ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968

Seria: ENERGETYKA z. 29 Nr kol. 223

STANISŁAW JERZY GDULA
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

WSPÓŁCZYNNIK PRZEKAZYWANIA CIEPŁA W REGENERATORZE PRZY STAŁYM WSPÓŁCZYNNIKU WNIKANIA CIEPŁA

Streszczenie. Na drodze analitycznej uzyskano zależność stosunku różnicy średnich temperatur wypełnienia i temperatur gazów w regeneratorze od liczb Fouriera i liczby Biota. Zależność ta była uprzednio uzyskana inną metodą w pracy [1].

1. Wstęp

Przy niewielkiej zmienności w czasie temperatur gazów (grzejącego i grzanego) w danym miejscu regeneratora oraz przy pominięciu wzdłużnego przewodzenia ciepła w wypełnieniu, obliczenia cieplne regeneratora można sprowadzić do obliczeń rekuperatora. Zamiast strumienia ciepła $\dot{Q}$ operuje się przy tym ilością ciepła wymienianego w czasie jednego periodu Q, a miejsce współczynnika przenikania ciepła zajmuje tzw. współczynnik przekazywania ciepła. Współczynnik ten wyraża się wzorem

$$k = \varkappa c \varrho \delta_e \tag{1}$$

gdzie: $\delta_e = V_{el}/A_{el}$ oznacza połowę zastępczej grubości elementu wypełnienia, c i ϱ jego ciepło właściwe i gęstość. Wielkość $\varkappa$ jest bezwymiarowym stosunkiem różnicy średnich temperatur wypełnienia w momencie rewersji do różnicy średnich w danym miejscu temperatur gazów. Wyznaczamy go rozpatrując przewodzenie ciepła w elemencie wypełnienia poddanym periodyczno-skokowym zmianom temperatury środowiska. Zagadnienie to rozwiązano analitycznie w pracy [1] przy założeniu niezależności właściwości materiału wypełnienia od temperatury oraz stałości współczynnika wnikania ciepła. Podane rozwiązanie może być stosowane dla różnych kształtów wypełnienia, byle wymiary elementu były dostatecznie małe w stosunku do długości drogi przepływu gazów.

Rozwiązanie numeryczne dla przypadku płyty, z uwzględnieniem różnych wartości współczynnika wnikania ciepła dla obu faz działania regeneratora, podał Guzik [2].

W pracy niniejszej podano inne rozwiązanie analityczne wspomnianego zagadnienia, dla stałego współczynnika wnikania ciepła.

2. Równanie przewodzenia ciepła i warunki brzegowe

Nieustalone przewodzenie ciepła w elemencie wypełnienia będzie przedstawione nie za pomocą jednej funkcji periodycznej, ale oddzielnie dla fazy grzania i fazy ochładzania. Oba te procesy opisuje to samo równanie różniczkowe

$$\frac{\partial \vartheta_{1,2}}{\partial \tau} = a \nabla^2 \vartheta_{1,2} \tag{2}$$

wraz z przestrzennym warunkiem brzegowym

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta_{1,2}}{\partial n} = \alpha(\vartheta_{1,2} - t_{1,2}) \tag{3}$$

spełnionym na powierzchni elementu wypełnienia $(\bar{r} \in S)$.

W zależności od wyboru alternatywnego wskaźnika 1 lub 2 uzyskujemy równanie różniczkowe dla funkcji $\vartheta_1(\bar{r},\tau)$ lub $\vartheta_2(\bar{r},\tau)$ opisujących zmienne pole temperatur w elemencie wypełnienia, odpowiednio dla fazy grzania lub ochładzania. Temperatury t_1 i t_2 oznaczają temperatury gazów grzejącego i oohładzanego.

Warunki brzegowe dla przedziałów czasu $(0, \tau_1)$ fazy grzania i $(0,\tau_2)$ fazy ochładzania są warunkami rewersji i wyrażają równość funkcji ϑ_1 i ϑ_2 w punktach ich "styku"

$$\vartheta_1(\bar{r},\tau_1) = \vartheta_2(\bar{r},0), \tag{4}$$

$$\vartheta_2(\bar{r},\tau_2) = \vartheta_1(\bar{r},0). \tag{5}$$

W celu wyznaczenia stosunku $\varkappa$ wystarczy znaleźć funkcję $\vartheta_1(\bar{r},\tau)$. Po uśrednieniu jej w całej objętości elementu wypełnienia otrzymujemy funkcję

$$\vartheta_{m1}(\tau) = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} \vartheta_1(\bar{r},\tau)dV \tag{6}$$

opisującą przebieg czasowy średniej temperatury elementu wypełnienia. Poszukiwany stosunek $\varkappa$, zgodnie z definicją, wyraża się wzorem

$$\varkappa = \frac{\vartheta_{m1}(\tau_1) - \vartheta_{m1}(0)}{t_1 - t_2}. \tag{7}$$

3. Zmienne bezwymiarowe

W celu uproszczenia dalszych rozważań, jak i końcowego wyniku, wprowadzamy zmienne bezwymiarowe:

Zredukowane temperatury

$$\theta_1 = \frac{\vartheta_1 - t_1}{t_1 - t_2}, \quad \theta_2 = \frac{\vartheta_2 - t_2}{t_1 - t_2}, \tag{8}$$

Zredukowane współrzędne

$$\bar{R} = \frac{\bar{r}}{l_o} \tag{9}$$

Zredukowany czas (liczba Fouriera)

$$(Fo) = \frac{a\tau}{l_o^2}, \quad (Fo)_1 = \frac{a\tau_1}{l_o^2}, \quad (Fo)_2 = \frac{a\tau_2}{l_o^2},$$

liczbę Biota

$$(Bi) = \frac{\alpha l_o}{\lambda}, \tag{11}$$

Bezwymiarowa postać równań (2) - (7) jest następująca

$$\frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial (Fo)} = \nabla^2 \theta_{1,2} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial N} + (Bi)\, \theta_{1,2} = 0 \tag{3a}$$

$$\theta_1(\bar{R}, (Fo)_1) = \theta_2(\bar{R}, 0) - 1 \tag{4a}$$

$$\theta_2(\bar{R}, (Fo)_2) = \theta_1(\bar{R}, 0) + 1 \tag{5a}$$

$$\theta_{m1}(Fo) = \frac{1}{V} \int_{(V)} \theta_1(\bar{R}, (Fo))\, dV \tag{6a}$$

$$\chi = \theta_{m1}((Fo)_1) - \theta_{m1}(0) \tag{7a}$$

4. Wyznaczenie stosunku χ

Z równania (2a) i warunku brzegowego (3a) można wyznaczyć funkcje θ_1 i θ_2 w postaci rozwinięcia w szeregi według funkcji własnych

$$\theta_{1,2} = \sum_{k=1}^{\infty} C_{k1,2}\, v_k(\bar{R}) \exp(-\mu_k^2 (Fo)) \tag{12}$$

z dokładnością do współczynników $C_{k1,2}$ szeregu.

Funkcje własne i wartości własne są rozwiązaniami następującego zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} \nabla^2 v + \mu^2 v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial N} + (Bi)\, v &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Współczynniki szeregu wyznacza się zwykle z rozwinięcia w szereg według tych samych funkcji własnych funkcji wyrażającej początkowy rozkład temperatur. W tym wypadku początkowe rozkłady temperatur nie są znane i współczynniki $C_{k1,2}$ należy wyznaczyć z warunków rewersji (4a), (5a). Podstawiając równanie (12) do tych warunków otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{k1}\, v_k \exp(-\mu_k^2 (Fo)_1) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{k2}\, v_k - 1, \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{k2}\, v_k \exp(-\mu_k^2 (Fo)_2) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{k1}\, v_k + 1. \tag{15}$$

Jeżeli wprowadzimy ciąg wielkości A_k zdefiniowanych następująco

$$A_k = \frac{\int\limits_{(V)} v_k(\bar{R})\, dV}{\int\limits_{(V)} v_k^2(\bar{R})\, dV} \tag{16}$$

i będących współczynnikami rozwinięcia w szereg funkcji jednostkowej

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, v_k = 1, \tag{17}$$

to rozwinięcia (14) i (15) przyjmą postać

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{k1}\exp(-\mu_k^2(Fo)_1) - C_{k2} + A_k\right)v_k(\bar{R}) = 0 \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{k2}\exp(-\mu_k^2(Fo)_2) - C_{k1} - A_k\right)v_k(\bar{R}) = 0 \tag{19}$$

Szeregi funkcyjne (18), (19) są tożsamościowo równe zeru dla wszystkich wartości $\bar{R}$, przy spełnieniu następujących warunków

$$C_{k1}\exp(-\mu_k^2(Fo)_1) - C_{k2} + A_k = 0, \tag{20}$$

$$C_{k2}\exp(-\mu_k^2(Fo)_2) - C_{k1} - A_k = 0 \tag{21}$$

dla wszystkich k. Z równań (20) i (21) wyznacza się współczynniki C_{k1} i C_{k2}

$$C_{k1} = A_k\frac{\exp(-\mu_k^2(Fo)_2) - 1}{1 - \exp(-\mu_k^2((Fo)_1 + (Fo)_2))} \tag{22}$$

$$C_{k2} = A_k\frac{1 - \exp(-\mu_k^2(Fo)_1)}{1 - \exp(-\mu_k^2((Fo)_1 + (Fo)_2))} \tag{23}$$

Poszukiwane funkcje θ_1 i θ_2 wyrażające przebiegi zredukowanych temperatur elementu wypełnienia w czasie fazy grzania i ochładzania, mają ostateczną postać

$$\theta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, v_k(\bar{R})\,\frac{\exp(-\mu_k^2(Fo)_2) - 1}{1 - \exp(-\mu_k^2((Fo)_1 + (Fo)_2))}\exp(-\mu_k^2(Fo)), \tag{24}$$

$$\theta_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, v_k(\bar{R})\, \frac{1 - \exp(-\mu_k^2 (Fo)_1)}{1 - \exp(-\mu_k^2((Fo)_1 + (Fo)_2))} \exp(-\mu_k^2 (Fo)). \tag{25}$$

W celu wyznaczenia stosunku $\varkappa$ uśredniamy funkcję θ_1 zgodnie z równaniem (6a). Jeżeli przy tym oznaczymy

$$B_k = A_k \frac{1}{V} \int_{(V)} v_k(\bar{R})\, dV, \tag{26}$$

to otrzymamy

$$\theta_{m_1} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\exp(-\mu_k^2 (Fo)_2) - 1}{1 - \exp(-\mu_k^2((Fo)_1 + (Fo)_2))} \exp(-\mu_k^2 (Fo)). \tag{27}$$

Wstawiając to do równania (7a) uzyskujemy ostatecznie

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{(1-\exp(-\mu_k^2 (Fo)_1))(1-\exp(-\mu_k^2 (Fo)_2))}{1\ \exp(-\mu_k^2((Fo)_1 + (Fo)_2))} \tag{28}$$

Ponieważ wartości własne μ_k oraz współczynniki A_k, a więc i B_k, są funkcjami liczby Biota, więc $\varkappa$ zależy od następujących zmiennych

$$\varkappa = \varkappa((Bi), (Fo)_1, (Fo)_2)$$

Funkcja ta jest symetryczna względem zmiennych $(Fo)_1$ i $(Fo)_2$.

Szczegółową dyskusję równania (28) przeprowadzono w pracy [1]. Zamieszczono tam również wykres tej funkcji dla wypełnienia regeneratora w postaci symetrycznie ogrzewanych płyt. Wykres ten dotyczy przypadku równych liczb Fouriera.

LITERATURA

[1] GDULA S.J.: Przepływ ciepła w ciałach stałych przy skokowych, periodycznych zmianach temperatury ośrodka. Archiwum Budowy Maszyn, 11, 2, 1964.

[2] GUZIK A.: Obliczanie pola powierzchni grzejnej nagrzewnicy wielkopiecowej. Zesz. Nauk. Pol. Śl., Energetyka z. 26, 1967.

КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В РЕГЕНЕРАТОРЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ

Р е з ю м е

Аналитическим путем получено зависимость отношения разности средних температур твердой набивки и температур газов в регенераторе от чисел ФУРЕ и числа БИО.
Эту зависимость получено раньше в работе [1] другим методом.

OVER-ALL HEAT TRANSFER COEFFICIENT IN THE REGENERATOR AT THE STABLE CONVECTIVE HEAT TRANSFER COEFFICIENT

S u m m a r y

A dependence of relation of a difference in medium temperature of filling and gas temperatures in the regenerator on the FOURIER's numbers and BIOTs number, has been in the analytical way achieved. This dependence was formerly achieved by means of another method in the paper [1].