ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968

Seria: ENERGETYKA z. 29 Nr kol. 223

JERZY TOMECZEK
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

ZASTOSOWANIE TRANSFORMACJI CAŁKOWYCH W OBSZARACH SKOŃCZONYCH DO ROZWIĄZYWANIA REGENERATORÓW CIEPŁA

Streszczenie. Wyprowadzono w oparciu o transformacje całkowe w obszarze skończonym wyrażenie określające temperaturę dowolnego punktu wypełnienia regeneratora jako funkcję czasu. Podano wyrażenie określające zredukowaną ilość ciepła dla stanu pseudoustalonego. Uzyskane rezultaty pokrywają się z wynikami otrzymanymi przez innych autorów [1].

1. Wstęp

W zagadnieniach projektowania regeneratorów konieczna jest znajomość ciepła zredukowanego, tj. stosunku ciepła przekazywanego w czasie jednego periodu do ilości ciepła, która mogłaby być przekazana przy określonej różnicy temperatury płynów. Wielkość ta zdefiniowana jest równaniem [1], [2]

$$\varkappa = \frac{\vartheta_m(\tau_g) - \vartheta_m(0)}{t_{c1} - t_{c2}} \tag{1}$$

Celem wyznaczenia wielkości $\varkappa$ należy obliczyć średnią temperaturę wypełnienia $\vartheta_m(0)$ na początku okresu grzania oraz $\vartheta_m(\tau_g)$ na końcu okresu grzania.

W pracy przedstawiona zostanie metoda transformacji całkowych w obszarze skończonym do wyznaczenia pola temperatury w wypełnieniu regeneratora. Zagadnienie to było szczegółowo badane analitycznie przez Gdulę [1] dla symetrycznych oraz numerycznie przez Guzika [2] dla niesymetrycznych regeneratorów.

Sposób postępowania oraz przydatność metody przedstawione zostaną na przykładzie regeneratora symetrycznego. Dla rozwiązania zagadnienia niezbędne jest poczynienie następujących założeń:

a) jednowymiarowy przepływ ciepła,

b) niezmienne parametry termiczne i kaloryczne materiału wypełnienia,

c) niezmienny współczynnik przejmowania ciepła (jednakowy w czasie nagrzewania i ochładzania regeneratora).

2. Rozwiązanie równania bilansu energii

Równanie bilansu energii w wypełnieniu ma postać

$$\frac{\partial \vartheta[r^+,(Fo)]}{\partial (Fo)} = \nabla_r^2 + \vartheta[r^+,(Fo)] \tag{2}$$

gdzie: $(Fo) = \frac{a\tau}{\delta^2}$, $r^+ = \frac{r}{\delta}$.

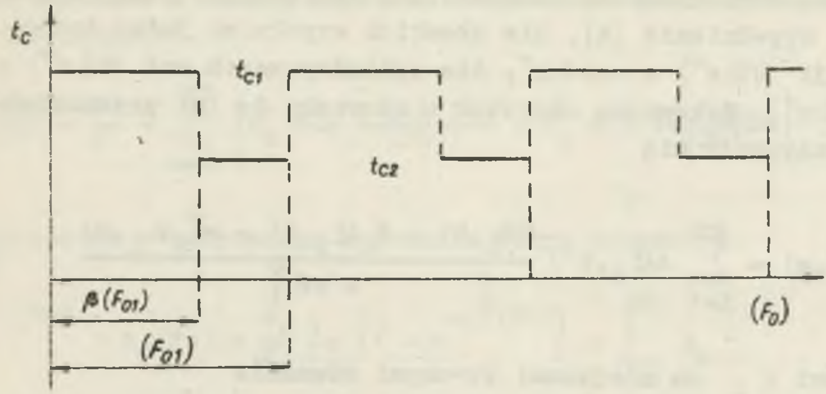
Równanie (2) słuszne jest dla cylindrycznych i płaskich wypełnień. W równaniu tym r oznacza współrzędną prostopadłą do powierzchni zewnętrznej wypełnienia, δ – wymiar charakterystyczny, a – współczynnik wyrównywania temperatury.
Równanie to musi być rozwiązane przy następujących warunkach brzegowych:

$$\left.\frac{\partial \vartheta[r^+,(Fo)]}{\partial r^+}\right|_{r^+=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \vartheta[r^+,(Fo)]}{\partial r^+}\right|_{r^+=1} + (Bi)\left\{\vartheta[1,(Fo)] - t_c(Fo)\right\} = 0 \tag{3}$$

oraz warunku początkowym

$$\text{dla } (Fo) = 0 \qquad \vartheta[r^+,(Fo)] = \vartheta(r^+, 0) \tag{4}$$

Temperatura płynu omywającego wypełnienie opisana jest funkcją skokową przedstawioną na rysunku 1.



Rys. 1. Temperatura płynu jako funkcja liczby (Fo)

Wprowadzając zastępczą temperaturę

$$\Theta = \vartheta - t_c$$

można zapisać równania (2) i (3) w postaci

$$\frac{\partial \Theta}{\partial (\mathrm{Fo})} + \frac{\partial t_c}{\partial (\mathrm{Fo})} = \nabla^2_{r^+}\Theta \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial r^+}\right|_{r^+=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial r^+}\right|_{r^+=1} + (\mathrm{Bi})\Theta_{r^+=1} = 0 \tag{6}$$

Wykonane zostanie w równaniach (5) i (6) obustronnie przekształcenie Laplace'a

$$\bar{\Theta}(r^+,s) = \int_0^\infty e^{-s(\mathrm{Fo})}\Theta\left[r^+,(\mathrm{Fo})\right] d(\mathrm{Fo}) \tag{7}$$

a następnie przekształcenie o postaci

$$\bar{\bar{\Theta}}(\xi,s) = \int_0^1 \bar{\Theta}(r^+,s)\,\mathcal{R}(\xi r^+)dr^+ \tag{8}$$

Jądro transformacji całkowej (8) uzależnione jest od geometrii wypełnienia [4]. Dla płaskich wypełnień jądro transformacji $\mathcal{K}(\xi r^+) = \cos \xi r^+$, dla cylindrycznych zaś $\mathcal{K}(\xi r^+) = rJ_0(\xi r^+)$. Wykonując odwrotne w stosunku do (8) przekształcenie uzyskuje się

$$\Theta(r^+,s) = \sum_{i=1}^{\infty} A(\xi_i,r^+) \frac{\bar{\Theta}(\xi_i,0) + \bar{t}_c(\xi_i,0) - s\check{t}_c(\xi_i,s)}{s + \xi_i^2} \tag{9}$$

Wartości ξ_i są miejscami zerowymi równania

$$\xi J_1(\xi) = (Bi) J_0(\xi)$$

dla cylindrycznego wypełnienia oraz

$$\xi \sin(\xi) = (Bi) \cos(\xi)$$

dla płaskiego wypełnienia.

Zależność temperatury wypełnienia od liczby (Fo) uzyskuje się po wykonaniu w równaniu (9) odwrotnego przekształcenia Laplace'a

$$\Theta[r^+,(Fo)] = \sum_{i=1}^{\infty} A(\xi_i,r^+) \Big\{ [\bar{\Theta}(\xi_i,0) + t_c(\xi_i,0)] e^{-\xi_i^2(Fo)} +$$

$$- \bar{t}_c[\xi_i,(Fo)] + \xi_i^2 e^{-\xi_i^2(Fo)} * \bar{t}_c[\xi_i,(Fo)] \Big\} \tag{10}$$

gdzie: $*$ oznacza operację splotu.

Ponieważ temperatura płynu jest funkcją tylko liczby (Fo) zatem

$$\bar{t}_c[\xi_i,(Fo)] = D(\xi_i)\, t_c(Fo) \tag{11}$$

W celu wyznaczenia ostatniego wyrazu w równaniu (10) rozłożona zostanie w szereg Fouriera temperatura płynu przedstawiona na rysunku 1

$$t_c(Fo) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{2\,n\,\pi\,(Fo)}{(Fo1)} + b_n \sin \frac{2n\,\pi\,(Fo)}{(Fo1)} \right\} \tag{12}$$

Korzystając z powyższego wyrażenia można wyznaczyć

$$e^{-\xi^2(Fo)} * t_c(Fo) = \frac{a_o}{2}\frac{1}{\xi^2}\left[1 - e^{-\xi^2(Fo)}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\left\{ \frac{\xi^2}{\xi^4 + \left[\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}\right]^2} \cos \frac{2\,n\,\pi\,(Fo)}{(Fo1)} + \frac{\left[\frac{2\pi n}{(Fo1)}\right]^2}{1 + \left[\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}\right]^2}\right.$$

$$\left. \sin \frac{2\,n\,\pi\,(Fo)}{(Fo1)} - \frac{\xi^2}{\xi^4 + \left[\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}\right]^2} e^{-\xi^2(Fo)} \right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{-\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}}{\xi^4 + \left[\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}\right]^2} \cos \frac{2n\,\pi\,(Fo)}{(Fo1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi^2\,\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}}{\xi^4 + \left[\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}\right]^2} \sin \frac{2\,n\,\pi\,(Fo)}{(Fo1)} + \frac{\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}}{\xi^4 + \left[\frac{2\,n\,\pi}{(Fo1)}\right]^2} e^{-\xi^2(Fo)} \right\} \tag{13}$$

Równania (10), (11), (12) i (13) określają zatem temperaturę dowolnego punktu wypełnienia w czasie (Fo). Równania te mogą służyć między innymi do analizy nieustalonego stanu regeneratora symetrycznego.

3. Wyznaczenie ciepła zredukowanego

W praktyce projektowania regeneratorów potrzebna jest jednakże przede wszystkim znajomość wartości $\varkappa$ w stanie ustalonej pracy regeneratora, tzn. gdy temperatura wypełnienia na początku i na końcu każdego periodu jest taka sama. Wielkość $\varkappa$ można wyprowadzić z równań (10) i (13). Dla przykładu wyznaczona zostanie wartość zredukowanego ciepła w przypadku, gdy czasy grzania i ochładzania w jednym periodzie są sobie równe, tzn. gdy $\beta = 1$. Stan ustalony znajduje się dostatecznie daleko od stanu początkowego tak, że można przyjąć $\exp\left[-\xi^2(Fo)\right] \approx 0$. Niech n oznacza ilość periodów wykonanych od chwili $(Fo) = 0$. Oznaczając początek grzania przez $n(Fo1)$, zaś jego koniec przez $(n + \frac{1}{2})(Fo1)$ zatem odpowiednia zmiana temperatury w dowolnym punkcie wypełnienia wyrażona jest wzorem

$$\Delta\theta(r^+) = \sum_{i=1}^{\infty} E(\xi_i, r^+)\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\xi_i^2}{\xi_i^4 + \left[\frac{2n\pi}{(Fo1)}\right]^2}(-2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1} b_n \frac{-\frac{2n\pi}{(Fo1)}}{\xi_i^2 + \left[\frac{2n\pi}{(Fo1)}\right]^2}(-2)\right\} \qquad (14)$$

gdzie:

$$a_n = \frac{2}{(Fo1)} \int_0^{(Fo1)} t_o(Fo) \cos\frac{2n\pi(Fo)}{(Fo1)}\, d(Fo) = 0$$

$$b_n = \frac{2}{(Fo1)} \int_0^{(Fo1)} t_o(Fo) \sin\frac{2n\pi(Fo)}{(Fo1)}\, d(Fo) = \qquad (15)$$

$$= (t_{o1} - t_{o2})\,\frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

Podstawiając $m = (2n - 1)$ i wykorzystując wyrażenia (15) można równanie (14) zanotować w postaci

$$\Delta\theta(r^+) = \sum_{i=1}^{\infty} B(\xi_i, r^+)\,\frac{(Fo1)}{\pi^2}\,(t_{c1}-t_{c2}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2 + \left[\frac{(Fo1)\xi_i^2}{2\pi}\right]^2}$$

Ostatni szereg występujący w powyższym wyrażeniu jest rozwinięciem funkcji tangens hiperboliczny [3]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2 + \left[\frac{(Fo1)\xi_i^2}{2\pi}\right]^2} = \frac{\pi^2}{2(Fo1)\xi_i^2}\,\mathrm{th}\left[\frac{(Fo1)\xi_i^2}{4}\right]$$

Uzyskuje się zatem

$$\Delta\theta(r^+) = \sum_{i=1}^{\infty} F(\xi_i, r^+)(t_{c1} - t_{c2})\,\mathrm{th}\left[\frac{(Fo1)\xi_i^2}{4}\right] \tag{16}$$

Równanie (16) wyraża zmianę temperatury dowolnego punktu wypełnienia na końcu i początku okresu grzania w stanie odległym od stanu początkowego. Zmianę średniej temperatury określa równanie

$$\Delta\theta_m = \int_0^A \Delta\theta(r^+)\,dA \tag{17}$$

Podstawiając wyrażenia (16) i (17) do (1) uzyskuje się ciepło zredukowane

$$\chi = \sum_{i=1}^{\infty} B(\xi_i)\,\mathrm{th}\left[\frac{(Fo1)\xi_i^2}{4}\right] \tag{18}$$

gdzie:

$$B(\xi_i) = 2\frac{\xi_i^2 + (Bi)^2}{\xi_i^2 + (Bi)^2 + (Bi)}\left(\frac{\sin\xi_i}{\xi_i}\right)^2$$

dla geometrii płaskiej oraz

$$B(\xi_i) = \frac{4(Bi)^2}{(Bi)^2 + \xi_i^2}\frac{1}{\xi_i^2}$$

dla geometrii cylindrycznej.

Wzór (18) identyczny jest ze wzorem otrzymanym przez innych autorów (por. [1]).

4. Wnioski

Przedstawiona metoda może być zastosowana również w przypadku, gdy liczby Biota dla okresu grzania i ochładzania są różne. W takim przypadku nie można jednakże przedstawić rezultatów w postaci wzoru tak zwartego jak wzór (18) i niezbędne jest sporządzenie wykresów.

Zastosowanie przedstawionej metody zamiast metody numerycznej pozwala poważnie zaoszczędzić czas potrzebny na wykonanie obliczeń ponieważ w metodzie tej nie istnieje żadne ograniczenie odstępu czasu.

LITERATURA

[1] GDULA S.J.: Przepływ ciepła w ciałach stałych przy skokowych periodycznych zmianach temperatury ośrodka. Archiwum Budowy Maszyn. Tom XI, 1964.

[2] GUZIK A.: Wyznaczanie współczynnika przekazywania ciepła w regeneratorze dla stałych temperatur gazów w oparciu o metody różnicowe. Praca doktorska. Gliwice, 1966.

[3] RYŻYK J.M., GRADSZTEJN J.S.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN, Warszawa, 1964.

[4] TRANTER C.J.: Integralnyje preobrazowania w matematiczeskoj fizikie. Moskwa, 1956.

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ РЕГЕНЕРАТОРОВ ТЕПЛА

Р е з ю м е

Опираясь на конечных интегральных преобразованиях в работе получено выражение для временной функции температуры любой точки выполнения регенератора. Получено тоже выражение для безразмерного тепла в стационарном состояния действия регенератора.

Результаты соглашаются с результатами других авторов [1].

THE APPLICATION OF THE INTEGRAL TRANSFORMATIONS
IN THE FINITE AREA TO THE SOLUTIONS
OF THE HEAT REGENERATORS

S u m m a r y

Basing on the integral transformations in the finite area the expression for the temperature in an arbitrary point of the regenerators fulfilment as a function of time is derived. The reduced heat for the semi-steady state is given. The derived expressions agree with the results of other authors [1].