

ANDRZEJ KORCZAK, JERZY ROKITA  
Katedra Pomp i Silników Wodnych

## NIEKTÓRE PROBLEMY WSPÓŁPRACY POMPY WIROWEJ ZE ZBIORNIKAMI ZAMKNIĘTYMI

**Streszczenie.** W pracy rozpatrzono układy pompowe współpracujące ze zbiornikami zamkniętymi. Przeanalizowano czas napełniania i opróżniania zbiornika, zużycie energii i sprawność pracy układu.

Podano wnioski zmierzające do uzyskania korzystnych efektów pracy. Zamieszczono przykład liczbowy.

### 1. Wstęp

Częstym przypadkiem, występującym w praktyce jest współpraca pompy wirowej ze zbiornikiem zamkniętym, w którym nad zwierciadłem cieczy panuje ciśnienie (na ogół różne od ciśnienia otoczenia) zmienne w czasie pracy pompy zainstalowanej w układzie. W trakcie pracy pompy napełniającej zbiornik następuje zmiana (podnoszenie) poziomu cieczy w zbiorniku połączona z jednoczesnym sprężaniem gazu (najczęściej powietrza) nad zwierciadłem cieczy. Po sprężeniu gazu znajdującego się nad zwierciadłem cieczy w zbiorniku zawarta w nim energia może zostać wykorzystana do przetłoczenia cieczy ze zbiornika w określone miejsce. Na tej zasadzie działają wszelkiego typu instalacje hydroforowe [1]. Ze względu na szeroki zakres stosowania tego typu układów, zagadnienie współpracy pompy wirowej ze zbiornikiem zamkniętym zasługuje na rozpatrzenie.

Założono [2], że w układzie pompowym zainstalowana jest pompa wirowa pobierająca ciecz z otwartego zbiornika dolnego o stałym poziomie zwierciadła cieczy.

Charakterystykę przepływu pompy [2] opisano w zakresie pracy układu równaniem:

$$H_p = H_o - AQ^2 \quad (1)$$

gdzie:

- $H_p$  - użyteczna wysokość podnoszenia pompy,
- $H_o, A$  - stałe charakterystyczne dla danej pompy,
- $Q$  - wydajność.

Charakterystykę mocy na wale pompy opisano w zakresie pracy układu równaniem liniowym:

$$N = N_o + BQ \quad (2)$$

gdzie:

- $N$  - moc na wale pompy,
- $N_o, B$  - stałe charakterystyczne dla danej pompy.

Charakterystykę instalacji pompowej opisano analitycznie równaniem:

$$H_r = H_{st} + H_{dy} \quad (3)$$

gdzie:

$H_r$  - wysokość podnoszenia układu pompowego,

$H_{st}$  - statyczna wysokość podnoszenia układu,

$H_{dy}$  - dynamiczna wysokość podnoszenia układu.

Statyczną wysokość podnoszenia określono wzorem:

$$H_{st} = H_g + \frac{p_g - p_d}{\gamma} \quad (4)$$

gdzie:

$H_g$  - geometryczna wysokość podnoszenia układu pompowego,

$p_g$  - ciśnienie nad zwierciadłem cieczy w zbiorniku górnym,

$p_d$  - ciśnienie nad zwierciadłem cieczy w zbiorniku dolnym,

$\gamma$  - ciężar właściwy cieczy.

Dynamiczną wysokość podnoszenia układu opisano równaniem:

$$H_{dy} = cq^2 \quad (5)$$

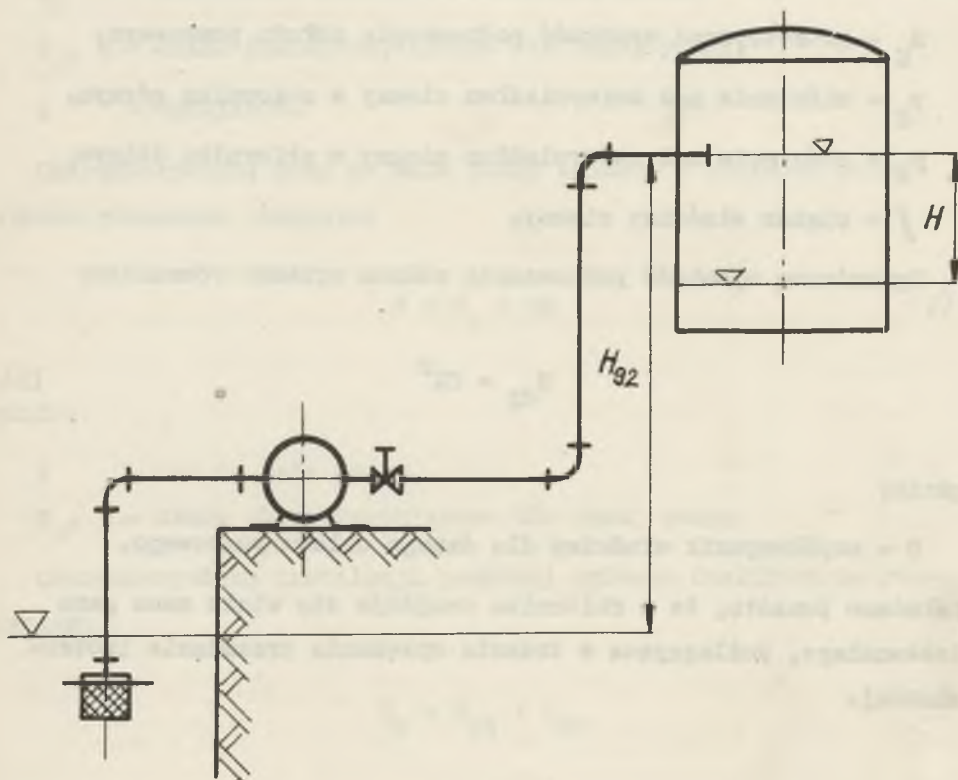
gdzie:

$c$  - współczynnik właściwy dla danego układu pompowego.

Założono ponadto, że w zbiorniku znajduje się stała masa gazu doskonałego, podlegająca w trakcie sprężania przemianie izotermicznej.

## 2. Czas napełniania zbiornika

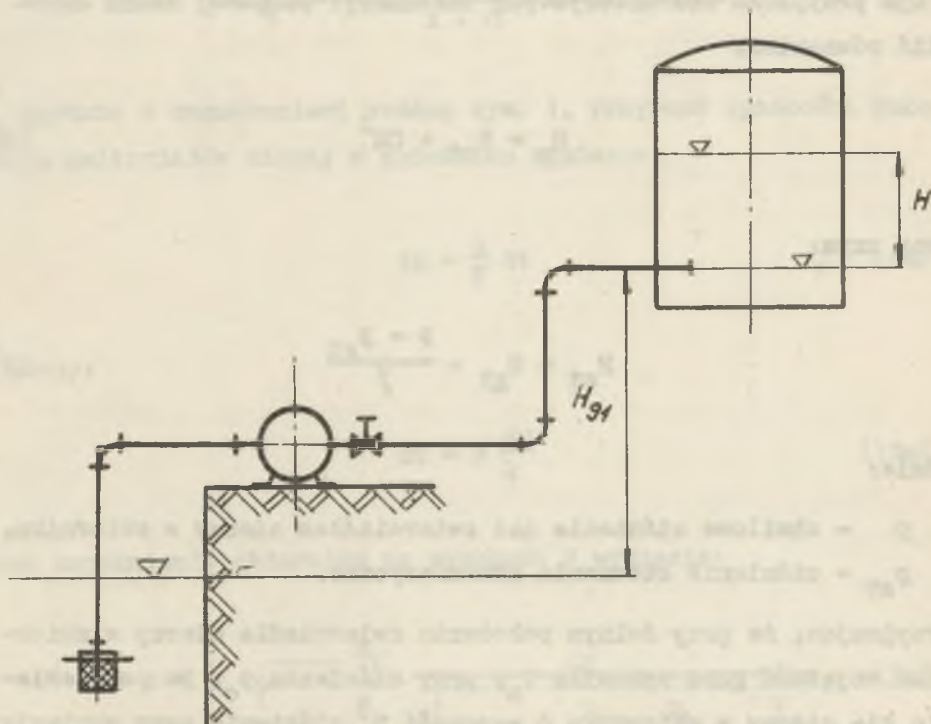
Napełnianie zbiornika zamkniętego cieczą pompowaną do określonej wysokości może zostać dokonane nawet przy użyciu tej samej pompy przy ustalonej lub zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia układu pompowego. Napełnianie zbiornika przy stałej geometrycznej wysokości podnoszenia realizowane jest w przypadku doprowadzenia wypływu przewodu tłocznego co najmniej do wysokości górnego poziomu napełnienia zbiornika cieczą (rys. 1). Natomiast napełnianie zbiornika cieczą przy zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia układu realizowane jest w przypadku doprowadzenia przewodu



Rys. 1. Układ pompowy ssąco-tłoczący ze stałą geometryczną wysokością podnoszenia



tkoczego bezpośrednio przy jego dnie (rys. 2) lub poniżej dolnego poziomu cieczy w zbiorniku. Poniższe rozwiązania przeprowadzono przy założeniu, że w trakcie napełniania nie występuje wypływ cieczy ze zbiornika.



Rys. 2. Układ pompy ssąco-tłoczący ze zmienną geometryczną wysokością podnoszenia

Celowe jest przeanalizowanie czasów pracy takich samych pomp, napełniających identyczne zbiorniki przy założeniu, że pompy zabudowane są w dwóch różnych układach (wg rys. 1 i 2), mających

jednak identyczne równania dynamicznych wysokości podnoszenia (5). Charakterystykę pompy w obu przypadkach opisano równaniem (1).

### 2.1. Stała geometryczna wysokość podnoszenia

W tym przypadku charakterystykę instalacji pompowej można określić równaniem:

$$H_r = H_{st} + CQ^2 \quad (6)$$

przy czym:

$$H_{st} = H_{g2} + \frac{p - p_{at}}{\gamma} \quad (7)$$

gdzie:

- $p$  - chwilowe ciśnienie nad zwierciadłem cieczy w zbiorniku,
- $p_{at}$  - ciśnienie otoczenia atmosferyczne.

Przyjmując, że przy dolnym położeniu zwierciadła cieczy w zbiorniku objętość gazu wynosiła  $V_0$ , przy ciśnieniu  $p_0$ , po podniesieniu się cieczy w zbiorniku o wysokość  $H$ , ciśnienie gazu wyniesie:

$$p = p_0 \frac{V_0}{V_0 - FH} \quad (8)$$

gdzie:

- $F$  - powierzchnia przekroju poprzecznego zbiornika, przyjęta jako stała.

Z zależności (1), (6), (7), (8) wynika, że chwilowa wydajność pompy wyniesie:

$$Q = \sqrt{\frac{H_0 - H_{g2} + \frac{P_{at}}{\gamma} - \frac{P_0}{\gamma} \cdot \frac{V_0}{V_0 - FH}}{A + C}} \quad (9)$$

Zgodnie z oznaczeniami według rys. 1, przyrost wysokości położenia zwierciadła cieczy w zbiorniku wyniesie:

$$dH = \frac{dV}{F} dt \quad (10)$$

a wtedy:

$$dt = F \frac{dH}{Q} \quad (10a)$$

Czas napełniania zbiornika na wysokość H wyniesie:

$$t = F \int_0^H \frac{dH}{\sqrt{A + C} \sqrt{H_0 - H_{g2} + \frac{P_{at}}{\gamma} - \frac{P_0}{\gamma} \cdot \frac{V_0}{V_0 - FH}}} \quad (11)$$

Po scałkowaniu otrzymano:

$$t = \frac{V_0 \sqrt{A+C}}{H_z} \left[ Y(0) - Y(H) + \frac{P_0}{2\gamma \sqrt{H_z}} \ln \frac{Y(H) + 2 \frac{F}{V_0} \sqrt{H_z} Y(H)}{Y(0) + 2 \frac{F}{V_0} \sqrt{H_z} Y(0)} \right] \quad (12)$$

gdzie:

$$H_z = H_0 - H_{g2} + \frac{P_{at}}{\gamma} \quad (12a)$$

$$Y(H) = \left(\frac{P}{V_0}\right)^2 H_z H^2 - \frac{P}{V_0} \left(2H_z - \frac{P_0}{\gamma}\right) H + \left(H_z - \frac{P_0}{\gamma}\right) \quad (12b)$$

$Y(H)$  - jest pomocniczą funkcją wprowadzoną w celu uproszczenia zapisu rozwiązania całki (10).

Odpowiednio:

$$Y'(H) = 2 \left(\frac{P}{V_0}\right)^2 H_z H - \frac{P}{V_0} \left(2 H_z - \frac{P_0}{\gamma}\right) \quad (12c)$$

Jeżeli przyjąć, że charakterystyka przepływu pompy, opisana zależnością (1) jest zgodna z rzeczywistym przebiegiem charakterystyki pompy w przedziale wydajności  $[Q_I, Q_{II}]$ , to warunkiem stosowalności wzoru (11) jest spełnienie układu nierówności:

$$Q_I < \sqrt{\frac{H_0 - H_{g2} + \frac{P_{at}}{\gamma} - \frac{P_0}{\gamma} \cdot \frac{V_0}{V_0 - PH}}{A + C}} \quad (13a)$$

$$Q_{II} \geq \sqrt{\frac{H - H_{g2} + \frac{P_{at} - P_0}{\gamma}}{A + C}} \quad (13b)$$



2.2. Zmienna geometryczna wysokość podnoszenia

W tym przypadku charakterystykę instalacji pompowej opisano również równaniem (6), przy czym

$$H_{st} = H + H_{g1} + \frac{p_{at}}{\gamma} \quad (14)$$

Ciśnienie w zbiorniku można również opisać równaniem (8).

Zatem chwilowa wydajność pompy wyniesie:

$$Q = \sqrt{\frac{H_0 - H_{g1} - H + \frac{p_{at}}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} \cdot \frac{V_0}{V_0 - FH}}{A + C}} \quad (15)$$

Zgodnie z oznaczeniami według rys. 2, przyrost wysokości położenia zwierciadła cieczy w zbiorniku można opisać równaniem (10), a wtedy czas napełniania zbiornika na wysokość H, wyniesie:

$$t = F \sqrt{A + C} \int_0^H \frac{dH}{\sqrt{H_0 - H_{g1} - H + \frac{p_{at}}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} \cdot \frac{V_0}{V_0 - FH}}} \quad (16)$$

Wprowadzając podstawienia:

$$H_B = H_0 - H_{g1} + \frac{p_{at}}{\gamma} - \frac{V_0}{F} \quad (17a)$$

$$X = 1 - \frac{F}{V_0} H \quad (17b)$$

zależność (16) można przedstawić w następujący sposób:

$$t = v_0 \sqrt{A+C} \int_0^1 \frac{xdx}{1 - \frac{F}{V_0} H \sqrt{\frac{V_0}{F} x^3 + H_z x^2 - \frac{P_0}{\gamma} x}} \quad (18)$$

lub [3]:

$$t = v_0 \sqrt{A+C} \int_0^1 \frac{xdx}{1 - \frac{F}{V_0} H \sqrt{\frac{V_0}{F} x(x-\alpha)(x-\delta)}} \quad (19)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{-H_z + \sqrt{H_z^2 + 4 \frac{V_0}{F} \frac{P_0}{\gamma}}}{2 \frac{V_0}{F}} \quad (20a)$$

$$\delta = \frac{-H_z - \sqrt{H_z^2 + 4 \frac{V_0}{F} \frac{P_0}{\gamma}}}{2 \frac{V_0}{F}} \quad (20b)$$

Zależność (19) można [4] przez zastosowanie podstawień:

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha - \delta}{x - \delta}} \quad (21a)$$

$$k^2 = \frac{-\delta}{\alpha - \delta} \quad (21b)$$

sprowadzić do postaci:

$$t = \frac{-2 \sqrt{FV_0(A+C)}}{\sqrt{\alpha - \delta}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \frac{\delta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{\alpha - \delta}{\sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] d\varphi \quad (22)$$

gdzie:

$$\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha - \delta}{1 - \frac{F}{V_0} H - \delta}} \quad (23a)$$

$$\varphi_2 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha - \delta}{1 - \delta}} \quad (23b)$$

Przez wykorzystanie [4] związku:

$$\int \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \int \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \quad (24)$$

można zależność (22) przedstawić w postaci:

$$t = \frac{2 \sqrt{FV_0(A+C)}}{\sqrt{\alpha - \delta}} \left[ \alpha F(k, \varphi) - (\alpha - \delta) E(k, \varphi) - (\alpha - \delta) \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \right]_{\varphi_2}^{\varphi_1} \quad (25)$$

gdzie:

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (26a)$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (26b)$$

są całkami eliptycznymi [3] pierwszego i drugiego rodzaju w postaci Legendre'a, które nie dadzą się wyrazić przez funkcje elementarne i ich wartości odczytuje się bezpośrednio z tablic.

Wielkość czasu napełniania zbiornika można również wyznaczyć na drodze obliczenia metodą numeryczną wartości całki (16) lub (18).

Jeżeli założyć, że charakterystyka przepływu pompy opisana zależnością (1) pokrywa się z przebiegiem rzeczywistej charakterystyki w przedziale wydajności  $[Q_I, Q_{II}]$ , to warunkiem stosowalności wzoru (25), jest spełnienie układu nierówności:

$$Q_I \leq \sqrt{\frac{H_0 - H_{g1} - H + \frac{P_{at}}{\gamma} - \frac{P_0}{\gamma} \cdot \frac{V_0}{V_0 - PH}}{A + C}} \quad (27a)$$

$$Q_{II} \geq \sqrt{\frac{H_0 - H_{g1} - H + \frac{P_{at}}{\gamma} - \frac{P_0}{\gamma}}{A + C}} \quad (27b)$$



### 3. Czas opróżniania zbiornika

Założono, że po napełnieniu zbiornika cieczą do górnego poziomu, następuje jego opróżnianie (wskutek wyzyskania energii sprężonego gazu) poprzez przewód rurowy o charakterystyce:

$$H_{pr} = H_{gp} + C_p Q^2 \quad (28)$$

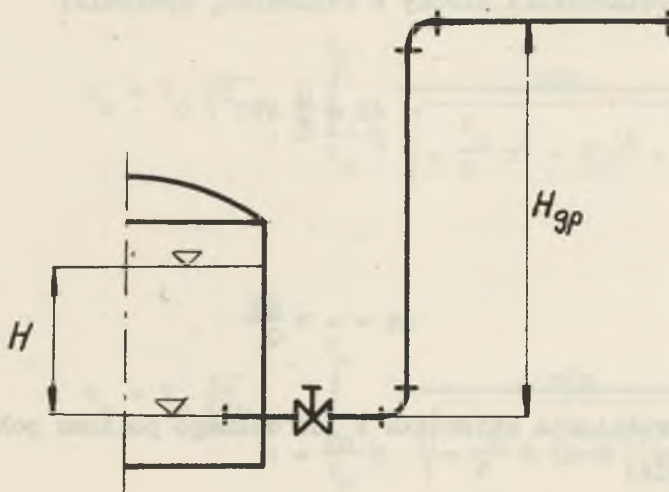
gdzie:

$H_{pr}$  - wysokość podnoszenia potrzebna do wywołania przepływu cieczy w przewodzie,

$H_{gp}$  - geometryczna wysokość podnoszenia przewodu,

$C_p$  - współczynnik charakterystyczny dla danego przewodu.

Schemat instalacji oraz niektóre oznaczenia przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Układ opróżniania zbiornika

Chwilowy stan przepływu cieczy w przewodzie rurowym ujmujemy równanie:

$$H + \frac{p - p_{at}}{\gamma} = H_{gp} + C_p Q^2 \quad (29)$$

gdzie:

$p$  - ciśnienie gazu w zbiorniku, opisane zależnością (8).

Chwilowe natężenie przepływu cieczy w przewodzie wyniesie:

$$Q = \sqrt{\frac{H - H_{gp} - \frac{p_{at}}{\gamma} + \frac{p_o}{\gamma} \cdot \frac{V_o}{V_o - FH}}{C_p}} \quad (30)$$

Zgodnie z oznaczeniami według rys. 3 obniżenie się wysokości położenia zwierciadła cieczy w zbiorniku, wyniesie:

$$- dH = \frac{Q}{F} dt \quad (31)$$

a wtedy

$$dt = - F \frac{dH}{Q} \quad (31a)$$

Czas opróżniania zbiornika  $t_o$  do dolnego poziomu położenia cieczy wyniesie:

$$t_o = -F \sqrt{C_p} \int_H^0 \frac{dH}{\sqrt{\frac{p_o}{\gamma} \cdot \frac{V_o}{V_o - FH} - H_{gp} - \frac{p_{at}}{\gamma}}} \quad (32)$$

lub

$$t_0 = F \sqrt{C_p} \int_0^H \frac{dH}{\sqrt{H + \frac{p_0}{\gamma} \cdot \frac{v_0}{v_0 - \beta H} - H_{gp} - \frac{p_{at}}{\gamma}}} \quad (33)$$

Wprowadzając podstawienia:

$$H_z = H_{gp} + \frac{p_{at}}{\gamma} - \frac{v_0}{F} \quad (34a)$$

$$x = 1 - \frac{F}{v_0} H \quad (34b)$$

Zależność (33) można przedstawić [3] następująco:

$$t_0 = v_0 \sqrt{C_p} \int_{1 - \frac{p_0}{v_0} H}^1 \frac{xdx}{\sqrt{-\frac{v_0}{F} x^3 - H_z x^2 + \frac{p_0}{\gamma} x}} \quad (35)$$

lub

$$t_0 = v_0 \sqrt{C_p} \int_{1 - \frac{p_0}{v_0} H}^1 \frac{xdx}{\sqrt{-\frac{v_0}{F} x(x-\alpha)(x-\delta)}} \quad (36)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{-H_x + \sqrt{H_x^2 + 4 \frac{V_0}{F} \cdot \frac{P_0}{\gamma}}}{2 \frac{V_0}{F}} \quad (37a)$$

$$\delta = \frac{-H_x - \sqrt{H_x^2 + 4 \frac{V_0}{F} \cdot \frac{P_0}{\gamma}}}{2 \frac{V_0}{F}} \quad (37b)$$

Zależności (36) i (39) można przez wprowadzenie podstawień [4]:

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha - x}{\alpha}} \quad (38a)$$

$$k^2 = \frac{\alpha}{\alpha - \delta} \quad (38b)$$

sprowadzić do następującej formy:

$$t_0 = -2 \sqrt{\frac{FV_0 C}{P}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha - \delta}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (39)$$



gdzie:

$$\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \quad (40a)$$

$$\varphi_2 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha + \frac{P}{V_0} H - 1}{\alpha}} \quad (40b)$$

Przez wykorzystanie związku [4]:

$$\int \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2} [E(k, \varphi) - (1 - k^2) F(k, \varphi)] \quad (41)$$

można zależność (39) przedstawić w postaci:

$$t_0 = 2 \sqrt{F V_0 C_p (\alpha - \delta)} [E(k, \varphi) - (1 - k^2) F(k, \varphi)]_{\varphi_2}^{\varphi_1} \quad (42)$$

gdzie:

$F(k, \varphi)$  i  $E(k, \varphi)$  określone są zależnościami (26a) i (26b).

Wielkość czasu opróżnienia zbiornika można również wyznaczyć na drodze obliczenia metodą numeryczną całki (33) lub (35).

Warunkiem stosowalności podanych zależności jest spełnienie nierówności:

$$\frac{P_0 - P_{at}}{\gamma} \geq H_{SP} \quad (43)$$

#### 4. Zużycie energii

W obu rozpatrywanych przypadkach (stała lub zmienna w czasie pracy geometryczna wysokość podnoszenia napełniania zbiornika), praca pompy odbywa się przy zmiennej w czasie wydajności.

Energię  $E$  zużytą przez pompę przy napełnianiu zbiornika cieczą na wysokość  $H$  określa zależność:

$$E = \int_0^t N dt \quad (44)$$

Wykorzystując zależności: (2) i (9a)

$$E = \int_0^H \left( N_0 \frac{H}{Q} + FB \right) dH \quad (45)$$

lub

$$E = FBH + N_0 \int_0^H \frac{dH}{Q} \quad (46)$$

i ostatecznie

$$E = FBH + N_0 t \quad (47)$$

gdzie:

$t$  - jest czasem napełniania zbiornika w danym przypadku, określonym zależnością (11) lub (25).

5. Średnia sprawność napełniania zbiornika

Średnią sprawnością  $\eta$  pracy układu pompowego, w którym pompa napełnia cieczą zbiornik zamknięty, jest stosunek pracy użytecznej  $L$  wykonanej przez układ do energii pobranej przez pompę:

$$\eta = \frac{L}{E} \quad (48)$$

Praca użyteczna, kosztem której może odbyć się późniejsze opróżnianie zbiornika w obu rozpatrywanych przypadkach napełniania zbiornika jest określona zależnością:

$$L = \int_0^t QH_{st} dt \quad (49)$$

Po wykorzystaniu związku (10)

$$L = \int_0^H F \int_0^H H_{st} dH \quad (50)$$

przy czym:

$$H_{st} = H + H_{g1} - \frac{p_{at}}{\gamma} + \frac{p_0}{\gamma} \cdot \frac{V_0}{V_0 - FH} \quad (51)$$

Zależność (51) jest słuszna tak w przypadku zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia, jak również i w przypadku stałej geometrycznej wysokości podnoszenia ( $H_g = H_{g2}$ ), gdyż podnoszenie pompowanej cieczy dodatkowo jeszcze na wysokość  $H = H_{g2} - H_{g1}$  w trakcie napełniania zbiornika nie jest efektem użytecznym.

Po wykorzystaniu związków (47 ÷ 51) sprawność napełniania zbiornika wyniesie:

$$\eta = \frac{H_{g1} + \frac{1}{2} H - \frac{P_{at}}{\gamma} + \frac{P_0}{\gamma} \cdot \frac{V_0}{FH} \left| \ln\left(1 - \frac{P}{V_0} H\right) \right|}{B + \frac{H_0 t}{HF}} \quad (52)$$

gdzie:

$t$  - jest czasem napełniania zbiornika w danym przypadku.

#### 6. Wpływ warunków pracy pompy wirowej na parametry współpracy

Jak wspomniano, napełnianie cieczą zbiornika zamkniętego może odbywać się przy stałej lub zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia układu pompowego.

Z analizy zależności (11) i (16) wynika, że czas napełniania zbiornika zamkniętego w przypadku zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia układu jest krótszy niż w przypadku stałej geometrycznej wysokości podnoszenia układu, gdyż przy tym samym przedziale całkowania, funkcja podcałkowa w zależności (16) osiąga mniejsze wartości od funkcji podcałkowej w zależności (11), w całym przedziale całkowania. Różnica między czasami napełniania przy stałej lub zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia układu zwiększa się w miarę wzrostu wartości wyrażenia:

$$\frac{\gamma}{P_0} \left(1 - \frac{P}{V_0}\right) H$$

Zwiększanie się tej wartości jest powodowane zwiększaniem się wpływu zbednego pompowania cieczy na wysokość ( $H_{g2} - H_{g1} - H$ ) w trakcie procesu napełniania zbiornika.



Całkowity czas potrzebny na napełnienie i opróżnienie zbiornika można obliczyć jako sumę czasów napełniania i opróżniania.

W zależności (47) wynika, że zużycie energii przez pompę w trakcie napełniania zbiornika cieczą jest mniejsze w przypadku pracy pompy przy zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia układu, a oszczędność w zużyciu energii w porównaniu z przypadkiem pracy pompy przy stałej wysokości podnoszenia jest proporcjonalna do różnicy czasów napełniania  $\Delta t$ , i wyniesie:

$$\Delta E = N_o \Delta t \quad (53)$$

Jedynie w bardzo wyjątkowych przypadkach, gdy charakterystyka mocy na wale pompy jest bardzo stroma ( $N_o < 0$ ) zużycie energii w przypadku pracy pompy przy stałej geometrycznej wysokości podnoszenia układu pompowego jest mniejsze.

Z zależności (52) wynika, że średnia sprawność napełniania zbiornika osiąga wyższą wartość w przypadku pracy pompy przy zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia układu.

Przy założeniu, że efektem pracy rozpatrywanego układu pompowego jest transport cieczy na wysokość  $(H_{g1} + H_{gp})$  (przy wykorzystaniu energii sprężonego gazu w zbiorniku), można wprowadzić pojęcie średniej sprawności pracy układu  $\eta_u$ , którą można określić z wzoru:

$$\eta_u = \frac{\gamma FH(H_{g1} + H_{gp})}{E} \quad (54)$$

lub

$$\eta_u = \frac{\gamma (H_{g1} + H_{gp})}{B + \frac{N_o t}{FH}} \quad (55)$$

Z powyższej zależności wynika, że średnia sprawność pracy układu osiąga korzystniejszą wartość w przypadku pracy pompy przy zmiennej wartości geometrycznej wysokości podnoszenia układu.

W przeprowadzonych rozważaniach wykazano wyższość stosowania układów pompowych, w których pompa pracuje przy zmiennej w czasie geometrycznej wysokości podnoszenia, napełniając cieczą zbiornik zamknięty. Różnice w efektach pracy w obu rozpatrywanych przypadkach są zależne od szeregu wielkości dotyczących układu.

W przeprowadzonych rozważaniach nie uwzględniono wpływu bezwładności cieczy na wielkość czasu pracy pompy (i czasu opróżniania zbiornika). Przy dłuższych czasach pompowania i opróżniania wpływ ten jest niewielki i możliwy do pominięcia, przy zachowaniu praktycznej dokładności obliczeń. W obu rozpatrywanych przypadkach wielkość popełnionego w ten sposób błędu jest tego samego rzędu.

W rozważaniach założono, że charakterystyki dynamiczne  $H_{dy} = f(Q)$  układów pompowych w których ta sama pompa pracuje przy stałej lub zmiennej w trakcie pracy geometrycznej wysokości podnoszenia układu pompowego, są identyczne. Założenie takie można przyjąć, gdyż błędy będą nieznaczące.

Przytoczone rozważania i wnioski mogą zostać wykorzystane przy konstrukcji i obliczeniach układów pompowych, w których pompa wirowa napełnia cieczą zbiornik zamknięty.

## 7. Przykład liczbowy

Porównać warunki pracy pompy wirowej odśrodkowej typu ON-65, napełniającej zbiornik zamknięty o przekroju  $F = 5 \text{ m}^2$  na wysokość  $H = 1 \text{ m}$ , wodą o ciężarze właściwym  $\gamma = 9806,65 \text{ N/m}^3$  ( $= 1000 \text{ kg/m}^3$ ) przy ustalonej i zmiennej geometrycznej wysokości podno-

szenia. Wielkość geometrycznej wysokości podnoszenia odpowiadająca dolnemu poziomowi cieczy w zbiorniku wynosi  $H_{g1} = 2$  m. Początkowe ciśnienie powietrza w zbiorniku wynosi  $p_o = 3,7$  bar (=3,76at) wartość ciśnienia otoczenia założono  $p_{at} = 1$  bar (= 1,019 at). Początkowa objętość powietrza w zbiorniku wynosi  $V_o = 20$  m<sup>3</sup>.

Charakterystykę instalacji pompowej określono równaniem:

$$H_r = H_g + 14580 Q^2$$

gdzie: Q wyrażone jest w m<sup>3</sup>/s.

Charakterystykę przepływu pompy QN-65 [2] opisano w zakresie wysokości podnoszenia od 27 do 40 m równaniem:

$$H = 45,238 - 71152 Q^2$$

W przypadku umieszczenia wypływu przewodu tłocznego do zbiornika na poziomie  $H_{g2} = H_g + H = 3$  m, czas napełnienia zbiornika obliczono według zależności (11), przy czym:

$$H_z = H_o - H_{g2} + \frac{p_{at}}{\gamma} = 45,238 - 3 + 10 = 52,238 \text{ m}$$

$$Y(1) = \left(\frac{F}{V_o}\right)^2 H_z H^2 - \frac{F}{V_o} \left(2H_z - \frac{p_o}{\gamma}\right)H + \left(H_z - \frac{p_o}{\gamma}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{20}\right)^2 52,238 \cdot 1^2 - \frac{5}{20} (2 \cdot 52,238 - 10) 1 +$$

$$+ 52,238 - 10 = 1,591$$

$$Y(0) = H_z - \frac{P_0}{\gamma} = 52,238 - 37 = 15,238$$

$$Y'(1) = 2\left(\frac{P_0}{V_0}\right)^2 H_z H - \frac{P_0}{V_0} \left(2H_z - \frac{P_0}{\gamma}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{5}{20}\right)^2 52,238 \cdot 1 - \frac{5}{20}(2 \cdot 52,238 - 37) = -10,32$$

$$Y'(0) = -\frac{P_0}{V_0} \left(2H_z - \frac{P_0}{\gamma}\right) = -\frac{5}{20}(2 \cdot 52,238 - 37) = -16,85$$

$$t = v_0 \sqrt{A+C} \frac{1}{H_z} \left[ \sqrt{Y(0)} - \sqrt{Y(1)} \right] + \frac{P_0}{2\gamma \sqrt{H_z}} \ln \frac{Y'(H) + 2 \frac{P_0}{V_0} \sqrt{H_z Y(H)}}{Y'(0) + 2 \frac{P_0}{V_0} \sqrt{H_z Y(0)}} =$$

$$= 20 \sqrt{14580 + 73152} \frac{1}{52,238} \left[ \sqrt{15,238} - \sqrt{1,591} \right] + \frac{37}{2 \sqrt{52,238}}$$

$$\ln \frac{-10,32 + 2 \frac{5}{20} \sqrt{52,238 \cdot 1,591}}{-16,55 + 2 \frac{5}{20} \sqrt{52,238 \cdot 15,238}} = 509 \text{ s.}$$

W przypadku umieszczenia wypływu przewodu tłocznego do zbiornika poniżej zwierciadła wody w położeniu dolnym, czas napełniania zbiornika obliczono według zależności (25);



przy czym:

$$H_z = H_0 - H_{g1} + \frac{P_{at}}{\gamma} - \frac{V_0}{\gamma} = 45,238 - 2 + 10 - \frac{20}{5} = 49,238 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{-H_z + \sqrt{H_z^2 + 4 \frac{V_0 P_0}{F \gamma}}}{2 \frac{V_0}{F}} = \frac{-49,238 + \sqrt{49,238^2 + 4 \frac{20}{5} 37}}{2 \cdot \frac{20}{5}} = 0,709$$

$$\delta = \frac{-H_z - \sqrt{H_z^2 + 4 \frac{V_0 P_0}{F \gamma}}}{2 \frac{V_0}{F}} = \frac{-49,238 - \sqrt{49,238^2 + 4 \frac{20}{5} 37}}{2 \cdot \frac{20}{5}} = -13,0185$$

$$\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha - \delta}{1 - \frac{F}{V_0} H \delta}} = \arcsin \sqrt{\frac{0,709 - (-13,0185)}{1 - \frac{5}{20} 1 - (-13,0185)}} =$$

$$= \arcsin \sqrt{0,99702} = 86^\circ 50'$$

$$\varphi_2 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha - \delta}{1 - \delta}} = \arcsin \sqrt{\frac{0,709 - (-13,0185)}{1 - (-13,0185)}} =$$

$$= \arcsin \sqrt{0,97724} = 81^\circ 44'$$

$$\varepsilon = \arcsin k = \arcsin \sqrt{\frac{-\delta}{\alpha - \delta}} = \arcsin \sqrt{\frac{13,0185}{0,709 - (-13,0185)}} =$$

$$= \arcsin \sqrt{0,94835} = 76^\circ 50'$$

Z tablic wartości całek eliptycznych [5] odczytano kolejne wartości funkcji  $F(\varepsilon, \varphi)$  i  $E(\varepsilon, \varphi)$  w odpowiednich zakresach parametrów i argumentów, natomiast wartości tych funkcji dla powyżej obliczonych kątów uzyskano na drodze interpolacji wartości pośrednich.

Tak więc otrzymano wartości:

$$F(\varepsilon, \varphi_1) = F(76^\circ 50', 86^\circ 50') = 2,655$$

$$F(\varepsilon, \varphi_2) = F(76^\circ 50', 81^\circ 44') = 2,292$$

$$E(\varepsilon, \varphi_1) = E(76^\circ 50', 86^\circ 50') = 1,0495$$

$$E(\varepsilon, \varphi_2) = E(76^\circ 50', 81^\circ 44') = 1,0275$$

$$t = \frac{2 \sqrt{FV(A+C)}}{\sqrt{\alpha - \sigma}} \left\{ \alpha [F(\varepsilon, \varphi_1) - F(\varepsilon, \varphi_2) - (\alpha - \sigma)E(\varepsilon, \varphi_1) - E(\varepsilon, \varphi_2)] \right.$$

$$+ \operatorname{ctg} \varphi_1 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1} - \operatorname{ctg} \varphi_2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_2} \left. \right\} =$$

$$= \frac{2 \sqrt{5,20(14580+73152)}}{\sqrt{0,709 + 13,0185}} \left\{ 0,709 (2,655 - 2,292) - (0,709 + \right.$$

$$+ 13,0185)(1,0495 - 1,0275) + 0,0553 \sqrt{1 - 0,94835 \cdot 0,99702} -$$

$$\left. - 0,1453 \sqrt{1 - 0,94835 \cdot 0,97924} \right\} = 497 \text{ s.}$$

Powyzszą wartość obliczenia czasu napełniania zbiornika sprawdzono na drodze numerycznego obliczenia wartości całki (16), uzyskując wynik praktycznie identyczny.

W przypadku, gdy do zbiornika podłączony jest na wysokości dolnego położenia poziomu cieczy przewód rurowy o charakterystyce:

$$H_p = H_{gp} + C_p q^2 = 22 + 10^6 q^2$$

czas opróżniania zbiornika (przy założeniu, że w czasie opróżniania pompa nie pracuje), obliczono według zależności (42), przy czym:

$$H_z = H_{gp} + \frac{p_{at}}{\gamma} - \frac{v_o}{F} = 22 + 10 - \frac{20}{5} = 28 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{-H_z + \sqrt{H_z^2 + 4 \frac{v_o p_o}{F \gamma}}}{2 \frac{v_o}{F}} = \frac{-28 + \sqrt{28^2 + 4 \frac{20}{5} 37}}{2 \frac{20}{5}} = 1,138$$

$$\sigma = \frac{-H_z - \sqrt{H_z^2 + 4 \frac{v_o p_o}{F \gamma}}}{2 \frac{v_o}{F}} = \frac{-28 - \sqrt{28^2 + 4 \frac{20}{5} 37}}{2 \frac{20}{5}} = -8,138$$

$$\phi_1 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} = \arcsin \sqrt{\frac{1,138 - 1}{1,138}} = 22^\circ 22'$$

$$\varphi_2 = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha + \frac{F}{V} H - 1}{\alpha}} = \arcsin \sqrt{\frac{1,138 + \frac{5}{20} \cdot 1 - 1}{1,138}} =$$

$$= 35^\circ 43'$$

$$\varepsilon = \arcsin k = \arcsin \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - \sigma}} = \arcsin \sqrt{\frac{1,138}{1,138 + 8,138}} =$$

$$= \arcsin \sqrt{0,12268} = 20^\circ 30'$$

Wykorzystując tablice [5] wartości całek eliptycznych, ustalono następujące wartości funkcji:

$$F(\varepsilon, \varphi_1) = F(20^\circ 30', 20^\circ 22') = 0,3568$$

$$F(\varepsilon, \varphi_2) = F(20^\circ 30', 35^\circ 43') = 0,6282$$

$$E(\varepsilon, \varphi_1) = E(20^\circ 30', 20^\circ 22') = 0,3458$$

$$E(\varepsilon, \varphi_2) = E(20^\circ 30', 35^\circ 43') = 0,6180$$

$$t_0 = 2 \sqrt{F V_0 C_p (\alpha - \sigma)} \left\{ E(\varepsilon, \varphi_2) - E(\varepsilon, \varphi_1) - (1 - k^2) [F(\varepsilon, \varphi_2) - F(\varepsilon, \varphi_1)] \right\}$$

$$= 2 \sqrt{5 \cdot 20 \cdot 10^6 (1,138 + 8,138)} [0,6180 - 0,3458 - (1 - 0,12268)(0,6282 -$$

$$- 0,3568)] = 153 \text{ s.}$$



Powyzszą wartośó obliczenia czasu opróźniania zbiornika obliczono równieź na drodze numerycznego całkowania zaleźności (33), uzyskując wynik praktycznie identyczny.

Moc na wale pompy ON-65 opisana jest [2] równaniem liniowym:

$$N = 172620 Q + 8135$$

przy czym moc wyrażona jest w W.

Zużycie energii potrzebnej do napełnienia zbiornika przy stałej geometrycznej wysokości podnoszenia wyniesie:

$$E = FBH + N_0 t = 5 \cdot 172620 \cdot 1 + 8135 \cdot 509 = 21566675 \text{ Ws} =$$

$$= 5,99072 \text{ kWh,}$$

natomiast przy zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia, wyniesie:

$$E = FBH + N_0 t = 5 \cdot 172620 \cdot 1 + 8135 \cdot 497 = 21078575 \text{ Ws} =$$

$$= 5,85516 \text{ kWh.}$$

Średnia sprawność napełniania zbiornika w przypadku stałej geometrycznej wysokości podnoszenia, wyniesie:

$$\eta = \frac{H_{g1} + \frac{H}{2} - \frac{P_{at}}{\gamma} + \frac{P_0}{\gamma} \frac{V_0}{FH} \left| \ln \left( 1 - \frac{P}{V_0} H \right) \right|}{B + N_0 \frac{t}{HF}} =$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{2} - 10 + 37 \frac{20}{5.1} \ln \left( 1 - \frac{5}{20} 1 \right)}{172620 + 8135 \frac{509}{1.5}} = 0,344,$$



natomiast w przypadku zmiennej geometrycznej wysokości podnoszenia, wyniesie:

$$\eta = \frac{H_{g1} + \frac{H}{2} - \frac{P_{at}}{\gamma} + \frac{P_0}{\gamma} \frac{V_0}{FH} \ln \left(1 - \frac{F}{V_0} H\right)}{B + N_0 \frac{t}{HF}} =$$

$$= \frac{2 + \frac{1}{2} - 10 + 37 \frac{20}{5.1} \ln \left(1 - \frac{5}{20} \cdot 1\right)}{172620 + 8135 \frac{497}{1.5}} = 0,351$$

#### LITERATURA

- [1] JANKOWSKI F.: Pompowanie i urządzenia hydroforowe, Arkady 1966.
- [2] KORCZAK A., ROKITA J.: Niektóre problemy współpracy pompy wirowej ze zbiornikami otwartymi, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Energetyka", Zeszyt 27, Gliwice, 1967/68.
- [3] SMIRNOW W.I.: Matematyka wyższa, t.3, cz.2, PWN, 1965.
- [4] RYŻYK I.M., GRADSZTEJN I.S.: Tablice całek sum szeregów i iloczynów, PWN, 1964.
- [5] JAHNKE E., EMDE F.: Funktionentafeln mit Formeln und Curven.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ РОТАТОЧНОГО НАСОСА  
С ЗАКРЫТЫМ РЕЗЕРВУАРОМ

Резюме

В статье рассмотрено насосные системы в применении к закрытым резервуарам. Дан анализ времени наполнения и опорожнения закрытых резервуаров, расхода энергии и коэффициента полезного действия системы. Даны выводы способствующие достижению оптимальных результатов работы. Приведен конкретный расчётный пример.

SOME PROBLEMS OF THE COOPERATION OF A ROTATING PUMP WITH  
CLOSE RESERVOIRS

S u m m a r y

In the paper pump system cooperating with close reservoir has been considered. The time of filling and emptying the reservoir, the consumption of energy and the efficiency of the pump system in this case were analysed. Some conclusions which allow us to obtain more profitable effects of the work of the pumping system are given.