ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1968

Seria: ENERGETYKA z. 29 Nr kol. 223

JÓZEF SZPILECKI
Katedra Fizyki B

WPŁYW SKOŃCZONEJ PRĘDKOŚCI ROZCHODZENIA SIĘ CIEPŁA NA ZJAWISKA PRZEWODZENIA W SFERYCZNYM UKŁADZIE JEDNOSKŁADNIKOWYM

Streszczenie. W pracy autor rozpatruje zagadnienie, jak bardzo zmieniają się rozwiązania równania przewodzenia ciepła, jeżeli zamiast powszechnie stosowanej postaci (1) odpowiadającej nieskończonej prędkości rozchodzenia się ciepła, przejdzie się do postaci (2), gdy prędkość rozchodzenia się ciepła jest skończona, na przykładzie układu jednoskładnikowego o symetrii kulistej, wymieniającego ciepło z otoczeniem o temperaturze zmiennej według prawa (5), z stałymi warunkami początkowymi. Zagadnienie rozwiązano metodą szeregów Fouriera, w którym to przypadku występują jedynie nieznaczne różnice formalne i metodą funkcji Greena, kiedy rozwiązanie komplikuje się znacznie.

1. Wstęp

W pracy swej z roku 1960 pt. "Wpływ skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła na zjawiska przewodzenia ciepła w układzie kulistym jedno i dwuwarstwowym", autor poruszył zagadnienie skończonej prędkości rozchodzenia się ciepła w przewodnikach.

W przeważającej ilości monografii podaje się (w przypadku symetrii kulistej) równanie przewodzenia ciepła w następującej postaci

$$(\partial/\partial\tau)\left[r\ t(r,\tau)\right] = \bar{a}(\partial^2/\partial r^2)\left[r\ t(r,\tau)\right] \tag{1}$$

gdzie:

t – temperatura,

r – współrzędna bieżąca,

τ – czas

$\bar{a}$ – współczynnik przewodzenia temperatury.

Wynikają zeń niefizykalne wnioski o nieskończenie dużej prędkości rozchodzenia się ciepła.

W nielicznych monografiach np. [6] podana jest pełniejsza teoria w której przyjmuje się skończoną prędkość rozchodzenia się ciepła. W tym przypadku w miejsce równania (1) otrzymujemy

$$(\partial^2/\partial r^2)\ [\bar{r}\ t(r, \tau)] = (1/\bar{a})(\partial/\partial \tau)\ [r\ t(r, \tau)] +$$

$$+ (1/c^2)(\partial^2/\partial \tau^2)\ [r\ t(r, \tau)] \qquad (2)$$

gdzie:

c - prędkość rozchodzenia się ciepła.

Ponieważ w literaturze brakło danych o prędkości c, dla cieczy i gazów, autor korzystając z wyników, które na podstawie analogii elektryczno-cieplnych przyporządkowują przewodnikowi ciepła, opór, pojemność i indukcyjność cieplną [2], wyprowadził wzory pozwalające oszacować wielkość tej prędkości dla cieczy i gazów. Z wzorów tych wynika również zależność tej prędkości od częstości oraz wniosek, że prędkość ta powinna być dla użytych danych stosunkowo nieduża.

Ponieważ w przypadku ciał stałych istnieje teoria termosprężystości, oparta na termodynamice procesów nieodwracalnych, pozwalająca na wyprowadzenie wielkości takiej prędkości [1, 3, 7], należało spodziewać się, że również na gruncie termodynamiki procesów nieodwracalnych uda się podobne zależności wyprowadzić w przypadku cieczy i gazów. W istocie ukazała się praca [5], która na gruncie nieliniowej teorii termodynamiki procesów nieodwracalnych wyprowadza uogólnione prawo Fouriera w postaci

$$q = -\lambda(\partial t/\partial r) - \tau_r\, \dot{q} \qquad (3)$$

gdzie:

q - jednostkowy strumień cieplny,

λ - współczynnik przewodzenia ciepła,

τ_r - czas relaksacji.

Kropką u góry oznaczono pochodną względem czasu.

Czas relaksacji wyprowadzono, rozpatrując odchylenie układu od stanu równowagi cieplnej, jako czas potrzebny do osiągnięcia tej równowagi. Przy pomocy τ_r zdefiniowano prędkość rozchodzenia się ciepła

$$c = \sqrt{\bar{a}/\tau_r} = \sqrt{\lambda/c_v\,\varrho\,\tau_r} \tag{4}$$

gdzie:

c_v – ciepło właściwe,

ϱ – gęstość.

Przy pomocy wzoru (3) i (4) wyprowadzono uogólnione równanie przewodzenia ciepła w postaci (2).

Jako orientacyjne dane podano następujące dane dotyczące czasów relaksacji

dla azotu $c = 150$ m/s, $\tau_r = 10^{-9}$ sec,

dla aluminium $\tau_r = 10^{-11}$ sec.

Tak małe czasy nie są mierzalne. Są jednak możliwe takie warunki, gdy drugi wyraz w formie (3) nabiera znaczenia i staje się porównywalny z pierwszym, mianowicie gdy $\dot{q}$ jest duże.

Jak z powyższego wynika zagadnieniem tym zainteresowali się uczeni i z tego powodu będzie ciekawe podać na pewnych przykładach, jakie konsekwencje jeżeli chodzi o rozwiązanie równania przewodzenia ciepła wprowadza modyfikacja tego równania.

Dla porównania rozwiązań równań (1) i (2) wybrano następujące zagadnienie brzegowe. Sferyczny przewodnik ciepła (1) o promieniu a jest otoczony ośrodkiem o temperaturze, zmiennej według prawa

$$t(\tau) = \sum_{i=1}^{n} A_k\, e^{\alpha_k \tau} + \theta \tag{5}$$

gdzie:

A_k, $\alpha_k < 0$, θ – rzeczywiste stałe,

przy warunkach początkowych: temperaturze równej $t_{1,0}$ i czasowej pochodnej temperatury równej $\dot{t}_{1,0}$.

2. Zagadnienie brzegowe

Równanie przewodzenia ciepła dla przewodnika (1) ma następującą postać

$$(1/c_1^2)\partial^2 \left[r\, t_1(r,\tau)\right] /\partial\tau^2 + (1/\bar{a})\,\partial \left[r\, t_1(r,\tau)\right] /\partial\tau =$$

$$= \partial^2 \left[r\, t_1(r,\tau)\right] / \partial r^2 \tag{6}$$

przy czym

$$0 \leqslant r \leqslant a, \qquad \tau \geqslant 0$$

Warunki brzegowe można napisać następująco:

$$t_1(r,0) = t_{1,o} = \text{const}, \qquad dt_1(r,0)/d\tau = t_{1,o}' = \text{const}$$

$$\partial t_1(a,\tau)/\partial r + (\alpha/\lambda_1)\left[t(\tau) - t_1(a,\tau)\right] = 0 \tag{7}$$

$$\partial t_1(0,\tau)/\partial r = 0$$

przy czym indeksem 1 oznaczono wielkości odnoszące się do ciała (1), α - współczynnik wnikania ciepła.

3. Rozwiązania zagadnienia brzegowego (6) - (7) z warunkiem (5) przy pomocy transformacji Laplace'a

Oznaczając transformaty temperatur $T(p)$, $T_1(r,p)$ i przez p parametr transformacji, można prosto problem sprowadzić do następującej postaci

$$(1/c_1^2)\left[p^2\, r\, T_1(r,p) - p\, r\, t_{1,o} - r\, t_{1,o}'\right] + (1/\bar{a}_1)\left[p\, r\, T_1(r,p) -\right.$$

$$\left. - r\, t_{1,0}\right] = d^2 \left[r\, T_1(r,p)\right] /d\, r^2 \tag{8}$$

$$\partial T_1(a,p)/\partial r + (\alpha/\lambda_1)\left[T(p) - T_1(a,p)\right] = 0 \tag{9}$$

$$\partial T_1(0,p)/\partial r = 0$$

$$T(p) = \sum_{k=1}^{n} A_k/(p - \alpha_k) + \theta/p \qquad (10)$$

Rozwiązanie problemu (8) - (10) jest następujące:

$$T(r,p) - t_{1,o}/p - t_{1,o}/c_1^2 q^2 = \Big\{a^2 \operatorname{sh} q\, r \cdot \big[H q^2 (p\, T(p) - t_{1,o}) - H p\, t_{1,o}/c_1^2\big]\Big\} /q^2\, r\, p\, [a\, q \operatorname{ch} q\, a + (H a - 1) \cdot \operatorname{sh} q\, a] \qquad (11)$$

gdzie:

$$H = \alpha/\lambda_1 \qquad (12)$$

$$q = \sqrt{p/\bar{a}_1 + p^2/c_1^2} \qquad (13)$$

3.1. Obliczenie funkcji czasowej w postaci szeregu Fouriera

Przy pomocy twierdzenia Heaviside'a otrzymujemy następującą funkcję czasową

$$t_1(r,\tau) - \theta = (\bar{a}_1/c_1^2)t_{1,o}(1 - e^{-\tau(c_1^2/\bar{a}_1)}) = \sum_{v=1}^{\infty} \Big\{a^2 \operatorname{sh} q_v\, r \cdot \big[H\, T(p_v) - \theta/p_v\big] e^{p_v \tau}\Big\} /(d/dp)\Big\{r\,[a\, q_v \cdot \operatorname{ch} q_v\, a + (H a - 1)\operatorname{sh} q_v\, a]\Big\} + \sum_{k=1}^{n} a^2 \operatorname{sh} q_k\, r \cdot H \cdot B_k\, e^{\alpha_k \tau} / r\, p_k\, [a\, q_k \operatorname{ch} q_k\, a + (H a - 1)\operatorname{sh} q_k\, a] \qquad (14)$$

gdzie:

$$p_k = \alpha_k,$$

q_k otrzymujemy z (13) dla $p = \alpha_k$.

Wartości q_v są rozwiązaniami równania

$$\operatorname{tg} m\, a = - m\, a/(H\, a - 1) \tag{15}$$

dla

$$q = m \cdot i, \qquad i = \sqrt{-1} \tag{16}$$

Równanie (15) posiada nieskończenie wiele rzeczywistych rozwiązań m. Dla każdego m można obliczyć p z równania

$$p = (1/2)\left[- c_1^2/\bar{a}_1 \pm \sqrt{c_1^4/\bar{a}_1^2 - 4\, m^2\, c_1^2}\right] \tag{17}$$

powstałym przez przekształcenie równania (13).

Z równania (17) wynika, że charakterystyczne wartości m są ograniczone wartością $m = 0 (p = - c_1^2/\bar{a}_1)$ oraz $m^2 = c_1^2/4\, \bar{a}_1^2$ $(p = - c_1^2/2\, \bar{a}_1)$.
Która z wartości p jest właściwą (dolny znak) poznajemy przez przejście graniczne $c_1 \rightarrow \infty$.

3.2. Zmodyfikowany problem brzegowy

Przyjmując w równaniu (6) $c_1 \rightarrow \infty$ i warunek początkowy $t'_{1,o} = 0$ otrzymujemy następującą funkcję czasową

$$t_1(r, \tau) - \Theta =$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} H\, a^2 \left[T(p_v) - \Theta/p_v\right] \operatorname{sh} q_v\, r \cdot e^{p_v \tau} / (d/dp) \Big\{ r\, q_v\, a \cdot$$

$$\cdot \left[\operatorname{ch} q_v\, a + (H\, a - 1) \operatorname{sh} q_v\, a\right] p_v \Big\} + \sum_{k=1}^{n} H\, a^2 B_k \operatorname{sh} q_k\, r \cdot e^{\alpha_k \tau} /$$

$$/ r\left[a\, q_k \operatorname{ch} q_k\, a + (H\, a - 1) \operatorname{sh} q_k\, a\right] \tag{18}$$

z

$$q = \sqrt{p/\bar{a}_1} \tag{19}$$

i q_v rozwiązania równania (15) z uwzględnieniem (16) i (19).
Zakres wartości m i p_v jest nieograniczony.

3.3. Wnioski

Zastosowanie równania (6) zamiast równania (1) nie wprowadza żadnych komplikacji obliczeniowych. Liczba charakterystycznych wartości jest jednak ograniczona. Wadą metody jest to, że nie wyraża explicite ważnej cechy rozwiązania, że wzrost temperatury wzdłuż przewodnika odbywa się ze skończoną prędkością.

4. Rozwiązanie problemu przy pomocy funkcji Greena

4.1. Modyfikacja równania (11)

Równanie (11) można zastępując funkcje hiperboliczne przez wykładnicze, doprowadzić do następującej postaci

$$T_1(r,p) - t_{1,o}/p - t_{1,o}'/c_1^2\, q^2 = \big[(e^{-q(a-r)} - e^{-q(a+r)})/$$

$$/r\, p\, q^2\big]H\, a^2 \left\{\left[p\, T(p) - t_{1,o}\right] q^2 - t_{1,o}'\, p/c_1^2\right\} /$$

$$/\left[a\, q + H\, a - 1 + (a\, q - H\, a + 1)e^{-2\, q\, a}\right] \tag{20}$$

Podobnie jak w [4] dyskutujemy następujące przypadki.

4.1.1. a q jest bardzo duże, H a − 1 jest bardzo małe

W mianowniku można opuścić funkcję wykładniczą jako bardzo małą w porównaniu z innymi wyrazami

$$T_1(r,p) - t_{1,o}/p - t_{1,o}'/c_1^2\, q^2 = (e^{-q(a-r)} - e^{-q(a+r)})\,\cdot$$

$$\cdot\, (p\, T(p) - t_{1,o})H\, a/r\, p\, q - t_{1,o}'\, H\, a(e^{-q(a-r)} - e^{-q(a+r)})/$$

$$/c_1^2\, r\, q^3 \tag{21}$$

przy czym $T(p)$ należy podstawić z (10).

Wprowadzając

$$b = c_1^2/\bar{a}_1$$

$$k_1 = (a - r)/c_1 \tag{22}$$

$$k_2 = (a + r)/c_1$$

i $I_o(x)$ zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju, można napisać funkcję czasową w następującej postaci dla $\tau \geqslant \max(k_1, k_2)$

$$t_1(r,\tau) - t_{1,o} - (\bar{a}_1/c_1^2)\left(1 - e^{-(c_1^2/\bar{a}_1)\tau}\right)t_{1,o}' =$$

$$= (H\ a/r)(\theta - t_{1,o})c_1 \left\{\int_0^{\tau} e^{-(b/2)\tau}\left(I_o\left[(b/2)\sqrt{\tau^2 - k_1^2}\right] -\right.\right.$$

$$\left.\left. - I_o\left[(b/2)\sqrt{\tau^2 - k_2^2}\right]\right)\right\}d\tau - (H\ a\ \bar{a}_1\ t_{1,o}'/c_1^2\ r)\ \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\tau} e^{-(b/2)\tau_1} \cdot \left(1 - e^{-(c_1^2/a_1)(\tau - \tau_1)}\right) \cdot \left[I_o\left[(b/2)\sqrt{\tau_1^2 - k_1^2}\right] -\right.$$

$$\left. - I_o\left[(b/2)\sqrt{\tau_1^2 - k_2^2}\right]\right]d\tau_1 + \sum_{k=1}^{n}(H\ a/r)A_k\ c_1\int_0^{\tau} e^{-(b/2)\tau}\ \cdot$$

$$\cdot\ e^{\alpha k^{(\tau - \tau_1)}}\left[I_o\ (b/2)\sqrt{\tau_1^2 - k_1^2}\right] - I_o\left[(b/2)\sqrt{\tau_1^2 - k_1^2}\right]d\tau_1 \tag{23}$$

Dla $0 \leqslant \tau < k_1$ lub $0 \leqslant \tau < k_2$ odpowiednie wyrażenia znikają.

4.1.1.2. Zmodyfikowany problem brzegowy

Dla $c_1 \to \infty$ i $t_{1,o}' = 0$ otrzymujemy funkcję czasową

$$t_1(r,\tau) - t_{1,o} = (H\, a/r)(\theta - t_{1,o}) \Big\{ 2\pi^{-1/2}\, \bar{a}_1^{1/2}\, \tau^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \Big[e^{-(1/4)(a-r)^2/\bar{a}_1\tau} - e^{-(1/4)(a+r)^2/\bar{a}_1\tau} \Big] - (a-r) \cdot$$

$$\cdot \operatorname{Erfc}\Big[(1/2)(a-r)/\sqrt{\bar{a}_1\tau}\Big] + (a+r) \cdot \operatorname{Erfc}\Big[(1/2)(a+r)/\sqrt{\bar{a}_1\tau}\Big] \Big\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (H\, a/r) A_k \cdot \int_0^{\tau} \sqrt{\bar{a}_1}\, \pi^{-1/2}\, \tau_1^{-1/2} \Big\{ e^{-(1/4)(a-r)^2/a_1\tau_1} -$$

$$- e^{-1/4)(a+r)^2/\bar{a}_1\tau_1} \Big\} e^{\alpha_k(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1, \tag{24}$$

przy czym

$$\operatorname{Erfc} x = 1 - \operatorname{Erf} x = (2/\sqrt{\pi}) \int_x^{\infty} e^{-x^2}\, dx \tag{25}$$

$$\operatorname{Erf} x = (2/\sqrt{\pi}) \int_x^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

4.1.2. Przypadek $H\, a - 1 = 0$

Z (20) otrzymujemy

$$T_1(r,p) - t_{1,o}/p - t_{1,o}'/c_1^2\, q^2 = \sum_{u=1}^{\infty} (1)^{n+1} \Big\{ e^{-q\,[(2n-1)a - r]} -$$

$$- e^{-q\,[(2n-1)a + r]} \Big\} (p\, T(p) - t_{1,o}) a\, H/r\, p\, q - t_{1,o}'\, a\, H \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \Big\{ e^{-q[(2n-1)a-r]} - e^{-q\,[(2n-1)a+r]} \Big\} / c_1^2\, r\, q^2 \tag{26}$$

Występują tu wyrażenia podobne jak w (21), więc postać funkcji czasowej jest podobna jak w tym przypadku.

4.1.3. q a bardzo duże, H a − 1 nie do zaniedbania

Transformata rozwiązania posiada następującą postać

$$T_1(r,p) - t_{1,0}/p - t_{1,0}'/c_1^2 q^2 = a^2\, H(p\,T(p) - t_{1,0})(e^{-q(a-r)} -$$

$$- e^{-q(a+r)})/r\, p(a\,q + H\,a - 1) - t_{1,0}'(e^{-q(a-r)} - e^{-q(a+r)})a^2/$$

$$/c_1^2\,(a\,q + H\,a - 1)q^2\,r \tag{27}$$

Dla $\tau \geqslant (a-r)/c_1$ i $\tau \geqslant (a+r)/c_1$ otrzymujemy

$$t_1(r,\tau) - t_{1,0} - (\bar{a}_1/c_1^2)t_{1,0}'(1 - e^{-(c_1^2/\bar{a}_1)\tau}) =$$

$$= [a\,c_1\,H(\theta - t_{1,0})/r]\cdot\int_0^{\tau} e^{-(b/2)\tau}\,d\tau\,\cdot$$

$$< e^{-(H\,a-1)(c_1/a)(\tau-(a-r)/c_1)} - e^{-(H\,a-1)(c_1/a)(\tau-(a+r)/c_1)}$$

$$+ (b/2)\int_0^{\tau} I_1(u)du\,\Big[e^{-(H\,a-1)(c_1/a)\sqrt{(\tau-(a-r)/c_1)^2 - u^2}} -$$

$$- e^{-(H\,a-1)(c_1/a)\sqrt{(\tau-(a+r)/c_1)^2 - u^2}}\Big]> + \int_0^{\tau}\Big\{\sum_{k=1}^{n}(a\,c_1\,H\,A_k/r)\,\cdot$$

$$\cdot\, e^{\alpha_k(\tau-\tau_1)}\cdot e^{-(b/2)\tau_1} + (H\,a\,t_{1,0}'\,\bar{a}_1/c_1\,r)(1-e^{-(c_1^2/\bar{a}_1)(\tau-\tau_1)})\Big\}\cdot$$

$$\cdot < e^{-(H\,a-1)(c_1/a)(\tau_1-(a-r)/c_1)} -$$

$$- e^{-(H\,a-1)(c_1/a)(\tau_1-(a+r)/c_1)} + (b/2)\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\tau}\Big[e^{-(H\,a-1)(c_1/a)\sqrt{(\tau_1-(a-r)/c_1)^2 - u^2}} -$$

$$- e^{-(H\,a-1)(c_1/a)\sqrt{(\tau_1-(a+r)/c_1)^2 - u^2}}\Big] I_1(u)\,du > d\,\tau_1 \tag{28}$$

gdzie:

$I_1(x($ – zmodyfikowana funkcja Bessela.

Dla $0 \leq \tau < (a-r)/c_1$ lub $0 \leq \tau < (a+r)/c_1$ odpowiednie wyrazy znikają.

4.1.4. Funkcje czasowe dla zmodyfikowanego problemu brzegowego

Dla $c_1 \to \infty$ i $t_{1,o}' = 0$ otrzymujemy następującą funkcję czasową

$$t_1(r,\tau) - t_{1,o} = (H\,a^2/r)(\theta - t_{1,o})\sqrt{\bar{a}_1/a}\left\{\int_0^{\tau} k\,\pi^{-1/2}\tau^{-1/2}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[e^{-(1/4)(a-r)^2/\bar{a}_1\tau} - e^{-(1/4)(a+r)^2/\bar{a}_1\tau}\right] - \sqrt{\bar{a}_1/a}\,(H\,a-1)\cdot$$

$$\cdot\, e^{\bar{a}_1(H\,a-1)^2\tau/a^2}\cdot\left[e^{(r-a)(H\,a-1)/a}\cdot\right.$$

$$\cdot\,\mathrm{Erfc}\left[(1/2)(r-a)/\sqrt{\bar{a}_1\tau}+(\sqrt{\bar{a}_1/a})(H\,a-1)\tau^{1/2}\right] - e^{(r+a)(H\,a-1)/a}\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\,\mathrm{Erfc}\,(1/2)\left[(r+a)/\sqrt{\bar{a}_1\tau}+(\sqrt{\bar{a}_1/a})(H\,a-1)\tau^{1/2}\right]\right]\right\}d\tau + \sum_{k=1}^{n}(Ha^2/r)A_k$$

$$\cdot\int_0^{\tau} e^{\alpha_k(\tau-\tau_1)}\cdot\left\{\pi^{-1/2}\tau^{-1/2}\left[e^{-(1/4)(a-r)^2/\bar{a}_1\tau_1} -\right.\right.$$

$$\left. - e^{-(1/4)(a+r)^2/\bar{a}_1\tau_1}\right] - (\sqrt{\bar{a}_1/a})(H\,a-1)e^{\bar{a}_1(H\,a-1)^2\tau_1/a^2}\cdot$$

$$\cdot\left]e^{(r-a)(H\,a-1)/a}\cdot\mathrm{Erfc}\left[(1/2)(r-a)/\sqrt{\bar{a}_1\tau_1}+(\sqrt{\bar{a}_1/a})(Ha-1)\tau_1^{1/2}\right]\right.$$

$$- e^{(r+a)(H\,a-1)/a}\cdot\mathrm{Erfc}\left[(1/2)(r+a)/\sqrt{\bar{a}_1\tau_1}+(\sqrt{\bar{a}_1/a})(H\,a-1)\cdot\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\,\tau_1^{1/2}\right]\right]\right\}d\tau_1 \qquad (29)$$

5. Dyskusja otrzymanych rozwiązań

Nie wchodząc w szczegółowe postaci rozwiązań widać, że rozwiązania dla problemu zmodyfikowanego są ważne dla $\tau > 0$, natomiast rozwiązania dyskutowanego problemu mają w argumencie wyrażenia $\tau - (a \pm r)/c_1$, jeżeli te wyrażenia są dodatnie, natomiast są równe zeru dla $0 \leqslant \tau < (a \pm r)/c_1$. W tym wyraża się fizykalna natura problemu. Zmiana temperatury następuje wzdłuż przewodnika z prędkością c_1. W zmodyfikowanym problemie temperatura zmienia się od pierwszej chwili w całym przewodniku, bez względu na jego wymiary.

6. Porównanie równania (6) z równaniem termosprężystym

W termosprężystości [7] wyprowadza się w miejsce (6) następujące równanie

$$\partial^4[r\ t(r,\tau)]\ /\partial r^4 - (1/c_1^2)\partial^4[r\ t(r,\tau)]\ /\ \partial r^2 \partial\tau^2 -$$

$$-(1/\bar{a}_1)\tau^3[r\ t(r,\tau)]/\partial\tau\ \partial r^2 = (m\eta + 1/\bar{a}_1 - c_1^2)\ \cdot$$

$$\cdot\ \partial^3[r\ t(r,\tau)]\ /\partial\tau^3 \tag{30}$$

gdzie:

c_1 – prędkość podłużnych fal sprężystych,
$\bar{a}_1$ – współczynnik przewodzenia temperatury,
m, η – współczynniki równań sprężystego i cieplnego.

Równanie (30) jest czwartego rzędu. To wprowadza duże trudności, jeżeli chcemy je rozwiązać metodą powyższą. Równanie (6) nadaje się do tego lepiej. Z [7] wynika, że różnica między prędkością ruchu ciepła i prędkością ruchu podłużnych fal sprężystych nie jest duża. Można więc powiedzieć, że zastąpienie równania (30) przez równanie (6) nie wprowadza dużej różnicy w rozwiązaniach. Wynika to z następującego rozważania. Jeżeli w równaniu (30) opuścimy wyraz prawej strony, otrzymujemy dwukrotnie zróżniczkowane względem r równanie (6), ze zmienionym sensem prędkości c_1.

LITERATURA

[1] BIOT M.A.: Journ. Appl. Phys. 27, 1956.

[2] BOSWORTH R.C.L.: Heat transfer phenomena, Ass. Gen. Publ., Sydney, przekład rosyjski, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1957.

[3] DANIŁOWSKAJA W.I.: Prikładnaja Matem. i Mech. XIV, no 3, 316, 1950.

[4] ŁYKOW A.W.: Teoria tiepłoprowodnosti, Gos. Izd. T.T. Lit. Moskwa 1952.

[5] ŁYKOW A.W.: Primienienie metodow termodynamiki nieobratimych processow k issledowanii tiepło i masso-obmiena. Inż. Fiz. Żurn. 1965, X, no 3, 287.

[6] MORSE P.M., FESHBACH H.: Methods of theoretical physics, I Mc Graw Hill, N. York 1953, ros. Izd. Inostr. Lit. Moskwa 1958.

[7] NOWACKI W.: Termosprężystość, PWN, Warszawa 1961.

[8] Tables of integral transforms, ed. Erdelyi, I. Mc Graw Hill, N. York 1954.

Dodatek

1. Wyprowadzenie równania (23) i (24)

Transformata Laplace'a równania (23) może być napisana w następującej postaci

$$T_1(r,p) - t_{1,0}/p - t_{1,0}/c_1^2\, q^2 = (H\, a/r)(\theta - t_{1,0})(I - II) -$$

$$- (a\, H\, t_{1,0}'/c_1^2\, r)(III - IV) + \sum_{k=1}^{u} (H\, a/r) A_k (V - VI) \qquad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} I &= D_1/p \\ II &= D_2/p \\ III &= D_1/q^2 \\ IV &= D_2/q^2 \\ V &= D_1/(p - \alpha_k) \end{aligned} \qquad (2)$$

$$VI = D_2/(p - \alpha_k)$$

$$D_{1,2} = e^{-q(a \pm r)}/q$$

Podobnie dla równania (24) otrzymujemy

$$T_1(r,p) - t_{1,o}/p = (H\, a/r)(\theta - t_{1,o})(I-II) + \sum_{k=1}^{n} (H\, a/r)(V-VI) \tag{3}$$

Oznaczenia, jak wyżej.

Funkcje czasowe dla pewnych transformat są znane [8], niektóre natomiast transformaty mogą być napisane w zmienionej postaci. Na przykład V jest iloczynem dwu czynników, dla których funkcje czasowe są znane. Stosując następnie twierdzenie o splocie można wyznaczyć żądaną funkcję czasową.

2. Wyprowadzenie równania (28) i (29)

Można napisać pierwsze równanie w następującej postaci

$$T_1(r,p) - t_{1,o}/p - t_{1,o}/c_1^2\, q^2 = (H\, a^2/r)(\theta - t_{1,o})(I - II)$$

$$- (H\, a^2\, t_{1,o}/c_1^2\, r)(III - IV) + \sum_{k=1}^{n} (H\, a^2/r) A_k (V - VI) \tag{4}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} I &= E_1/p\, F \\ II &= E_2/p\, F \\ III &= E_1/q^2\, F \\ IV &= E_2/q^2\, F \\ V &= E_1/(p - \alpha_k) F \\ VI &= E_2/(p - \alpha_k) F \\ E_{1,2} &= e^{-q(a \pm r)} \\ F &= q\, a + H\, a - 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Drugie równanie można doprowadzić do następującej postaci

$$T_1(r,p) - t_{1,o}/p = \left[H\,a^2(\theta - t_{1,o})/r\right](I - II) + \sum_{k=1}^{n} (H\,a^2/r)A_k \cdot$$
$$\cdot\,(V - VI) \tag{6}$$

Oznaczenia jak poprzednio.

Wyrażenia typu I mogą być wyznaczone, korzystając z twierdzenia 6 [8] mianowicie, jeżeli

$$L^{-1}\left\{g(p)\right\} = f(\tau) \tag{7}$$

wtedy

$$L^{-1}\left\{g(s)\right\} = f(\tau) + \alpha\int_0^{\tau} f\left[(\tau^2 - u^2)^{1/2}\right] I_1(u)\,du \tag{8}$$

gdzie:

$$s = \sqrt{p^2 - \alpha^2} \tag{9}$$

Wyrażenia I–VI mogą być wyznaczone podobnie jak w poprzednim przypadku.

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕПЛОТЫ НА ЯВЛЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ

Р е з ю м е

В работе автор рассматривает проблему, как изменяются решения уравнения теплопроводности, если вместо везде использованного уравнения (I), отвечающего бесконечной скорости движения теплоты, перейдется к формуле (2), когда скорость движения теплоты конечная, на примере однокомпонентной системы со сферической симметрией, обменяющей с окружающей средой с изменяющейся по уравнению (5) температурой, с постоянными начальными условиями. Проблема решена при помощи рядов Фурье, когда выступают только незначительные формальные изменения и методом функции Грина, когда решение очень усложняется.

THE INFLUENCE OF THE FINITE HEAT PROPAGATION VELOCITY ON THE HEAT CONDUCTING PHENOMENA IN A SPHERICAL ONE-COMPONENT SYSTEM

S u m m a r y

In the paper the author discusses the problem of the differences between the solutions of heat conduction equations, when the commonly known equation (1) has been used with infinite heat propagation velocity and the equation (2), where the propagation velocity is finite, for the one-component system with spherical symmetry, exchanging heat with the surrounding medium with the temperature varying following the equation (5), with constant initial conditions. The problem has been solved by means of Fourier series method, where the differences between the solutions are not great and with Green function method, where the solution is very complicated.