ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1969

Seria: ENERGETYKA z. 31 Nr kol. 253

TADEUSZ CHMIELNIAK
Katedra Cieplnych Maszyn Wirnikowych

STOCHASTYCZNE ZAGADNIENIA BRZEGOWE W TEORII LAMINARNEJ WARSTWY PRZYŚCIENNEJ

Streszczenie. W pracy rozpatrzono kilka stochastycznych zagadnień brzegowych z teorii laminarnej warstwy przyściennej. Do analizy procesów losowych wybrano metodę korelacyjną, prowadzącą w rozpatrywanych przypadkach najszybciej do momentów pierwszego rzędu i momentów centralnych rzędu drugiego. Przeanalizowano przepływ wzdłuż nieskończonej ściany wykonującej drgania przypadkowe, możliwość rozszerzenia metody C.C. Lina dla obliczenia laminarnej warstwy przyściennej przy stochastycznym zaburzeniu prędkości strumienia potencjalnego oraz problem opisu wielkości tarcia i strumienia ciepła dla losowych zmian prędkości zewnętrznej i temperatury ściany. Rozwiązania wyszczególniono dla wybranych postaci zaburzenia losowego.

1. Wstęp

Metoda korelacyjna znalazła w ostatnim okresie znaczne zastosowanie do badania różnego typu układów poddanych wymuszeniom przypadkowym. Jej zastosowaniu do analizy reakcji ciągłych układów mechanicznych, układów elektrycznych oraz do opisu losowych pól temperatur i naprężeń cieplnych poświęcono wiele prac [np. 1, 2, 3, 4]. W porównaniu z ihnymi metodami opisu wielkości losowych [5, 6] metoda korelacyjna posiada wiele istotnych zalet. Zagadnienia brzegowe wyznaczania funkcji

korelacyjnych w wielu przypadkach albo są identyczne z odpowiednimi zagadnieniami deterministycznymi lub dają się bezpośrednio w oparciu o nie rozwiązać. Ponadto najprościej, stosując tę metodę, można otrzymać wyrażenia dla wartości oczekiwanych i wariancji, które dostarczają podstawowych informacji o danym procesie losowym.

Celem niniejszej pracy jest próba analizy korelacyjnej kilku zagadnień laminarnej warstwy przyściennej dla stochastycznych warunków brzegowych. Analiza obejmuje problemy przepływów nieustalonych zarówno nieściśliwych jak i ściśliwych. Rozpatrzono problem rozkładu prędkości przy losowych drganiach płaszczyzny w ośrodku nieruchomym, możliwość rozszerzenia metody C.C. Lina dla rozwiązywania laminarnej nieściśliwej warstwy przyściennej przy losowym zaburzeniu prędkości strumienia potencjalnego oraz zagadnienie opisu wielkości tarcia i strumienia cieplnego dla losowych zmian prędkości zewnętrznej i temperatury ściany.

2. Stochastyczne zagadnienia brzegowe w teorii laminarnej warstwy przyściennej

2.1. Przepływ wzdłuż nieskończonej ściany wykonującej drgania losowe

Jeżeli przyjąć, że x jest współrzędną równoległą a y współrzędną prostopadłą do ściany, to matematyczny model przepływu stanowi równanie [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} y &= 0 \qquad & u(o,t) &= U_o f(t) \\ y &\to \infty \qquad & u(y,t) &\to 0 \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

u - składowa prędkości w kierunku y, t - czas, ν - lepkość kinematyczna.

Dla uzyskania ogólnego rozwiązania równania (1) dla dowolnej funkcji $u(o,t) = U_o f(t)$ najlepiej wykorzystać dwustronną transformację Laplace'a zdefiniowaną przez Van der Pola i Bremera [8]. Rozwiązanie to ma postać:

$$\frac{u(T,\eta)}{U_o} = \eta/2\pi^{1/2} \int_0^\infty \lambda^{-3/2} f(T-\lambda)\exp(-\eta^2/4\lambda)d\lambda \tag{3}$$

gdzie:

$$T = t/\nu \ , \eta = y/\nu$$

Załóżmy obecnie, że $\frac{u(0,T)}{U_o} = f(T)$ jest 1° procesem drugiego rzędu [12] o wartości oczekiwanej $< f >$ i funkcji korelacyjnej $K_{f,f}(T_1, T_2)$; 2° funkcja $f(T)$ jest procesem mierzalnym dla każdego T; 3° wariancja $f(T)$ jest całkowalna względem T_1 w każdym przedziale. Dla tych założeń proces $\frac{u(T,\eta)}{U_o}$ istnieje i posiada wartość średnią i funkcję korelacyjną określone odpowiednio przez:

$$< \frac{u(T,\eta)}{U_o} > = \frac{\eta}{2\pi^{1/2}} \int_0^\infty \lambda^{-3/2}\Big[<f(T-\lambda)>\Big]\exp(-\eta^2/4\lambda)d\lambda \tag{4}$$

$$K_{u,u}(\eta,T_1,T_2) = \eta^2/4\pi \int_0^\infty\int_0^\infty \lambda_1^{-3/2}\, \lambda_2^{-3/2}\, K_{f,f}(T_1-\lambda_1,T_2-\lambda_2)\,x$$

$$x\, \exp(-\eta^2/4\lambda_1)\exp(-\eta^2/4\lambda_2)\,d\lambda_1\, d\lambda_2 \tag{5}$$

Związek (5) dla $T_1 = T_2$ przechodzi w wariancję procesu

$$\sigma_u^2 = K_{u,u}(\eta,T_1,T_2)\Big|_{T_1=T_2} \tag{6}$$

Jeżeli przyjąć, że zmienna przypadkowa $f(t)$ podlega rozkładowi normalnemu, to związki (4) i (6) wystarczają do pełnego opisu badanych profili prędkości. Dla innego typu zjawisk dostarczają one podstawowych informacji praktycznych określając wartość średnią i rozsiew możliwych wartości rozpatrywanej zmiennej.

Rozważmy szczegółowiej proces $\frac{u(\eta,T)}{U_o}$ jeśli funkcja $f(t)$ ma postać

$$f(T) = H(T)F(T)\sin\omega T \tag{7}$$

gdzie:

$F(T)$ - amplituda losowa o stałej wartości oczekiwanej C i stałej wariancji D, $H(T)$ - funkcja Heavisidea.

Dla tak założonej funkcji $f(T)$ spełniającej założenia 1°, 2°, 3° wartość średnią profili prędkości po wykorzystaniu (4) można zapisać formułą:

$$\frac{u(\eta,T)}{U_o} = 1/2\, C\, I_m\, e^{i\omega T}\Big[e^{-\sqrt{i\omega}\eta}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{2T^{1/2}} - \sqrt{i\omega T}^{1/2}\Big) +$$

$$+ e^{\sqrt{i\omega}\eta}\operatorname{erfc}\Big(\frac{\eta}{2T^{1/2}} + \sqrt{i\omega T}^{1/2}\Big)\Big] \tag{8}$$

gdzie:

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Wariancję procesu otrzymujemy wykorzystując fakt, że dla procesu (7) funkcja korelacyjna ma postać:

$$K_{f,f} = DH(T_1)H(T_2)\sin\omega T_1 \sin\omega T_2 \tag{9}$$

Z (6) i (9) mamy:

$$\sigma_u^2 = 1/4\, D\left\{I_m\, e^{i\omega T}\left[e^{-\sqrt{i\omega}\eta}\operatorname{erfc}(\eta/2T^{-1/2} - \sqrt{i\omega T^{1/2}}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + e^{\sqrt{i\omega}\eta}(\eta/2T^{1/2} + \sqrt{i\omega T^{1/2}})\right]\right\}^2 \tag{10}$$

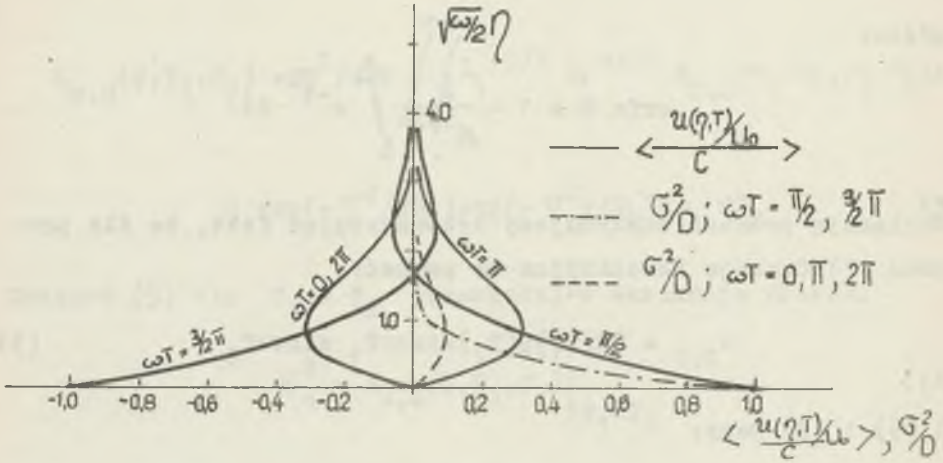
Związki (8) i (10) dla $T \to \infty$ przechodzą w zależności:

$$\langle u/U_o \rangle = C\, e^{-\sqrt{\omega/2}\eta} \sin(\omega T - \sqrt{\omega/2}\eta) \tag{11}$$

$$\sigma_u^2 = D\left\{e^{-\sqrt{\omega/2}\eta} \sin(\omega T - \sqrt{\omega/2}\eta)\right\}^2, \tag{12}$$

które zilustrowano na rys. 1 dla kilku wartości T. Z postaci zależności (11) i (12) wynika, że punkty występowania maksimum wartości średniej i dyspersji pokrywają się z tym, że wariancja praktycznie zanika w znacznie mniejszej odległości od ściany niż wartość średnia (rys. 1). Oznacza to, że powyżej pewnej granicy (zależnej od czasu) drgania uważać można za deterministyczne.

Jak łatwo zauważyć, rozpatrywane rozwiązanie dla profili prędkości jest również słuszne dla rozkładu temperatur wewnątrz ziemi przy losowo zmiennej (rocznej) temperaturze jej powierzchni.



Rys. 1. Zależność $\frac{u(\eta,T)/U_o}{C} = f[\eta,\omega T]$, $\frac{\sigma^2}{D} = f(\eta,\omega T)$

2.2. Wpływ losowych zaburzeń prędkości strumienia potencjalnego na laminarną nieściśliwą warstwę przyścienną

W 1957 r. C.C. Lin [9] zaproponował nową metodę obliczania nieustalonej warstwy przyściennej dla założenia:

$$U(x,t) = U_o(x) + u_{10}(x,t) \tag{13}$$

gdzie: $U(x,t)$ oznacza prędkość strumienia potencjalnego będącego sumą ustalonej funkcji $U_o(x)$ i nieustalonej deterministycznej funkcji $u_{10}(x,t)$ której średnią wartość w czasie C.C. Lin założył równą 0.

Pewne dodatkowe założenia i uproszczenia doprowadziły C.C. Lina do następującego równania określającego średnie w czasie profile prędkości $u_o(x,y)$, $v_o(x,y)$ [9]:

$$u_o \frac{\partial u_o}{\partial x} + v_o \frac{\partial u_o}{\partial y} = U_o \frac{dU_o}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} + F(x,y) \tag{14}$$

gdzie:

$$F(x,y) = u_{10}\frac{\partial u_{10}}{\partial x} - \left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \tag{15}$$

przy czym wielkości u_1 i v_1 spełniają układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_{10}}{\partial t} + \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \tag{17}$$

Rozwiązanie równania (16) dla dowolnej postaci funkcji $u_{10} = U_{\delta_1} f(t)$ można stosując tę samą metodę co w p.2.1 przedstawić w postaci:

$$u_1(x,\eta,T) = U_{\delta_1}(x)\left\{f(T) + \frac{\eta}{2\pi^{1/2}}\int_0^\infty \lambda^{-3h} e^{-\eta^2/4\lambda} f(T-\lambda)d\lambda\right\} \tag{18}$$

gdzie:

$$\eta = y/\nu, \quad T = t/\nu$$

Równanie (16) dla założenia, że proces $u_{10}(t) = U_{\delta_1} f(t)$ jest średniokwadratowo-różniczkowalny [12] określa średniokwadratowo-różniczkowalny proces $u(x,y,t)$. Jeżeli przyjąć dodatkowo, że $f(t)$ spełnia założenia 1°, 2°, 3° (2.1) oraz $\langle f(t)\rangle = 0$ i przy tych założeniach określić funkcję F, to metoda Lina służyć może również do obliczania warstwy przyściennej dla przypadkowych zaburzeń prędkości strumienia potencjalnego. Z (15), (18), (17) otrzymujemy bowiem:

$$F(x,y) = \langle u_{10} \frac{\partial u_{10}}{\partial x} \rangle - \left[\langle u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \rangle + \langle v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \rangle \right] =$$

$$= 1/2 \frac{\partial}{\partial x} \langle U_{\delta 1}^2 \rangle \left\{ \eta / 2\pi^{1/2} \int_0^\infty \lambda^{-3/2} K_{f,f}(T, T-\lambda) e^{-\eta^2/4\lambda} d\lambda + \right.$$

$$+ \frac{\eta^3}{4\pi} \int_0^\infty \lambda^{-5/2} K_{f,f}(T-\lambda, T) e^{-\eta^2/4\lambda} d\lambda +$$

$$- \frac{\eta^2}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_1^{-3/2} \lambda_2^{-3/2} K_{f,f}(T-\lambda_1, T-\lambda_2) e^{-\eta^2/4\lambda_1} e^{-\eta^2/4\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 +$$

$$- \eta^2/4\pi^{1/2} \int_0^\eta \frac{\xi}{2\pi^{1/2}} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_1^{-3/2} \lambda_2^{-5/2} K_{f,f}(T-\lambda_1, T-\lambda_2) e^{-\xi^2/4\lambda_1} - \right.$$

$$\left. e^{-\eta^2/4\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2 \right] d\xi + \frac{\eta}{2\pi^{1/2}} \int_0^\eta \frac{\xi}{2\pi^{1/2}} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda_1^{-3/2} \lambda_2^{-3/2} K_{f,f}(T- \right.$$

$$\left. -\lambda_1 - T - \lambda_2) e^{-\eta^2/4\lambda_2} e^{-\xi^2/4\lambda_1} d\lambda_1 d\lambda_2 \right] d\xi \qquad (19)$$

Dla każdej więc postaci funkcji korelacyjnej $K_{f,f}$ spełniającej założenie 2° można określić wielkość $F(x,y)$ a następnie wybierając jedną z metod przybliżonego rozwiązywania warstwy przyściennej rozwiązać równanie (14). Budowa zależności (19) dowodzi, że wielkość F jest jedynie funkcją zmiennych x,y tylko dla procesów stacjonarnych o ciągłym działaniu. Dla innego typu procesów funkcja F będzie dodatkowo funkcją czasu t. Równanie (14) w tym przypadku opisuje śred-

nie profile prędkości w warstwie przyściennej dla przyjętej współrzędnej t.

Załóżmy obecnie, że prędkość $u_{10}(x,t) = U_{\delta_1} f(t)$ jest procesem losowym o rozkładzie kanonicznym:

$$\frac{u_{10}(x,t)}{U_{\delta_1}(x)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos\omega_k T + \beta_k \sin\omega_k T \tag{20}$$

Z (19), wykorzystując (20), otrzymujemy:

$$\frac{F}{1/2 \frac{\partial}{\partial x}\langle U_{\delta_1}^2\rangle} = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} D_K \Big\{ e^{\sqrt{i\omega_k}\eta} - e^{-\eta(\sqrt{i\omega_k} + \sqrt{-i\omega_k})} +$$

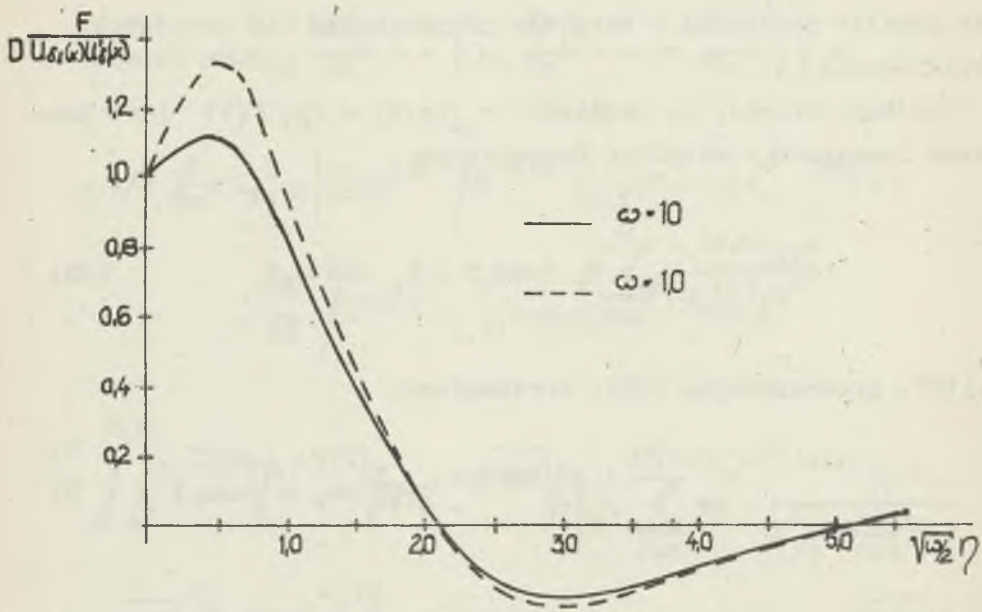
$$+ e^{-\sqrt{i\omega_k}\eta}(1 + \eta\sqrt{-i\omega_k}) + \frac{1}{\sqrt{-i\omega_k}} e^{-\sqrt{i\omega_k}\eta}(1/\eta + \sqrt{i\omega_k})(e^{-\sqrt{i\omega_k}\eta} - 1) +$$

$$- \frac{1}{\sqrt{-i\omega_k}} \Big[e^{-\eta(\sqrt{i\omega_k} + \sqrt{-i\omega_k})} - e^{-\sqrt{i\omega_k}} \Big] \Big\} \tag{21}$$

gdzie:

$$D_K = \sigma_{\alpha_k}^2 = \sigma_{\beta_k}^2 \qquad (k = 1,2...n)$$

Zależność (21) przedstawiono na rys. 2 dla $k=1(\omega = 1,10)$. Z przebiegu krzywej wynika, że największy wpływ losowego zaburzenia strumienia zewnętrznego na profile prędkości zaznacza się w pobliżu ściany (małe η), gdzie funkcja $F(x,\eta)$ osiąga maksimum.



Rys. 2. Zależność $\frac{F}{DU_{\delta_1}(x)U'_{\delta_1}(x)} = f(\sqrt{\omega/2}\eta)$

Przy rozpatrywaniu zastosowania metody C.C. Lina do dyskusji przepływów z czasowym zaburzeniem losowym prędkości U(x,t) wspomnieć należy również o możliwości przeprowadzenia ważnej praktycznie analizy wpływu zewnętrznej burzliwości strumienia na rozwiązania laminarnej warstwy przyściennej.

2.3. Ściśliwy przepływ wzdłuż nieskończonej ściany przy losowo zmiennej prędkości strumienia potencjalnego i temperatury na ścianie

Przedyskutujemy na koniec przykład zastosowania analizy korelacyjnej do badania przepływów ściśliwych. W tym celu rozważmy przepływ wzdłuż nieskończonej ściany przy nieustalonym gradiencie ciśnienia i zmiennej w czasie temperaturze ściany.

Ograniczając się do członów zawierających maksymalnie drugą pochodną czasową wielkości zmiennych (zaburzenia umiarkowane) deterministyczne rozwiązania można zapisać w postaci (P_r = = 0,72) [10], [11]:

$$\frac{\tau_{ść}}{(\tau_{ść})_g} = 1 + 2{,}555\, x \frac{\dot{U}_\infty(t)}{U_\infty^2} - 1{,}414\, x^2 \frac{\ddot{U}_\infty(t)}{U_\infty^3} \tag{22}$$

$$\frac{q_{ść}}{-\frac{\lambda_\infty}{2}\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}} = (T_{ść} - T_\infty)\left[-0{,}5913 + 0{,}04093 \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty^2} x + 0{,}2502 \frac{\ddot{U}_\infty}{U_\infty^3} x^2\right] +$$

$$- 1{,}416 \frac{x}{U_\infty} \dot{T}_{ść} + 0{,}4739 \left(\frac{x}{U_\infty}\right)^2 \ddot{T}_{ść} +$$

$$+ \frac{U_\infty^2}{2c_p}\left[0{,}5013 + 0{,}02248 \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty}\frac{x}{U} - 0{,}2754 \frac{\ddot{U}_\infty}{U_\infty^3} x^2\right] \tag{23}$$

gdzie: x - współrzędna równoległa do ściany, λ_∞ - przewodność cieplna, ν - lepkość kinematyczna, U_∞, T_∞ - prędkość i temperatura strumienia potencjalnego, $T_{ść}$ - temperatura ściany, $(\tau_{ść})_g$ - wartość tarcia odpowiadająca przepływowi quasistacjonarnemu.

Otrzymanie dokładnej charakterystyki procesu $\tau_o = \frac{\tau_{ść}}{(\tau_{ść})_g}$ dla przypadku kiedy U_∞ jest funkcją przypadkową jest bardzo utrudnione ze względu na nieliniowość związku (22). Z tych względów ograniczymy się jedynie do znalezienia wartości oczekiwanej τ . Uśrednienie (22) prowadzi do formuły:

$$<\left[\tau_o - 1\right]> = -2{,}555\, x \frac{d}{dt}<X(t)> +$$

$$+ 9{,}191\, x^2 \frac{d^2}{dt^2} K_{x,x}(t,t) + 0{,}707\left\{<X(t)>\right\}^2 +$$

$$+ 8{,}484\, x^2\left\{\frac{d}{dt}<X(t)>\right\}^2 \qquad (24)$$

gdzie: zmienna przypadkowa $X(t) = \frac{1}{U_\infty}$.
Ponieważ znalezienie średniej wartości i funkcji korelacyjnej $K_{x,x}$ procesu $X(t)$ dla wiadomego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej $U_\infty(t)$ nie przedstawia trudności, związek (24) pozwala określić średnią wartość zmiennej $(\tau_o - 1)$ dla każdego procesu $U_\infty(t)$.

Budowa związku (23) pozwala przy nieskorelowanych zmiennych $U_\infty(t)$ i $T_{śc}(t)$ łatwo znaleźć moment pierwszego rzędu procesu $q^o = -\frac{q_{śc}}{\lambda_\infty/2\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}}$ zarówno dla losowo zmiennej temperatury na ścianie jak i prędkości $U_\infty(t)$. Jeśli natomiast przyjąć, że $T_{śc}(t)$ jest funkcją losową a prędkość $U_\infty(t)$ funkcją deterministyczną, to dla procesu q^o można wyznaczyć również moment centralny rzędu drugiego.

Rozpatrzmy ten przypadek. Wychodząc z (23) łatwo otrzymać dla momentu pierwszego rzędu formułę:

$$<q^o> = A(x,t)<\left[T_{śc}(t) - T_\infty\right]> - 1{,}416\, \frac{x}{U_\infty}\frac{d}{dt}<\left[T_{śc}(t)\right]> +$$

gdzie:

$$A(x,t) = -0{,}5913 + 0{,}04093\,\frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty}\frac{x}{U_\infty} + 0{,}2502\,\frac{\ddot{U}_\infty}{U_\infty}\left(\frac{x}{U_\infty}\right)^2 \tag{26}$$

$$B(x,t) = 0{,}5013 + 0{,}02249\,\frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty}\frac{x}{U_\infty} - 0{,}2754\,\frac{\ddot{U}_\infty}{U_\infty}\left(\frac{x}{U_\infty}\right)^2 \tag{27}$$

Funkcję korelacyjną wyznaczamy z relacji:

$$K_{q^o q^o} = \left\langle\left[q^o(t_1) - \langle q^o(t_1)\rangle\right]\left[q^o(t_2) - \langle q^o(t_2)\rangle\right]\right\rangle \tag{28}$$

Podstawiając (23) do (28) otrzymamy:

$$K_{q^o,q^o} = A^2(x,t)\,K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2) - 1{,}416\,A(x,t)\,\frac{x}{U_\infty}\left[\frac{\partial K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2)}{\partial t_2} + \frac{\partial K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right] + 0{,}4739\,A(x,t)\left(\frac{x}{U_\infty}\right)^2\left[\frac{\partial^2 K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2)}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2)}{\partial t_1^2}\right] + \left(1{,}416\,\frac{x}{U_\infty}\right)^2\frac{\partial^2 K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} - 0{,}6216\left(\frac{x}{U_\infty}\right)^3\left[\frac{\partial^3 K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2^2} + \frac{\partial^3 K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2)}{\partial t_1^2\,\partial t_2}\right] + (0{,}4739)^2\left(\frac{x}{U_\infty}\right)^4\frac{\partial^4 K_{\Theta\Theta}(t_1,t_2)}{\partial t_1^2\,\partial t_2^2} \tag{29}$$

gdzie:

$$\Theta = T_{ść} - T_\infty, \qquad T_\infty = \text{const}$$

Wariancję q^o wyznaczamy z (29) przyjmując $t_1 = t_2$

$$\sigma^2_{q^o} = K_{q^o,q^o}(t_1,t_2)\Big|_{t_1=t_2} \tag{30}$$

Zależność (29) pozwala określić funkcję korelacyjną i wariancję procesu q^o dla dowolnej deterministycznej funkcji $U_\infty(t)$ i losowo zmiennej funkcji $T_{ść}(t)$ spełniającej założenia podane w (2.1) i posiadającej czterokrotnie różniczkowalną funkcję korelacyjną $K_{\circledast\circledast}$.

Dla przykładu załóżmy, że $T_{ść}$ jest sinusoidą o stałej częstości ω i przypadkowo zmiennej amplitudzie $Y(t)$ ($\langle Y(t)\rangle = C$, $K_{y,y}(t,t) = D$), $U_\infty = \text{const}$

$$T_{ść}(t) = Y(t)\sin\omega t, \quad K_{\circledast\circledast} = D\sin\omega t_1 \sin\omega t_2 \tag{31}$$

Dla założenia (31) i $U_\infty = \text{const}$ wariancja q^o przyjmie postać:

$$\frac{\sigma^2_{q^o}}{D} = \sin^2\omega t\left[0{,}348 + 0{,}56\xi^2 + 0{,}2246\xi^4\right] +$$

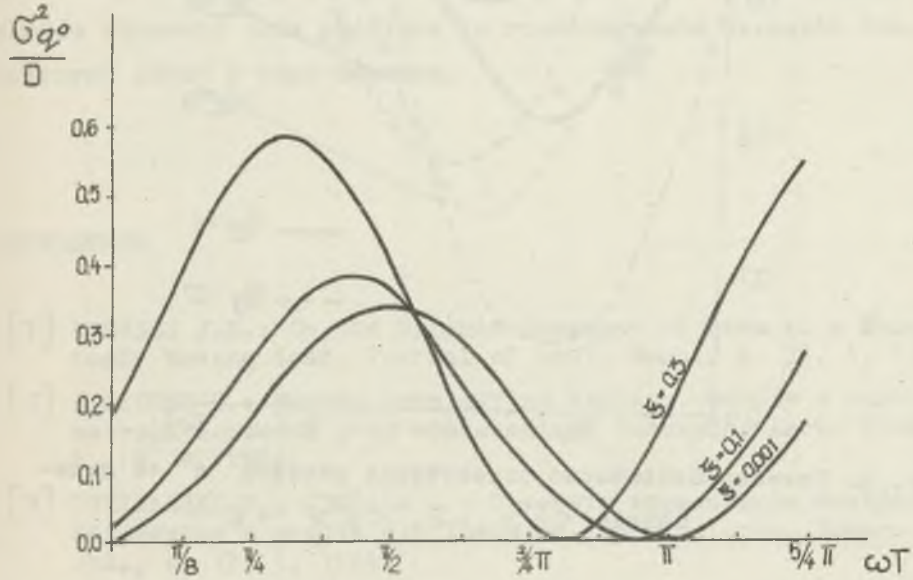
$$+ \sin 2\omega t\left[0{,}837\xi + 0{,}671\xi^3\right] + 2\xi^2\cos^2\omega T \tag{32}$$

gdzie:

$$\xi = \frac{x}{U_\infty}\omega$$

Porównanie budowy formuły (32) z formułą (31) pozwala zauważyć, że wariancja $\sigma^2_{q^o}$ jest przesunięta w fazie w stosunku do wymuszenia (31). Współrzędne maksimum wariancji, jak to wynika z (32), zależą w istotny sposób od wielkości $\xi = \frac{x\omega}{U_\infty}$.

Ze wzrostem ξ współrzędne maksimum przesuwają się w kierunku mniejszych ωT. Zależność (32) przedstawiono na rys. 3 dla $\xi = 0{,}001,\ 0{,}1,\ 0{,}3$.



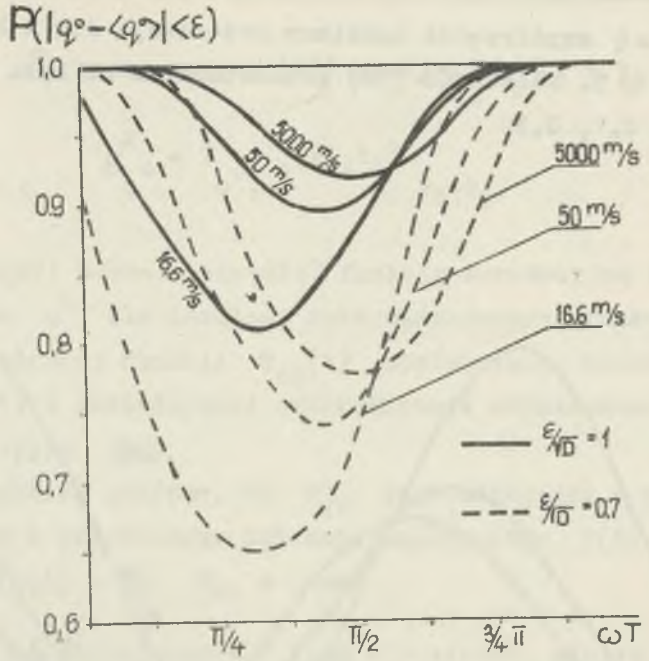
Rys. 3. Zależność $\frac{\sigma^2_{q^o}}{D} = f(\omega T)$ dla kilku wartości $\xi = \omega \frac{x}{U_\infty}$

Jeśli założyć, że funkcja $Y(t)$ ma rozkład normalny, to ze względu na liniowość stosowanych przekształceń również proces q^o podlega temu rozkładowi. Można więc w stosunkowo prosty sposób opisać prawdopodobieństwo $P\left\{\left[q^o - \langle q^o \rangle\right] < \varepsilon\right\}$. Z własności procesów normalnych znajdujemy bowiem:

$$P\left\{\left[q^o - \langle q^o \rangle\right] < \varepsilon\right\} = \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{q^o}}\right) \tag{33}$$

gdzie:

$$\phi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$ jest całką prawdopodobieństwa.



Rys. 4. Prawdopodobieństwo przebywania procesu q^o w przedziale $\langle q^o \rangle - \varepsilon$, $\langle q^o \rangle + \varepsilon$

Związek (33) dla kilku wartości U_∞ zilustrowano na rys. 4. Badanie krzywych rys. 3 i 4 pozwala sformułować istotne wnioski ważne dla zaburzeń typu (31). Ze wzrostem wartości prędkości U_∞ dla danych x i ω maleje maksimum wariancji q^o (rys. 3). W konsekwencji wzrasta prawdopodobieństwo przebywania wielkości q^o w przedziale $\langle q \rangle - \varepsilon$, $\langle q \rangle + \varepsilon$. Oznacza to, że wzrost prędkości powoduje niejako wyrównanie losowych zmian strumienia ciepła. Przy ustalonych ω i U_∞ prawdopodobieństwo P maleje ze wzrostem odległości x.

Przedstawione w (2.1), (2.2), (2.3) przykłady zastosowania analizy korelacyjnej do badania laminarnej warstwy przyściennej nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwych do rozwiązania przypadków. Metoda korelacyjna może bowiem znaleźć w za-

sadzie zastosowanie do badania wszystkich problemów laminarnej warstwy przyściennej dla których znana jest metoda rozwiązania deterministycznego (np. metoda kolejnych przybliżeń, metoda zaburzeń). Niemniej jednak rodzaj wybranych do analizy przykładów stanowić może podstawę do rozwiązywania dalszych konkretnych zadań z tego zakresu.

LITERATURA

[1] KNOWLES J.K.: On the Dynamic Response of Beam to a Randomly Moving Load, Journal of Appl. Mech., t. 35, 1, 1968.

[2] KACZOREK T.: Metoda korelacyjna analizy obwodów o parametrach losowych przy wymuszeniach losowych, Arch. Elektr., t. 15, 1, 1966.

[3] CHMIELNIAK T., CZOGAŁA E.: O pewnym zagadnieniu rozkładu temperatur w pręcie dla losowych źródeł ciepła, Rozpr. Jnż., t. 17, 1, 1969.

[4] TYLIKOWSKI A., CHMIELNIAK T.: Niestacjonarne przypadkowe pole temperatur i naprężeń w nieskończonym pręcie, Rozpr. Jnż., t. 17, 1, 1969.

[5] BOŁOTIN W.W.: Metody statystyczne w mechanice budowli, Arkady, Warszawa, 1968.

[6] MONIN A.C., JAGŁOM A.: Statisticzieskaja gidromechanika, część I, Nauka, 1965.

[7] SCHLICHTING H.: Grenzschicht-Theorie, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1965.

[8] WATSON J.: A solution of the Navier-Stokes equations illustrating the response of a laminar layer to a given change in the external stream velocity, Quart. Jour. Appl. Math., 11, 1958.

[9] LIN C.C.: Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow, Proc. 9th. Intern. Congress Appl. Mech., Brussel 1957, vol. 4, (cyt. z [7]).

[10] SPARROW E.M.: Nonsteady surface temperature effects on forced convection heat transfer, JAS, t. 24, str. 776--777, 1957.

[11] SPARROW E.M.: Combined effects of unsteady fligh velocity and surface temperature on heat transfer, Jet Propulsion, t. 28, str. 403-405, 1958.

12 GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: Wstęp do teorii procesów stochastycznych, PWN, Warszawa, 1968.

СЛУЧАЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено задачу об определении статистических характеристик поля скорости около стенки при случайных её колебаниях, возможность расширения метода Лина до обсуждении пограничного слоя при случайной скорости обтекания. Кроме этого дается решение задачи об определении математических ожиданий и корреляционных функций трения и потока тепла, если скорость обтекания пластины и её температура являются процессами случайными.

SOME RANDOM PROBLEMS FROM THEORY OF LAMINAR BOUNDARY LAYER

S u m m a r y

In this paper some stochastic problems from laminar boundary layer are presented. For analysis a correlation method is choosed. A solutions for the problems of determining the statistical characteristics: of random velocity field along an infinitely stochastic vibratory plane, of the random value of friction and heat stream for stochastic variance of external velocity and walls temperature are given. The Lin's method for calculation of laminar boundary layer by random variance of velocity external flow is finally extented. The solutions for particulare case are made.