematycznej (ν) oraz założeniu stałego ciśnienia uproszczenie to prowadzi do równania dyfuzji o postaci [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

gdzie:

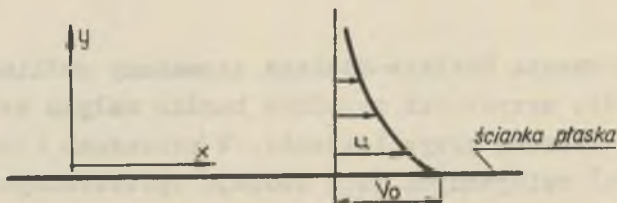
t - współrzędna czasowa, pozostałe oznaczenia na rys. 1.

Znając pole prędkości otrzymane z rozwiązania odpowiedniego zagadnienia brzegowego opartego o równanie (1) można formułując nowe zagadnienie brzegowe polegające na rozwiązaniu równania (1) i uproszczonego równania energii z odpowiednimi warunkami granicznymi określić rozkład temperatur oraz warunki wymiany ciepła we wszystkich procesach płaskich, dla których słusznymi są nierówności:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \gg u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \gg u \frac{\partial T}{\partial x},$$

gdzie:

T - temperatura bezwzględna.



Rys. 1. Przepływ płaski

Uproszczenie równania energii oparte jest na założeniu istnienia równowagi między lokalną zmianą temperatury oraz jej zmianami wskutek przewodzenia ciepła i powstawania ciepła tarcia. Postać równania energii przy dodatkowym założeniu o niezmienności ciepła właściwego c_p i współczynnika przewodzenia ciepła λ przedstawia równanie (2).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (2)$$

gdzie:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad \mu = \nu \rho.$$

Wnikliwe przedstawienie problemu rozkładu temperatur w pobliżu płaszczyzny dla przypadku stacjonarnego można znaleźć w pracach [1],[2].

2. Zagadnienie brzegowe

Rozważmy problem: jak kształtować się będzie rozkład prędkości i temperatur w pobliżu nagle wprowadzonej w ruch z prędkością stałą V_0 płaszczyzny umiejscowionej w określonym czynniku. Współczynniki ν, λ oraz wartości C_p i ζ uważać będziemy za przyjęte wartości stałe. Tak sformułowany problem równoważny jest zagadnieniu brzegowemu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (2)$$

$$t \leq 0 \quad u = 0, \quad T = T_0 \quad \text{dla } 0 < y < \infty \quad (3)$$

$$t > 0 \quad u = V_0, \quad T = T_w \quad \text{dla } y = 0$$

$$u = 0, \quad T = T_0 \quad \text{dla } y = \infty. \quad (4)$$

Rozwiązanie równania (1) z odpowiadającymi mu warunkami granicznymi przedstawia formuła (5) [1].

$$\frac{u}{V_0} = 1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta, \quad (5)$$

gdzie:

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$$

oznacza nową bezwymiarową współrzędną.

3. Rozkład temperatur

Po wprowadzeniu do równań (1), (2), (3), (4) nowej zmiennej η , liczby Prandtla Pr oraz wykorzystaniu zależności (5) otrzymujemy nowe zagadnienie brzegowe dla określenia rozkładu temperatur:

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + 2Pr \eta \frac{dT}{d\eta} = - \frac{4}{\pi} Pr \frac{v_0^2}{C_p} \exp(-2\eta^2) \quad (6)$$

$$T = T_0 \quad \text{dla} \quad \eta = \infty \quad (7)$$

$$T = T_w \quad \text{dla} \quad \eta = 0. \quad (8)$$

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (6), (7), (8) przedstawimy w postaci upraszczającej dyskusję rezultatów jego rozwiązania:

$$T - T_0 = [(T_w - T_0) - (T_a - T_0)] K_1(\eta, Pr) + K_2(\eta, Pr) \frac{4 v_0^2}{C_p \pi}, \quad (9)$$

gdzie:

$K_1(\eta, Pr)$ - jest ogólnym rozwiązaniem warunku brzegowego:

$$\frac{d^2 K_1}{d\eta^2} + 2 Pr \eta \frac{dK_1}{d\eta} = 0 \quad (10)$$

$$K_1 = 1 \quad \text{dla} \quad \eta = 0$$

$$K_1 = 0 \quad \text{dla} \quad \eta = \infty \quad (11)$$

$K_2(\eta, Pr)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania:

$$\frac{d^2 K_2}{d\eta^2} + 2 Pr \eta \frac{dK_2}{d\eta} = - Pr \exp(-2\eta^2) \quad (12)$$

dla warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} \frac{dK_2}{d\eta} &= 0 & \text{dla } \eta &= 0 \\ K_2 &= 0 & \text{dla } \eta &= \infty . \end{aligned} \quad (13)$$

W równaniu (9) różnica $T_a - T_o$ wyraża się przez $K_2(0, Pr)$, [patrz (18)].

Mówiąc inaczej równanie (10) wraz z podanymi warunkami granicznymi określa problem chłodzenia bez uwzględnienia ciepła tarcia przy zachowaniu $\Delta T = T_w - T_o$, natomiast równanie (12) określa rozkład temperatur dla nieprzewodzącej płaszczyzny przy uwzględnieniu źródła ciepła powstałego wskutek tarcia.

a) rozwiązanie zagadnienia brzegowego (10), (11).

Rozwiązaniem równania (10) dla warunków (11) jest formuła:

$$K_1(\eta, Pr) = 1 - \frac{\int_0^{\eta} \exp(-Pr\xi^2) d\xi}{\int_0^{\infty} \exp(-Pr\xi^2) d\xi}$$

lub uwzględniając równość:

$$\int_0^{\infty} \exp(-Pr\xi^2) d\xi = 1/2 \sqrt{\frac{\pi}{Pr}}$$

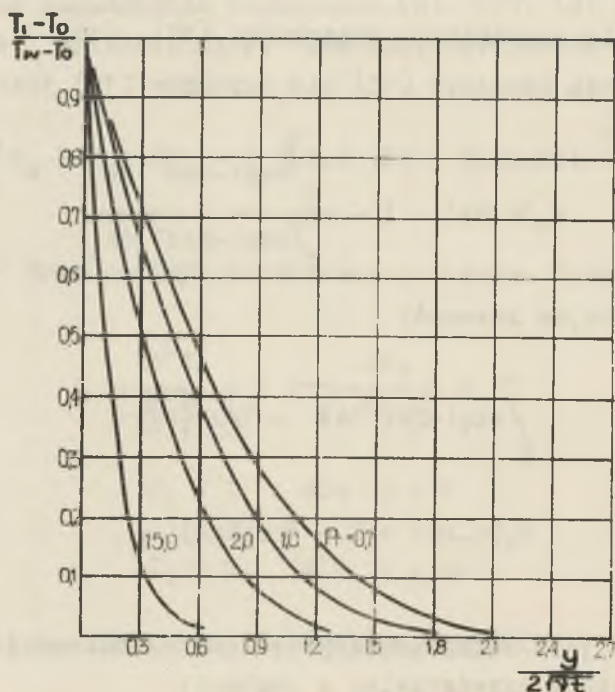
$$K_1(\eta, Pr) = 1 - \Phi(\sqrt{Pr}\eta), \quad (14)$$

gdzie:

$\Phi(\sqrt{Pr}\eta)$ jest całką prawdopodobieństwa zmiennej $\sqrt{Pr}\eta$. Pole temperatury przedstawimy w postaci:

$$\frac{T_1 - T_o}{T_w - T_o} = K_1(Pr, \eta). \quad (15)$$

Otrzymane rozwiązania dla różnych liczb Pr są podobne względem zmiennej t . Oznacza to, że dla każdej wartości tej zmiennej można otrzymać rozwiązanie warunku brzegowego (10), (11) przez odpowiednie przyjęcie skali dla zmiennej y . Rys. 2 ilustruje rezultaty obliczeń dla kilku wartości kryterium Prandtla. Zaznaczmy, że dla $Pr = 1$ pole temperatur jest identyczne z rozkładem prędkości $\frac{u}{V}$ określonym równaniem (1) z odpowiednimi warunkami granicznymi. Z rysunku 2 wynika, że proces wyrównywania temperatur zachodzi głównie w pewnej warstwie przyściennej, której grubość y_g jest proporcjonalna do \sqrt{vt} . Np. dla $Pr = 2$ $\eta_g \cong 1,3 = \frac{y_g}{2\sqrt{vt}}$, czyli $y_g \cong 2,6 \sqrt{vt}$.



Rys. 2. Zależność $\frac{T_1 - T_0}{T_w - T_0} = f\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right)$ dla różnych wartości Pr

b) rozwiązanie warunku brzegowego (12), (13).

Rozwiązanie równania (12) z warunkami granicznymi (13) otrzymane metodą uzmiennienia stałej wyraża się przez:

$$K_2(\eta, Pr) = Pr \int_{\eta}^{\infty} \exp(-Pr \xi^2) \left[\int_0^{\xi} \exp((- \tau^2(2-Pr))) d\tau \right] d\xi. \quad (16)$$

Po rozwinięciu w szereg wyrażenia $\exp[-\tau^2(2-Pr)]$ oraz po wykonaniu całkowania rozwiniętej funkcji, $K_2(\eta, Pr)$ wyrażać się będzie przez:

$$K_2(\eta, Pr) = Pr \int_{\eta}^{\infty} \exp(-Pr \xi^2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2-Pr)^k}{k! (2k+1)} \xi^{2k+1} d\xi. \quad (16a)$$

Ostateczne rozwiązanie dla $K_2(\eta, Pr)$ otrzymujemy całkując przez części prawą część wyrażenia (16a)

$$K_2(\eta, Pr) = \frac{1}{2} \exp(-Pr \eta^2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2-Pr)^k}{k! (2k+1)} \eta^{2k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^K \frac{(-1)^k (2-Pr)^k}{k! (2k+1)} \frac{k(k-1) \dots (k-\alpha+1)}{(Pr)^\alpha} \eta^{2k-2\alpha} \right]. \quad (16b)$$

Wyrażenie (16b) stanowiące ostateczne rozwiązanie warunku brzegowego (12), (13) jest szybko zbieżny dla $Pr \geq 1$. Natomiast dla wartości kryterium $Pr < 1$ rozwiązanie nie istnieje.

Wartość $K_2(0, Pr)$, która charakteryzuje tzw. temperaturę wlewną ścianki otrzymuje się z równania (16b) przyjmując w drugiej części tego równania $\alpha = k$. Uzyskany szereg jest zbieżnym dla wszystkich $Pr \geq 1$.

$$K_2(0, Pr) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2-Pr)^k}{(2k+1) (Pr)^k}. \quad (17)$$

Dla dużych wartości kryterium Prandtla $Pr > 500$ szereg (17) można z dużą dokładnością (błąd nie będzie przekraczał 1%) zastąpić nieskończonym szeregiem:

$$K_2(0, Pr) \cong \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \quad (17a)$$

Określona w równaniu (9) temperatura własna ścianki T_a wyrażać się będzie teraz przez:

$$T_a - T_o = \frac{2 V_o^2}{\pi c_p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2-Pr)^k}{(2k+1) Pr^k} = \frac{2 V_o^2}{\pi c_p} b(Pr) = r \frac{V_o^2}{2 c_p}, \quad (18)$$

gdzie:

$$r = \frac{4b}{\pi} = \frac{T_a - T_o}{\frac{V_o^2}{2 c_p}} \quad \text{oznacza często spotykany w literaturze tzw}$$

recovery factor".

Wartości "r" dla średnich wartości kryterium Prandtla porównywalne są z wartościami otrzymanymi dla wypadku stacjonarnego opływu płaszczyzny [1].

Wartości $b(Pr)$ z równania (18) dla kilku wartości Pr podano w tabelcy 1.

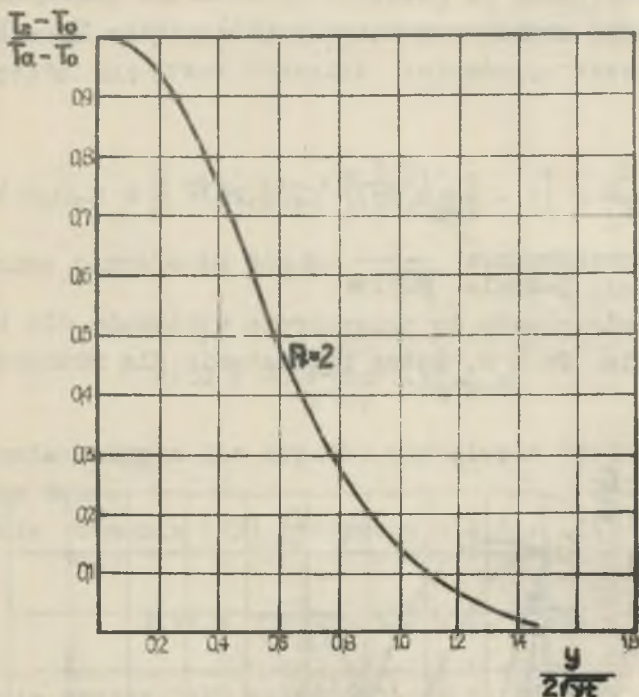
Tabelca 1

Pr	1	2	7	15	50
b	0,772	1	1,461	1,732	2,275

Zgodnie z (12), (13) funkcja $K_2(\eta, Pr)$ określa rozkład temperatur $T_2(\eta)$ dla przypadku nie przewodzącej płaszczyzny z uwzględnieniem ciepła tarcia. Mamy więc:

$$\frac{T_2(\eta) - T_o}{T_a - T_o} = \frac{K_2(\eta, Pr)}{K_2(0, Pr)} \quad (19)$$

Zależność (19) dla $Pr = 2$ przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Zależność $\frac{T_s - T_0}{T_a - T_0} = f\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right)$ dla $Pr = 2$

Ogólne rozwiązanie warunku brzegowego (1), (2), (3), (4) dla $Pr \geq 1$ zgodnie z (9), (14), (16b) wyraża się przez:

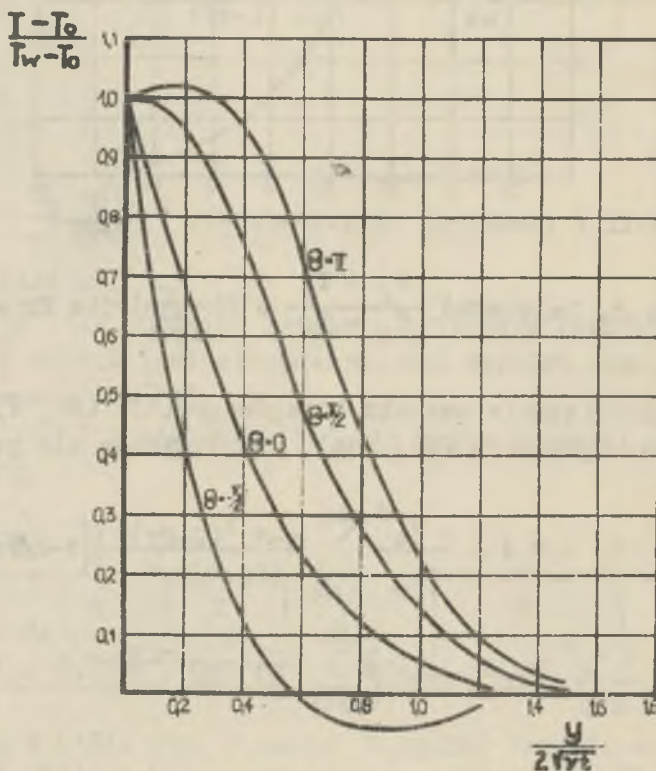
$$\begin{aligned}
 T - T_0 = & \left[(T_w - T_0) - \frac{2 v_0^2}{\alpha_c p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2-Pr)^k}{(2k+1) Pr^k} \right] \left[1 - 4(\sqrt{Pr} \eta) \right] + \\
 & + \frac{2 v_0^2}{\alpha_{cp}} \exp(-Pr \eta^2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2-Pr)^k}{k! (2k+1)} \eta^{2k} + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^k \frac{(-1)^k (2-Pr)^k}{k! (2k+1)} \frac{k(k-1) \dots (k-\alpha+1)}{Pr^\alpha} \eta^{2k-2} \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Bezwymiarowe pole temperatur dla warunku brzegowego (1), (2), (3), (4) otrzymane po podzieleniu równania (9) (powracamy do wygodniejszego zapisu rozwiązania (20) przez $T_w - T_0$ będzie określone przez wyrażenie:

$$\frac{T - T_0}{T_w - T_0} = \left[1 - \frac{2}{\pi} \theta b(\text{Pr}) \right] K_1(\eta, \text{Pr}) + \frac{4}{\pi} \theta K_2(\eta \text{Pr}) \quad (21)$$

będące funkcją jedynie Pr i θ .

Szczególnie proste do osiągnięcia wyrażenie dla (21) otrzymać można dla $\text{Pr} = 2$, które przedstawia dla różnych wartości θ rys. 4.



Rys. 4. Zależność $\frac{T - T_0}{T_w - T_0} = f\left(\frac{y}{2\sqrt{vt}}\right)$ dla różnych wartości θ , $\text{Pr} = 2$

4. Wymiana ciepła

Strumień ciepła od płaszczyzny do otaczającego czynnika w oza-
sie t wyraża się przez formułę:

$$q(t) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} . \quad (22)$$

Uwzględniając określenie dla $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ otrzymujemy:

$$q(t) = -\lambda \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \left(\frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0} \quad (22a)$$

a) strumień ciepła dla wypadku gdy ciepło tarcia przyjęto
równe zero.

Na podstawie równania (15) otrzymuje się dla $q(t)$ ostatecznie:

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}} \sqrt{\text{Pr}} \lambda (T_w - T_o) . \quad (23)$$

Podkreślenia wymaga fakt zależności $q(t)$ od $\sqrt{\text{Pr}}$.

b) strumień ciepła w wypadku uwzględnienia ciepła tarcia.
Wychodząc z (22a) oraz z określonej z równania (9) wartości:

$$\left(\frac{dT}{d\eta} \right)_{\eta=0} = -2 \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\pi}} (T_w - T_a)$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \nu t}} \sqrt{\text{Pr}} \lambda (T_w - T_a) . \quad (24)$$

Wpływ ciepła tarcia na wymianę ciepła wyraźnie uwidoczniiony
jest na rys. 4, przedstawiającym pole temperatur [zgodnie z (20)]
dla ścianki nagrzanej ($\Theta > 0$) oraz dla ścianki nagrzewanej ($\Theta < 0$).
Dla ($\Theta > -\frac{\pi}{2}$) temperatura warstwy granicznej na skutek powsta-
jącego ciepła tarcia jest wyższa niż temperatura ścianki T_w .

Fakt ten uniemożliwia chłodzenie ścianki. Nierówność $\Theta < \frac{\pi}{2}$ ($Pr=2$) sprowadzająca się do:

$$(T_w - T_c) > \frac{2 v_0^2}{\pi c_p} = \frac{4}{\pi} \frac{T_a - T_0}{r}$$

określa warunki przy których może zaistnieć efektywne chłodzenie nagrzanej ścianki dla procesu laminarnego napływu czynnika na nieruchomą płaszczyznę.

5. Uwagi końcowe

Stosowność otrzymanego rozwiązania (20) określają warunki:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \gg u \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{craz} \quad \frac{\partial T}{\partial t} \gg u \frac{\partial T}{\partial x},$$

które muszą zaistnieć by zagadnienie brzegowe (1), (2), (3), (4) miało fizyczny sens. Drugi z tych warunków można zastąpić przybliżonym kryterium $u \frac{\partial T}{\partial x} \ll \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, określonym dla stacjonarnego opływu płaszczyzny cieczą nieściśliwą. Warunek ten sprowadza się do:

$$\begin{aligned} (T_w - T_0) v_0 f' a(Pr) \left[\frac{f''(\xi)}{f''(0)} \right]^{Pr} - \frac{v_0^3 f'}{2 c_p} C(Pr) a(Pr) \left[\frac{f''(\xi)}{f''(0)} \right]^{Pr} \ll \\ - Pr \frac{v_0^2}{c_p} f''^2, \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie:

$f' = \frac{u}{v_0}$ określa rozkład prędkości dla opływu stacjonarnego,

$$\xi = y \sqrt{\frac{v_0}{\nu x}},$$

$$a(Pr) = (0,332)^{Pr} \int_0^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} d\xi,$$

$$C(Pr) = 2 Pr \int_0^{\infty} [f''(\xi)]^{Pr} \left(\int_0^{\xi} [f''(\tau)]^{2-Pr} d\tau \right) d\xi.$$

Korzystając z rozwiązań Eckerta-Drewitza [1] oraz Howartha [1] można drogą bezpośrednich obliczeń określić warunki dla których spełniona jest nierówność (25).

Dla $Pr < 1$ nierówność (25) jest mocno sprzeczna. Tym tłumaczyć można brak rozwiązania naszego zagadnienia brzegowego dla tych wartości Pr .

LITERATURA

- [1] SCHLICHTING H.: Grenzschicht - Theorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958.
- [2] WALZ A.: Strömungs - und Temperaturgrenzschichten. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1966.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР ПОВЛИЗОСТИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ ВНЕЗАПНО ПРИВЕДЕННОЙ В ДВИЖЕНИЕ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено задачу о развитии во времени температурного пограничного слоя около стенки внезапно приведенной в движение. Проблему сведено к решению уравнений Навье-Стокса и уравнения энергии. В результате вычислени получено подобные решения для различных моментов времени t . Приведено также выражения для потоков тепла.

**THE TEMPERATURE DISTRIBUTION NEAR THE PLANE WHILE SUDDEN
SETTING IT IN MOTION**

S u m m a r y

In that publication the question of incompressible inflow on the plane has been discussed. The problem has been solved by using the simplified Navier - Stokes equations and simplified energy equation. The temperature distributions in a relative to time "t" as well as for the heat friction being equal 0 and different from 0 are similar. The expressions for heat stream of the calculated temperature distribution has finally been given.