ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968

Seria: ENERGETYKA z. 29 Nr kol. 223

TADEUSZ CHMIELNIAK
Katedra Cieplnych Maszyn Wirnikowych

O PEWNYCH PRZYPADKACH NIEUSTALONEGO PRZEPŁYWU W RURZE

Streszczenie. W pracy rozpatrzono nieustalony przepływ laminarny dla dowolnej periodycznej zależności gradientu ciśnienia od czasu. Ogólne rozwiązanie zagadnienia otrzymano przy założeniu przepływu cieczy nieściśliwej. Ponadto przedyskutowano kilka rozwiązań dla pewnych przyjętych analitycznie lub za pomocą wykresu zależności gradientu ciśnienia od czasu.

1. Wstęp

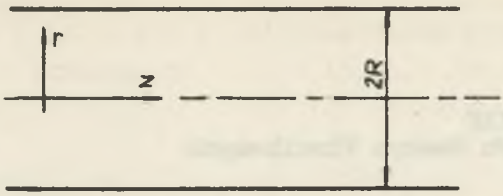
W wielu przypadkach istnieje konieczność określenia rozkładu prędkości w rurze o przekroju kołowym przy zmieniającym się okresowo w czasie gradiencie ciśnienia. Czasowe wahanie gradientu ciśnienia może zostać wywołane np. przez okresowe zamykanie i otwieranie zasuwy wmontowanej w rurociąg w którym badamy przepływ. Dla rozwiązania zagadnienia wykorzystamy laminarny model przepływu osiowo-symetrycznego cieczy nieściśliwej w rurze przy założeniu niezmienności składowej osiowej prędkości u od współrzędnej z (rys. 1). Opis takiego modelu przepływu przedstawia liniowe równanie różniczkowe (1) [1],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -1/\varrho \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi:

$$u(r,t) = 0 \quad r = R$$

$$u(r,t) < M < \infty \quad r = 0 \tag{1a}$$



Rys. 1. Przepływ w rurze o przekroju kołowym

gdzie:

ϱ – gęstość oraz ν – współczynnik lepkości kinematycznej są wielkościami stałymi.

Ciśnienie p ogólnie biorąc może być dowolną okresową funkcją p(z,r,t) określoną dla każdego rozpatrywanego rodzaju przepływu. Nasze rozważania ograniczymy do przypadków takiej funkcji p by gradient ciśnienia $-1/\varrho \frac{\partial p}{\partial z}$ był jednoznaczną funkcją czasu f(t) (oznacza to, że nasz model przepływu uzupełniamy założeniem o możliwości pominięcia strat ciśnienia w kierunku przepływu).

Zakładamy, że dowolność okresowej funkcji f(t) ograniczona jest warunkami Dirichleta oraz warunkiem różniczkowalności jej szeregu Fouriera[x)].

2. Ogólne rozwiązanie zagadnienia

Rozwiązania równania (1) dla warunku (1a) przy ustaleniu że:

$$-1/\varrho \frac{\partial p}{\partial z} = f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} \tag{2}$$

szukać będziemy w postaci:

$$u(r,t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k(r) e^{ikt} \tag{3}$$

x) Założenia te sprowadzają się do ciągłości f(t) dla wszystkich t, skończonej ilości punktów nieciągłości f'(t) w przedziale $-\pi,\pi$ oraz by f(t) i f'(t) na końcach przedziału miały skończone różnice.

Po wprowadzeniu zależności (2) i (3) w (1) i uwzględnieniu założeń dotyczących funkcji $f(t)$ otrzymujemy dla określenia d_k zagadnienie brzegowe (4), (4a).

$$d_k'' + \frac{1}{r} d_k' - \frac{ik}{\nu} d_k = -\frac{1}{\nu} c_k \tag{4}$$

$$\begin{aligned} d_k(r) &= 0 \qquad & r &= R \\ d_k(r) &< M \qquad & r &= 0 \end{aligned} \tag{4a}$$

Równanie (4) jest niejednorodnym równaniem Bessela, którego rozwiązanie dla warunku brzegowego (4a) ma postać:

$$d_k(r) = -i \frac{c_k}{k} \left[1 - \frac{J_o(r\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})}{J_o(R\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})} \right] \tag{5}$$

gdzie:

$$J_o(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{1}{2} z)^{2n}}{(n!)^2}$$

oznacza funkcję Bessela rzędu zerowego.
Ostatecznie więc rozwiązanie dla $u(r,t)$ zgodnie z (3) i (5) wyraża się przez związek (4b)

$$u(r,t) = -i \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{k} e^{ikt} \left[1 - \frac{J_o(r\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})}{J_o(R\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})} \right] \tag{4b}$$

Współczynniki c_k rozwinięcia (2) występujące w zależności (4b) dane są przy pomocy związku (6).

$$c_k = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\tau} f(\xi)\, e^{-ik\xi} d\xi \qquad k \begin{matrix} \geqslant 0 \\ < 0 \end{matrix} \tag{6}$$

Dla celów obliczeniowych rozwiązanie (4b) praktyczniej jest przekształcić do postaci:

$$u(r,t) = \frac{a_o}{4\nu}(R^2 - r^2) - i\sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{a_k - ib_k}{2k}\left[1 - \frac{J_o(r\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})}{J_o(R\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})}\right] + \right.$$

$$\left. - \frac{a_k + ib_k}{2k}\left[1 - \frac{J_o(r\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}{J_o(R\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}\right]\right\}\cos kt + \left\{i\frac{a_k - ib_k}{2k}\left[1 - \frac{J_o(r\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}{J_o(R\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})}\right]\right.$$

$$\left. + i\frac{a_k + ib_k}{2k}\left[1 - \frac{J_o(r\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}{J_o(R\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}\right]\right\}\sin kt \qquad (4c)$$

gdzie:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\cos k\tau\, d\tau \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (a)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\sin k\tau\, d\tau \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (b)$$

są współczynnikami rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji f(t).

3. Pewne przypadki szczególne

Rozpatrzmy obecnie kilka przykładów rozwiązań (4c) dla konkretnie założonych wielkości gradientu ciśnienia $-1/\rho\,\frac{\partial p}{\partial z} = f(t)$

I. $f(t) = A\cos mt + B\sin mt$

gdzie: A i B są wielkościami stałymi.

Z (a) i (b) otrzymujemy:

$$a_o = o \qquad a_k = A \qquad b_k = B \qquad k = m \qquad (c)$$

Rozwiązanie (4c) dla wartości (c) redukuje się do:

$$u(r,t) = -i\left\{\cos mt\left(\frac{A-iB}{2m}\left[1-\frac{J_0\left(r\sqrt{\frac{-im}{\nu}}\right)}{J_0\left(R\sqrt{\frac{-im}{\nu}}\right)}\right]-\frac{A+iB}{2m}\left[1-\frac{J_0\left(r\sqrt{\frac{im}{\nu}}\right)}{J_0\left(R\sqrt{\frac{im}{\nu}}\right)}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin mt\left(i\,\frac{A-iB}{2m}\left[1-\frac{J_0\left(r\sqrt{\frac{-im}{\nu}}\right)}{J_0\left(R\sqrt{\frac{-im}{\nu}}\right)}\right]+i\,\frac{A+iB}{2m}\left[1-\frac{J_0\left(r\sqrt{\frac{im}{\nu}}\right)}{J_0\left(R\sqrt{\frac{im}{\nu}}\right)}\right]\right)\right\} \tag{8}$$

Ze względu na to, że interpretacja związku (8) jest bardzo utrudniona przeprowadzimy jego analizę dla dwu szczególnych założeń w stosunku do wielkości $R\sqrt{\frac{m}{\nu}}$.

a) $R\sqrt{\frac{m}{\nu}}$ przyjmuje wartości małe mniejsze od 0,5 (drgania o bardzo małej częstotliwości).

Założenie to umożliwia funkcje J_0 występujące w (8) zastąpić przez:

$$\frac{J_0\left(r\sqrt{\frac{-im}{\nu}}\right)}{J_0\left(R\sqrt{\frac{-im}{\nu}}\right)} \approx \frac{1+\frac{im}{4\nu}r^2}{1+\frac{im}{4\nu}R^2} \tag{d}$$

$$\frac{J_0\left(r\sqrt{\frac{im}{\nu}}\right)}{J_0\left(R\sqrt{\frac{im}{\nu}}\right)} \approx \frac{1-\frac{im}{4\nu}r^2}{1-\frac{im}{4\nu}R^2} \tag{e}$$

Uwzględniając (d), (e) otrzymujemy z (8) związek postaci:

$$u(r,t) = \frac{1}{4\nu}(R^2 - r^2)(A\cos mt + B\sin mt) \tag{8a}$$

Z zależności (7) i (8a) wynika, że w wypadkach słuszności rozwiązania (8a) ($R\sqrt{\frac{m}{\nu}}$ małe) fazy wymuszenia i rozwiązania są takie same. Nadto w tym przypadku dla $t = o$ otrzymujemy zgodnie z (8a) dla $u(r,t)$ analogiczne wyrażenie jak dla rozwią-

zania ustalonego przepływu w rurze przy stałej wartości gradientu ciśnienia równej:

$$-1/\varrho \frac{\partial p}{\partial z} = A$$

Ilustrację zależności (8a) dla kilku charakterystycznych okresów czasu przedstawia rys. 2a ($A = B$, $R\sqrt{\frac{m}{\nu}} = 0{,}45$).

b) $R\sqrt{\frac{m}{\nu}}$ przyjmuje wartości $\geqslant 5$ (impulsy o dużej częstości).

W tym przypadku funkcję $J_0(z)$ można zastąpić jej asymptotycznym rozwinięciem dla dużych wartości argumentu z [5].

$$J_0(z) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{z}}\, e^{iz}\, i^{-1/2} \tag{f}$$

Uwzględniając (f) otrzymujemy ze związku (8) po pewnych przekształceniach rozwiązanie dla $u(r,t)$ w postaci:

$$u(r,t) = \frac{A}{m}\left\{\sin mt - \sqrt{\frac{R}{r}}\, e^{-\sqrt{\frac{m}{2\nu}}(R-r)} \sin\left[mt - \sqrt{\frac{m}{2\nu}}(R-r)\right]\right\} +$$

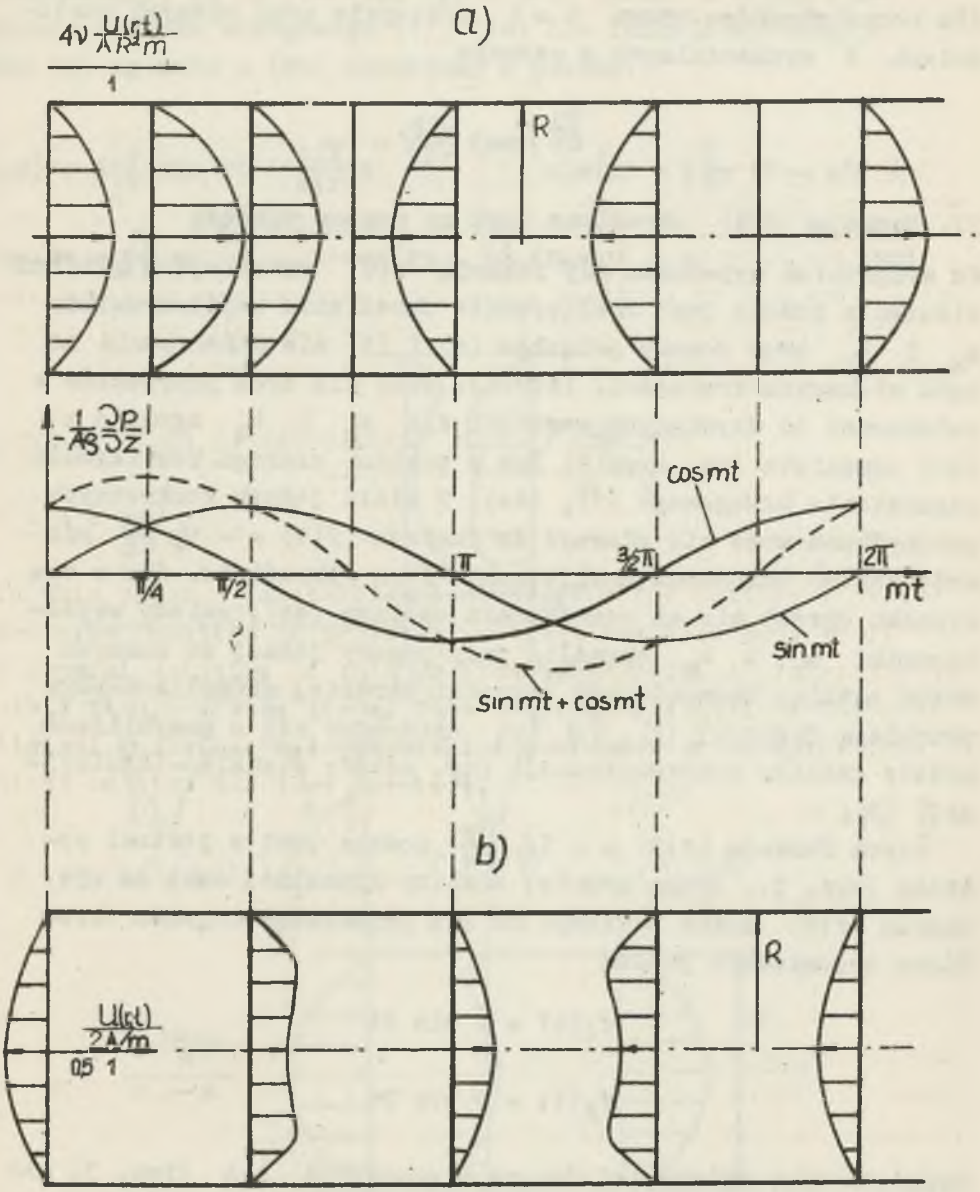
$$- \frac{B}{m}\left\{\cos mt - \sqrt{\frac{R}{r}}\, e^{-\sqrt{\frac{m}{2}}(R-r)} \cos\left[mt - \sqrt{\frac{m}{2\nu}}(R-r)\right]\right\} \tag{8b}$$

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (1), (1a) dla funkcji:

$$f(t) = A \cos mt$$

czyli rozwiązanie (8a) i (8b) dla $B = 0$ było dyskutowane przez T. Sexla i Uchidę [1] w związku z wykrytym przez E.G. Richardsona zjawiskiem przesunięcia maximum $u(r,t)$ poza $r = 0$ (tzw. Annulareffekt).

Ilustrację rozwiązania (8b) dla $A = B$, $R\sqrt{\frac{m}{\nu}} = 5$ przedstawia rys. 2b z którego wynika, że maxymalne wartości $u(r,t)$



Rys. 2. Rozkład prędkości w przekroju poprzecznym rury dla kilku charakterystycznych momentów czasu zgodnie z (8a) i (8b)

dla rozpatrywanego czasu $t = \tau$ występują przy różnych wartościach r wyznaczalnych z warunku

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{t=\tau} = 0.$$

II. Funkcja $f(t)$ określona jest za pomocą wykresu

We wszystkich wypadkach gdy funkcja $f(t)$ określająca gradient ciśnienia podana jest analitycznie określenie współczynników a_k i b_k przy pomocy związków (a) i (b) nie przedstawia na ogół większych trudności. Istnieje więc dla tych przypadków w zależności od uzyskanych wartości dla a_k i b_k zgodnie z (4c) zamknięte (np. typu 8) lub w postaci szeregu rozwiązanie zagadnienia brzegowego (1), (1a). W wielu jednak konkretnych przypadkach może się zdarzyć że funkcja $f(t) = -1/\varrho \frac{\partial p}{\partial z}$ nie może zostać określona analitycznie lecz wykreślnie. Aby w tym wypadku oprzeć się na rozwiązaniu ogólnym (4c), należy współczynniki a_k i b_k określić przy pomocy jednej ze znanych metod analizy harmonicznej (wypadki bardziej skomplikowanego przebiegu funkcji) [2], [3] lub opierając się o przybliżone metody analizy wykresu funkcji (np. metody wizualno-intuicyjnej) [3].

Niech funkcja $f(t) = -1/\varrho \frac{\partial p}{\partial z}$ podana jest w postaci wykresu (rys. 3). Drogą prostej analizy wizualnej dany na rys. 3 impuls $f(t)$ można rozłożyć na dwa pojedyncze drgania określone odpowiednio przez:

$$f_1(t) = A \sin 2t$$

$$f_2(t) = B \cos 9t$$

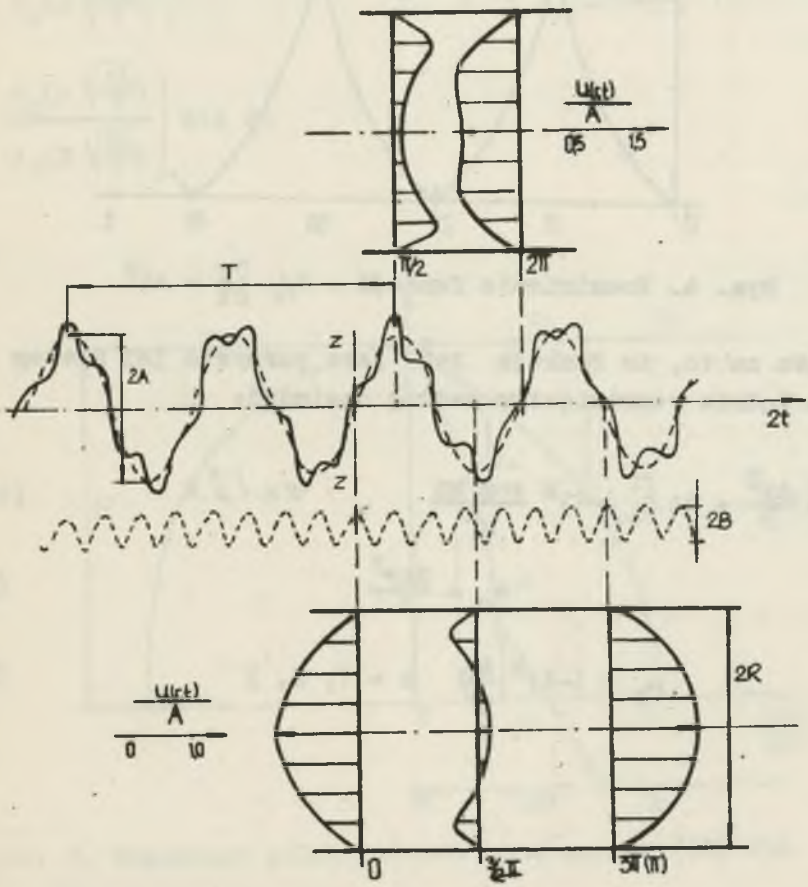
Uwzględniając zależności fazowe w przekroju z-z (rys. 3) możemy ostatecznie zapisać daną na wykresie funkcję $f(t)$ w prostej postaci analitycznej:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A \sin 2t + B \cos 9t \qquad (9)$$

Zakładając, że $R^2/\nu > 12{,}5$ $(\sqrt{\frac{m}{\nu}}\,R \geqslant 5)$ oraz $A = 4B$, rozwiązanie warunku brzegowego (1), (1a) dla funkcji wyrażonej przez (9) zgodnie z (8b) zapiszemy w postaci:

$$u(r,t) = A\left\{\frac{1}{4}\sin 9t - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{R}{r}}\,e^{-\sqrt{\frac{9}{2\nu}}(R-r)}\sin\left[9t - \sqrt{\frac{9}{2\nu}}(R-r)\right] + \right.$$

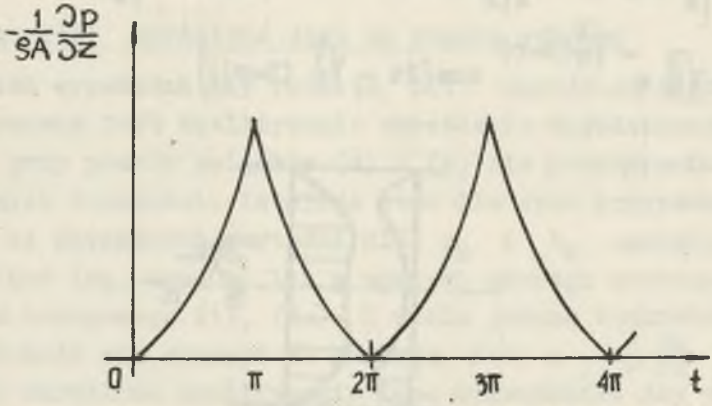
$$\left. - \cos 2t + \sqrt{\frac{R}{r}}\,e^{-\sqrt{\frac{1}{\nu}}(R-r)}\cos\left[2t - \sqrt{\frac{1}{\nu}}(R-r)\right]\right\} \tag{10}$$



Rys. 3. Rozkład prędkości w przekroju rury dla kilku charakterystycznych momentów czasu zgodnie z (10)

Zależność (10) ilustruje dla kilku charakterystycznych momentów czasu rys. 3.

III. $f(t) = At^2$ (rys. 4)



Rys. 4. Rozwinięcie funkcji $-1/\varrho \frac{\partial p}{\partial z} = At^2$

Ze względu na to, że funkcja At^2 jest parzysta jej szereg Fouriera będzie rozwinięciem według cosinusów

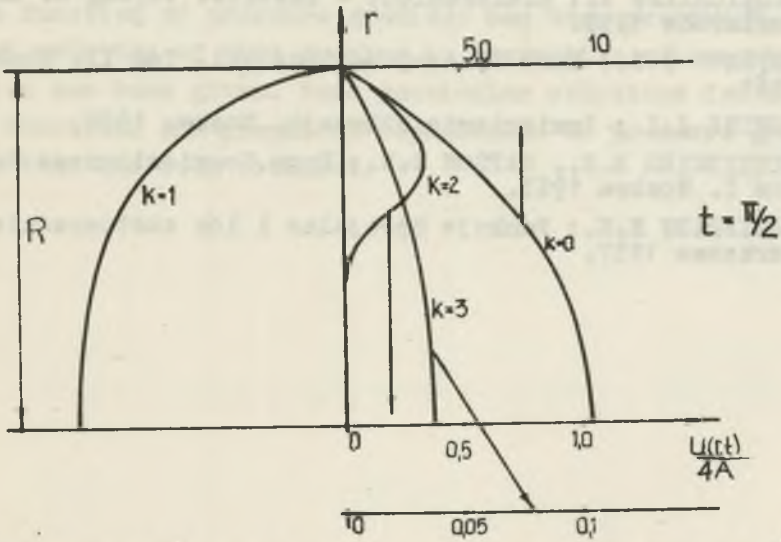
$$At^2 = \frac{A\pi^2}{3} + 4A\sum_{1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kt}{k^2} \qquad -\pi \leqslant t \geqslant \pi \tag{11}$$

$$a_o = \frac{2A\pi^2}{3} \tag{g}$$

$$a_k = (-1)^k \frac{4A}{k^2} \quad k = 1, 2, 3 \tag{h}$$

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (1), (1a) będzie się więc dla $f(t) = At^2$ wyrażało po uwzględnieniu (g) i (h) przez związek:

$$u(r,t) = \frac{A\varphi^2}{6\nu}(R^2 - r^2) - 2iA\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\left[\frac{J_0(r\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}{J_0(R\sqrt{\frac{ik}{\nu}})} - \frac{J_0(r\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})}{J_0(R\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}\right]\cos kt + i\frac{(-1)^k}{k^3}\left[2 - \frac{J_0(r\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})}{J_0(R\sqrt{\frac{-ik}{\nu}})} - \frac{J_0(r\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}{J_0(R\sqrt{\frac{ik}{\nu}})}\right]\sin kt \qquad (n)$$



Rys. 5. Przebiegi kilku członów rozwiązania (12) dla $R\sqrt{\frac{1}{\nu}} = 5$

Postać rozwiązania (12) w przeciwieństwie do stosunkowo prostych zamkniętych rozwiązań (8b) i (10) stanowi formę bar-

dziej złożoną. W celu sprawdzenia jego przebiegu obliczono wartości kilku jego członów dla $R\sqrt{\frac{1}{\nu}} = 5$ i wykonano wykresy przedstawione na rys. 5. Stanowią one ilustrację szybkości i rodzaju zbieżności szeregu (12) i tym samym określają wpływ poszczególnych członów na rozwiązanie $u(r,t)$ (rozwiązanie $u(r,t)$ w rozpatrywanym przypadku całkowicie charakteryzują człony: $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$. Resztę członów można pominąć).

W podobny sposób jak w punkcie I, II, III można na podstawie (4b) określić rozwiązania nieustalonego przepływu w rurze dla wielu innych funkcji $f(t)$ podanych dla badanego przepływu.

LITERATURA

[1] SCHLICHTING H.: Grenzschicht - Theorie. Verlag G. Braun. Karlsruhe 1958.

[2] SMIRNOW W.I.: Kurs Wysszej Matiematyki. Tom II. Moskwa 1961.

[3] JORISZ J.I.: Izmierienie Wibracji. Moskwa 1956.

[4] UITTIEKIER E.T., WATSON D.N.: Kurs Sowriemiennowo Analiza. Tom I. Moskwa 1963.

[5] LEBIEDIEW N.N.: Funkcje Specjalne i ich zastosowanie. PWN. Warszawa 1957.

О НЕКСТОРЫХ СЛУЧАЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено нестационарное течение в трубе для произвольной зависимости градиента давления от времени. Обще решение задачи получено при заложению течения несжимаемой жидкости. Кроме того обсудено несколько решений для некоторых аналитически принятых зависимости градиента давления от времени.

SOME PROBLEMS OF UNESTABLISH FLOW IN THE TUBE

S u m m a r y

In this paper a unestablish laminar flow for arbitrary periodic time function of pressure gradient has been presented. A general solution of this problem by assumption of incompressible flow has been given. Some particular solutions for analitical functions and graphical dependences of pressure gradient on time has been obtained.