

ENERGETYKA z. 32

TADEUSZ M. BES

**AKUMULACJA ENERGII
W ELEMENTACH WYPEŁNIENIA REGENERATORA**

25-LECIE

POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 257 – GLIWICE 1969

SPIS TREŚCI

	Str.
UWAGI OGÓLNE	3
WSTĘP	5
1. ZAŁOŻENIA PROBLEMU I BEZWYMIAROWE RÓWNANIA BILANSU ENERGII	8
1.1. Równanie FOURIERa-KIRCHHOFFa	9
1.2. Równania warunków początkowych	10
1.3. Równania warunków brzegowych	10
1.4. Zdolność akumulowania energii w elemencie wypełnienia	13
2. ELEMENT WYPEŁNIENIA GRZANY I CHŁODZONY OKRESOWO PRZY STAŁEJ LICZBIE BIOTA I ZMIENNEJ TEMPERATURZE GAZU	14
2.1. Wypełnienie o kształcie dowolnym	15
2.2. Wypełnienie w kształcie kraty	22
3. ZAGADNIENIE SKOKOWYCH ZMIAN LICZBY BIOTA WYWOŁANYCH ZWROTEM KIERUNKU STRUMIENIA CIEPŁA WNIKAJĄCEGO DO ŚCIAN WYPEŁNIENIA	29
3.1. Dobór temperatur „umownego gazu”	32
3.2. Modyfikacja warunków brzegowych	36
2.2.a Uogólnione rozwiązanie równania FOURIERa-KIRCHHOFFa	37
3.2.b. Ujednorodnienie warunku brzegowego	38
3.2.c. Zastosowanie metody obliczeń dla płyty i pręta prostokątnego	44
4. LICZBY BIOTA ZMIENNE W CZASIE GRZANIA I CHŁODZENIA WYPEŁNIENIA REGENERATORA	49
5. JAKOŚCIOWA OCENA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW I SZYBKOŚCI UZYSKANIA WYNIKÓW	54
RYSUNKI	57
LITERATURA	85
STRESZCZENIA	87

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 257

TADEUSZ M. BES

**AKUMULACJA ENERGII
W ELEMENTACH WYPEŁNIENIA REGENERATORA**

PRACA HABILITACYJNA Nr 94

Przewód habilitacyjny otwarto w dniu 7 czerwca 1969 r.

GLIWICE 1969

**REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ**

Fryderyk Staub

REDAKTOR DZIAŁU

Ryszard Petela

SEKRETARZ REDAKCJI

Witold Guzkowski

**Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. M. Strzody 18**

Nakł. 100+175 Ark. wyd. 3,6 Ark. druk. 5,6 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 70 g
Oddano do druku 30. 6. 1969 Podpis. do druku 16. 8. 1969 Druk ukoń. we wrześniu 1969
Zam. 924 25. 6. 1969 O-23 Cena zł 4,50

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

UWAGI OGÓLNE

Transport energii od gazu o temperaturze wyższej od gazu o temperaturze niższej może odbywać się za pośrednictwem ciała stałego. W praktyce realizacja takiego procesu zachodzi w regeneratorsze. Znajdujące się wewnątrz regeneratorsa ciało stałe zwane wypełnieniem omywane jest na przemian gazem gorącym - spalinami i chłodnym - powietrzem. Wynika stąd, że akumulacja energii w wypełnieniu regeneratorsa jest okresowa.

Metody obliczania zdolności akumulowania energii w wypełnieniu regeneratorsa - opisane są w wielu publikacjach z literatury technicznej. Wynika to z dużej wagi problemu, gdyż występuje on bardzo często w technice, a zwłaszcza w zagadnieniach hutniczych.

Spełnienie coraz to większych wymagań stawianych regeneratorsom przez hutnictwo - wiąże się ze wzrostem kosztów budowy regeneratorsów. W celu ograniczenia do niezbędnego minimum tych i tak wysokich kosztów - należy projektować regeneratorsy w ten sposób, aby parametry obliczone były jak najbliższe parametrom rzeczywistym. Zamierzenie to zostanie osiągnięte wtedy, gdy do obliczeń stosowane będą metody bardziej precyzyjne od używanych dotąd.

Obliczenia termodynamiczne całego regeneratorsa oparte są na obliczeniach jego podstawowej części składowej, tj. elementu wypełnienia. Zadaniem tej pracy jest podanie ścisłej metody obliczeń elementu wypełnienia uwzględniającej dodatkowo wpływ pewnych czynników pomijanych w stosowanych dotychczas metodach.

Przystępując do rozwiązania problemu można wybrać metodę numeryczną lub analityczną. Pomimo tego, że ilość zagadnień jakie mo-

gą być rozwiązane na drodze analitycznej, jest na ogół mniejsza od ilości zagadnień, które można rozwiązać numerycznie - to w pracy tej wybrana została metoda analityczna. W uzasadnieniu takiego postępowania należy zwrócić uwagę na następujące momenty:

Podejście do problemu od strony analitycznej jest trudniejsze, gdyż wymaga gruntownego przygotowania teoretycznego, a często znacznych umiejętności matematycznych. Jednak trud włożony w rozwiązanie metodą analityczną jest jednorazowym wysiłkiem autora metody. Trud ten przynosi duże efekty, zwłaszcza wtedy gdy analizowane są wyniki rozwiązania. Na podstawie wyników otrzymanych metodami analitycznymi można uzyskać znacznie więcej pełniejszych informacji niż na podstawie cyfrowych wyników metod numerycznych. Dalszą zaletą zastosowania metody analitycznej jest dużo mniejsza niż w metodzie numerycznej - ilość obliczeń potrzebna do uzyskania zamierzonego wyniku - co w tych problemach jest ważne nawet wtedy, gdy do obliczeń stosuje się maszynę matematyczną.

Niezbędne obliczenia pozwalające na praktyczne wykorzystanie rezultatów rozwiązanego tu problemu - wykonałem przy pomocy maszyny cyfrowej ZAM-2 znajdującej się w Ośrodku Maszyn Matematycznych przy Biurze Projektów Syntezy Chemicznej w Gliwicach.

Zarówno przy sformułowaniu problemu jak i jego rozwiązaniu dużą pomocą była sprzyjająca badaniom naukowym atmosfera istniejąca w środowisku termodynamików Politechniki w Gliwicach. Twórcą tego środowiska i gliwickiej szkoły termodynamików jest Członek Korespondent PAN, profesor zwyczajny, doktor hab. Stanisław OCHEŃDUSZKO. Panu Profesorowi S. OCHEŃDUSZKO, który jest Kierownikiem Katedry Teorii Maszyn Ciepłych - wyrażam tutaj gorące podziękowanie za stworzenie mi w tej Katedrze warunków do wykonania pracy oraz za okazaną życzliwość i stałe zainteresowanie postępami w mej pracy.

WSTĘP

Metody obliczania zdolności akumulowania \mathcal{H} energii w elemencie wypełnienia regeneratora podane w literaturze słuszne są dla wielu założeń upraszczających. Sformułowane przez W. HEILIGENSTAEDTA i H. HAUSENA [14], [15] metody określenia wartości \mathcal{H} - dotyczą wypełnienia doskonale przewodzącego ciepło w kierunku prostopadłym do przepływu gazów w regeneratorze. Rozwiązanie problemu, w których uwzględniony jest wpływ przewodzenia ciepła w materiale wypełnienia - znajdują się w publikacjach [7], [8], [25], [26], lecz dotyczą one wypełnienia w kształcie nieograniczonych płyt i odpowiadają tzw. warunkom brzegowym drugiego rodzaju, gdy strumień ciepła wnikającego do ścian wypełnienia jest stały. W nowszych publikacjach [4], [5] równania, za pomocą których opisany jest proces wnikańia ciepła mają postać tzw. warunków brzegowych trzeciego rodzaju z tym, że podane tam rozwiązania ograniczone są założeniem stałej wartości współczynnika wnikańia ciepła. Różne wartości współczynników wnikańia ciepła dla faz grzania i chłodzenia wypełnienia przyjęli autorzy prac [6] i [29], jednak ich rozwiązania słuszne są tylko dla wypełnienia w kształcie nieograniczonych płyt lub prętów. W publikacjach wymienionych w wykazie literatury, wszystkie konkretne obliczenia wartości \mathcal{H} - uzyskane na drodze analitycznej - dotyczą elementu wypełnienia mającego postać nieograniczonej płyty.

W pracy tej omówiona jest metoda obliczeń termodynamicznych procesu okresowego grzania i chłodzenia elementu wypełnienia regeneratora.

Szczególną uwagę zwrócono na sformułowanie wzorów dotyczących kratowego wypełnienia. Zadanie to sprowadzone zostało do rozwiązania problemu niustalonego przepływu ciepła w elemencie o kształcie trapezu. Nawet dla stałego współczynnika wnikania ciepła problem dotyczący wypełnienia kratowego okazał się bardziej złożony od zagadnienia uwzględniającego odmiennosć współczynników wnikania ciepła dla faz grzania i chłodzenia płyty.

Wszystkie rozważania dostosowane są do warunków, w których temperatura gazu omywającego wypełnienie - w przedziale czasu równym jednemu cyklowi - ma dowolny przebieg, natomiast w odstępie czasu większym od jednego cyklu temperatura ta zmienia się okresowo. Kształt okresowej funkcji temperatury gazu wynika jednoznacznie z bilansu całego regeneratora. Ponieważ w pracy tej przedmiotem badań nie jest cały regenerator, lecz tylko jego element, przeto wyznaczenie funkcji zmiany temperatury gazu w czasie jednego cyklu nie stanowi celu tej pracy. Dlatego też przyjmuje się, że okresowa funkcja temperatury gazu podana jest wraz z warunkami brzegowymi.

Współczynniki wnikania ciepła dla faz grzania i chłodzenia - jakie brane są pod uwagę w rozwiązywanym problemie - mogą być różne i zmienne w czasie, pod warunkiem, że zmiana ta wyrażona jest funkcją o postaci wielomianu. Metoda obliczenia \mathcal{H} dla skokowej zmiany współczynnika wnikania ciepła przy przejściu z fazy grzania na fazę chłodzenia lub na odwrót - wyjaśniona jest w publikacji [2]. W niniejszej pracy przedstawiono odmienną metodę rozwiązania tego zagadnienia - metodę, która pozwala nie tylko na uwzględnienie skokowych zmian współczynnika wnikania ciepła, lecz także na obliczenie wartości \mathcal{H} dla przypadku zmiany tego współczynnika z czasem.

Wszystkie parametry, zmienne niezależne i wyniki zgrupowane są w postaci liczb kryterialnych oraz wielkości bezwymiarowych. Kon-

kretno obliczenia przeprowadzono dla szeregu niezależnych argumentów, co też jest uzasadnieniem rezygnacji z zamieszczenia przykładów obliczeń.

Ponieważ rozwiązanie analizowanego zagadnienia można zaliczyć do problemów fizyki matematycznej, przeto wszystkie przeprowadzone w pracy przekształcenia i rozważania matematyczne zostały pominięte.

1. ZAŁOŻENIA PROBLEMU I BEZWYMIAROWE RÓWNANIA BILANSU ENERGII

W jednym cyklu - działającego okresowo regeneratora - można wyróżnić fazę grzania i fazę chłodzenia wypełnienia. Oznaczenia wielkości fizycznych dotyczących etapów grzania i chłodzenia elementu wypełnienia będą zróżnicowane przez umieszczenie obok symbolu wielkości fizycznej górnego indeksu - gwiazdki (*) . Bez górnego indeksu będą wszystkie wielkości wspólne dla całego cyklu oraz wielkości odpowiadające fazie grzania. Natomiast gwiazdkę u góry będą miały te wielkości, które w fazie chłodzenia mogą przyjmować inne wartości liczbowe niż w fazie grzania.

Analiza problemu przeprowadzona zostanie dla idealnego przypadku, w którym zarówno sam element wypełnienia jak i proces okresowej wymiany energii pomiędzy tym elementem, a otaczającym go gazem - spełniają szereg warunków.

Materiał każdego z elementów wypełnienia charakteryzuje się jednakową gęstością ρ , niezmiennym współczynnikiem przewodzenia ciepła λ i niezmiennym ciepłem właściwym c .

Sformułowanie problemu w postaci równań bezwymiarowych prowadzi do redukcji ilości niezależnych parametrów oraz umożliwia przejrzyste przedstawienie wyników obliczeń. Dlatego też wszystkie równania bilansu energii, równania warunków i otrzymane na ich podstawie rezultaty - wyrażone będą w postaci wielkości bezwymiarowych. Przejście od wielkości rzeczywistych do bezwymiarowych wymaga wprowadzenia kilku parametrów charakterystycznych. W punkcie o współrzędnej \bar{r}_0 i w chwili \bar{t} - temperatura elementu wypełnienia

wynosi $t(\vec{r}_0, \tau)$. Dla charakterystycznego rozmiaru liniowego l_0 zdefiniowany zostaje zredukowany promień - wektor $\vec{r} = \vec{r}_0/l_0$ oraz zredukowany czas $f = \lambda \tau / \varepsilon c l_0^2$. Operowanie zredukowaną temperaturą $\Theta(\vec{r}, f)$ elementu wypełnienia jest wygodniejsze niż operowanie temperaturą rzeczywistą $t(\vec{r}_0, \tau)$. Dlatego też stosowana dalej wielkość $\Theta(\vec{r}, f)$ zdefiniowana będzie jako nadwyżka temperatury $t(\vec{r}_0, \tau)$ ponad przyjętą temperaturę odniesienia t_0 - do charakterystycznej różnicy temperatur Δt .

Problem sformułowany jest jednoznacznie wówczas, gdy podane jest równanie bilansu energii wraz z uzupełniającymi je równaniami warunków brzegowych i początkowych.

1.1. Równanie FOURIERA-KIRCHHOFFA

Pole temperatury w elemencie wypełnienia określone jest za pomocą funkcji $\Theta(\vec{r}, f)$ i $\Theta^*(\vec{r}, f^*)$, które spełniają równanie bilansu energii - zwane także równaniem FOURIERA-KIRCHHOFFA. Równanie to podane zostanie wprost, z pominięciem wszystkich elementarnych przekształceń polegających na sprowadzeniu go do postaci bezwymiarowej. Dla obydwóch faz jednego cyklu równanie FOURIERA-KIRCHHOFFA przyjmuje postać

$$\nabla^2 \Theta(\vec{r}, f) = \frac{\partial \Theta(\vec{r}, f)}{\partial f} \quad \text{oraz} \quad \nabla^2 \Theta^*(\vec{r}, f^*) = \frac{\partial \Theta^*(\vec{r}, f^*)}{\partial f^*} \quad (1)$$

Zależności (1) spełnione są w objętości V elementu wypełnienia tj. dla $\vec{r} \in V$, przy czym pierwsze z nich dotyczy przedziału czasu $0 \leq f \leq (Fo)$, drugie zaś przedziału $0 \leq f^* \leq (Fo)^*$. Liczby FOURIERA (Fo) i $(Fo)^*$ równe są zredukowanym czasem trwania każdej z faz jednego cyklu.

1.2. Równania warunków początkowych

Okresowym zmianom temperatury gazu odpowiadają wahania pola temperatury w elemencie wypełnienia. Zakłada się, że wahania te w dwóch kolejnych cyklach są identyczne. Wspomniany warunek spełniony jest wówczas, gdy proces przemianowego grzania i chłodzenia trwa na tyle długo, aby można było zaniedbać wpływ początkowego rozkładu temperatury w wypełnieniu.

Dla wspomnianych wahań temperatury w elemencie wypełnienia należy sformułować warunek początkowy jaki muszą spełniać funkcje $\Theta(\vec{r}, f)$ i $\Theta^*(\vec{r}, f^*)$. W momentach rewersji, tj. dla $f = 0$ i $f^* = 0$ to samo pole temperatury opisane jest przez dwie funkcje Θ i Θ^* . Sprzężenia pomiędzy nimi można zapisać za pomocą następujących równań

$$\Theta(\vec{r}, 0) = \Theta^*[\vec{r}, (F_0)^*] \quad \text{oraz} \quad \Theta[\vec{r}, (F_0)] = \Theta^*(\vec{r}, 0) \quad (2)$$

Ostatnie wzory muszą spełnione być w całej objętości V elementu wypełnienia - $\vec{r} \in V$.

1.3. Równania warunków brzegowych

Dalej zakłada się, że proces chłodzenia elementu wypełnienia zachodzi jedynie na drodze konwekcji. Wypełnienie regeneratora chłodzone jest zazwyczaj powietrzem, będącym roztworem gazów dwuatomowych. Ponieważ dwuatomowe składniki powietrza nie absorbują ani nie emitują energii drogą promieniowania, przeto założenie dotyczące chłodzenia tylko drogą konwekcji można uznać za usprawiedliwione.

Inaczej przebiega proces grzania elementu wypełnienia przez gorący gaz. Gaz (spaliny) o zmiennej w czasie temperaturze $t_g(\tau)$ - omijający wypełnienie - zawiera składniki, których drobiny stanowią również cząstki trój- i więcej atomowe emitujące energię

promienistą. Efekt ten należy uwzględnić w równaniu warunków brzegowych. Ścisłe - analityczne ujęcie procesu wymiany energii promienistej pomiędzy niektórymi gazami, a ścianą elementu wypełnienia w formie wzorów jest niemożliwe, gdyż w teorii promieniowania brak jest takich wzorów. Dlatego też w dalszym ciągu ilość energii promienistej jaka przekazywana jest od gazów do ścian wypełnienia oznaczona zostanie jedynie ogólnym symbolem $\Delta \dot{e}_r$. Wielkość $\Delta \dot{e}_r$ będzie przedstawiona w postaci zredukowanej - co wyrażono za pomocą wzoru $S = \Delta \dot{e}_r l_0 / \lambda \Delta t$. Dodatkowe założenia jakie należy uczynić w celu bliższego sprecyzowania funkcji S omówione zostaną każdorazowo przy analizowaniu konkretnych przypadków okresowego grzania i chłodzenia elementu wypełnienia.

Z bilansu energii sporządzonego dla powierzchni A elementu wypełnienia wynikają równania warunków brzegowych. W rezultacie wykorzystania praw FOURIERA i NEWTONA oraz zgrupowania parametrów i zmiennych w wielkości bezwymiarowe - równania te można zapisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\partial \Theta(\vec{r}, t)}{\partial n} &= (Bi) [\Theta(\vec{r}, t) - \vartheta(t)] + \\ &- s [\Theta(\vec{r}, t), \vartheta(t)] \quad \vec{r} \in A \\ - \frac{\partial \Theta^*(\vec{r}, t^*)}{\partial n} &= (Bi)^* [\Theta^*(\vec{r}, t^*) - \vartheta^*(t^*)] \quad \vec{r} \in A \end{aligned} \right\} (3)$$

gdzie:

A - pole powierzchni elementu wypełnienia zajmującego objętość

V ,
 $(Bi) = \frac{\alpha l_0}{\lambda}$ - liczba Biota,

$n = n_0 / l_0$ - zredukowany kierunek normalny do powierzchni elementu wypełnienia,

$\vartheta(r) = \frac{t(r) - t_0}{\Delta t}$ - zredukowana temperatura gazu omywającego element wypełnienia.

Z omówionych we wstępie założeń wynika, że występujący w liczbie BIOTa współczynnik wnikania ciepła α może zależeć od temperatury gazu. Ponieważ temperatura gazu zmienia się w czasie, przeto i współczynnik α jest funkcją czasu. Dla funkcji tej obrona zostaje postać wielomianu. Wspomniany wielomian zapisany będzie wprost dla liczby BIOTa

$$\left. \begin{aligned} (Bi) &= (Bi)_0 \left[1 + \sum_{i=1}^{i=m} \beta_i r^i \right] \text{ oraz} \\ (Bi)^* &= (Bi)_0 \sum_{i=0}^{i=m} \beta_i^* (r^*)^i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

gdzie: β_i, β_i^* - parametry podane wraz z założeniami.

W przypadku szczególnym dla $i = 0 - \beta_0^* = (Bi)_0^* / (Bi)_0$.

W literaturze można znaleźć jedynie zależności liczby BIOTa (Bi) od prędkości gazu jego rodzaju i temperatury, a funkcje te ustalone są na drodze empirycznej. Uzależnienie liczby (Bi) od temperatury w równaniu (3) uniemożliwiłoby analityczne rozwiązanie problemu. Dlatego też należy przyjąć następującą metodę postępowania: Dla stałej liczby BIOTa wstępnie oszacowuje się zmianę temperatury gazu w czasie i dopiero na tej podstawie określa zmienność liczby BIOTa od czasu.

1.4. Zdolność akumulowania energii w elemencie wypełnienia

W obliczeniach regeneratorów praktyczne znaczenie ma ilość energii zakumulowanej w elemencie wypełnienia podczas fazy grzania. Dalej używane będzie pojęcie zredukowanej zdolności akumulowania energii. Do wielkości tej oznaczonej przez \mathcal{H} proporcjonalna jest ilość energii ΔE przekazywanej od gazu gorącego do gazu chłodnego. Zredukowaną zdolność akumulowania energii można obliczyć na podstawie kilku równoważnych wzorów

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\Delta E}{c V c \Delta t} = \frac{1}{V} \int_A \int_0^{(Fo)} \left| \frac{\partial \Theta(\vec{r}, f)}{\partial n} \right| d\left(\frac{A}{2}\right) df = \\ &= \frac{1}{V} \int_A \int_0^{(Fo)^*} (Bi)^* \left[\Theta^*(\vec{r}, f^*) - \psi^*(f^*) \right] d\left(\frac{A}{2}\right) = \Theta_m[(Fo)] - \Theta_o(0) \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie $\Theta_m(f)$ oznacza średnią objętościowo temperaturę zredukowaną zdefiniowaną za pomocą wzoru

$$\Theta_m(f) = \frac{1}{V} \int_V \Theta(\vec{r}, f) dV \quad (6)$$

Jak to wynika z równań warunku początkowego (2) i wzoru definicyjnego (6) - wartości średnie $\Theta_m[(Fo)]$ i $\Theta_o(0)$ występujące w równaniu (5) można zastąpić przez $\Theta_m^*(0)$ i $\Theta_m^*[(Fo)^*]$.

O wartości liczbowej \mathcal{H} decydują: kształt elementu wypełnienia, postać funkcji temperatury gazów $\psi(f)$ i $\psi^*(f^*)$ oraz liczby kryterialne (Bi) , $(Bi)^*$, (Fo) i $(Fo)^*$.

2. ELEMENT WYPEŁNIENIA GRZANY I CHŁODZONY OKRESOWO PRZY STAŁEJ LICZBIE BIOTA I ZMIENNEJ TEMPERATURZE GAZU

Rozwiązanie tego zagadnienia dostosowane jest do warunków, gdy temperatura gazów omywających element wypełnienia, w odstępie czasu równym jednemu cyklowi ma dowolny przebieg, natomiast w odstępie czasu większym od jednego cyklu - zmienia się okresowo.

Precyzując dokładniej warunki brzegowe (3) przyjmuje się, że znana jest wcześniej przybliżona postać składnika S uwzględniającego wpływ wymiany energii promienistej pomiędzy niektórymi składnikami gorącego gazu, a ścianą elementu wypełnienia. Niezależnym argumentem funkcji S jest czas f . W szczególnym przypadku S może przyjąć wartość stałą.

Dalej zakłada się, że współczynnik wnikania ciepła, a więc i proporcjonalna do niego liczba BIOTA dla całego procesu jest niezmienna $(Bi) = (Bi)^* = \text{idem}$. Biorąc pod uwagę jedynie konwekcyjny przepływ ciepła - założenie takie w działających re-generatorach jest dopuszczalne.

Dla wymienionych założeń warunki brzegowe (3) można zapisać następująco

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\partial \Theta(\vec{r}, f)}{\partial n} &= (Bi) [\Theta(\vec{r}, f) - \vartheta(f)] - S(f) & \vec{r} \in A \\ - \frac{\partial \Theta^*(\vec{r}, f^*)}{\partial n} &= (Bi) [\Theta^*(\vec{r}, f^*) - \vartheta^*(f^*)] & \vec{r} \in A \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Przedmiotem dalszej analizy będzie zespół równań (1), (2) i (3a).

2.1. Wypełnienie o kształcie dowolnym

W przeprowadzonych dalej rozważaniach brany jest pod uwagę zbiór funkcji ortogonalnych $v(\mu_j \vec{r})$. Dla dowolnego kształtu elementu wypełnienia funkcje $v(\mu_j \vec{r})$ spełniają równanie różniczkowe

$$\nabla^2 v(\mu \vec{r}) + \mu^2 v(\mu \vec{r}) = 0 \quad (7)$$

wraz z warunkiem brzegowym

$$-\frac{\partial v(\mu \vec{r})}{\partial n} = (Bi) v(\mu \vec{r}) \quad \vec{r} \in A \quad (8)$$

stanowiącym podstawę do wyznaczenia liczbowych wartości μ_j zwanych wartościami własnymi. Drugi czynnik rozwiązania - odpowiadający zredukowanemu czasowi - ma postać funkcji wykładniczej:

$$\exp(-\mu_j^2 f).$$

Dalej podane zostaną ogólne wzory na zredukowaną temperaturę elementu wypełnienia dotyczące fazy grzania $\Theta(\vec{r}, f)$ i fazy chłodzenia $\Theta^*(\vec{r}, f^*)$. Ostatecznie rozwiązanie układu równań (1) i (3a) ma postać

$$\begin{aligned} \Theta(\vec{r}, f) &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \left[B_j e^{-\mu_j^2 f} + H_j(f) \right] v(\mu_j \vec{r}) \\ \Theta^*(\vec{r}, f^*) &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \left[B_j^* e^{-\mu_j^2 f^*} + H_j^*(f^*) \right] v(\mu_j \vec{r}) \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie: G_j - element rozwinięcia jednostki w szereg według funkcji $v(\mu_j \vec{r})$. Znaczenie elementu G_j wynika z wzoru

$$G_j = \frac{\int_V v(\mu_j \vec{r}) dV}{\int_V v^2(\mu_j \vec{r}) dV} \quad (10)$$

Symbolami $H_j(f)$ oraz $H_j^*(f^*)$ oznaczono następujące funkcje czasu

$$\left. \begin{aligned} H_j(f) &= \int_0^f \mu_j^2 e^{-\mu_j^2(f-\varphi)} \left[\vartheta(\varphi) + \frac{S(\varphi)}{(B_1)} \right] d\varphi \\ H_j^*(f^*) &= \int_0^{f^*} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2(f^* - \varphi^*)} \vartheta^*(\varphi^*) d\varphi^* \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

We wzorze (9) nieokreślone są jeszcze stałe B_j i B_j^* . Znaczenia tych stałych można otrzymać w rezultacie wstawienia zależności (9) do równań warunku początkowego (2) i przyrównania do zera wyrazów stojących przy funkcjach $v(\mu_j \vec{r})$. Stąd

$$B_j = \frac{H_j^* + e_j^* H_j}{1 - e_j e_j^*} \quad B_j^* = \frac{H_j + e_j H_j^*}{1 - e_j e_j^*} \quad (12)$$

gdzie:

$$e_j = \exp \left[-\mu_j^2(F_0) \right] \quad \text{i} \quad e_j^* = \exp \left[-\mu_j^2(F_0)^* \right] \quad (13)$$

Skrótem H_j i H_j^* oznaczono wartości funkcji $H_j(f)$ i $H_j^*(f^*)$ dla czasów f i f^* równych liczbom FOURIERA (Fo) i $(Fo)^*$, $H_j = H_j[(Fo)]$ oraz $H_j^* = H_j^*[(Fo)^*]$.

Rozważania matematyczne, które doprowadziły do tej postaci wzorów zostają pominięte. Dla początku przeprowadzona będzie jedynie kontrola drugiej składowej we wzorach (9), która to składowa powinna spełniać równanie FOURIERA-KIRCHHOFFA (1). O tym, że tak rzeczywiście jest można przekonać się biorąc pod uwagę następujące przekształcenia

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{\infty} G_j v(\mu_j \bar{r}) e^{-\mu_j^2 f^*} \frac{\partial}{\partial f^*} \left[e^{+\mu_j^2 f^*} H_j^*(f^*) \right] = \\
 & = \sum_{j=0}^{\infty} v(\mu_j \bar{r}) e^{-\mu_j^2 f^*} \mu_j^2 G_j \frac{\partial}{\partial f^*} \int_0^{f^*} e^{+\mu_j^2 \varphi^*} \psi^*(\varphi^*) d\varphi^* = \\
 & = \psi^*(f^*) \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j^2 G_j v(\mu_j \bar{r}) = -\psi^*(f^*) \sum_{j=0}^{\infty} G_j \nabla^2 v(\mu_j \bar{r}) = \\
 & = -\psi^*(f^*) \nabla^2 \sum_{j=0}^{\infty} G_j v(\mu_j \bar{r}) = -\psi^*(f^*) \nabla^2(1) = 0
 \end{aligned}$$

W celu ustalenia wzoru na zredukowaną zdolność akumulowania \mathcal{H} energii skojarzone będą równania (9) z wzorem (5). Efektem takiego postępowania jest następująca relacja

$$\mathcal{H} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \frac{(1 - e_j^*) H_j - (1 - e_j) H_j^*}{1 - e_j e_j^*} \quad (14)$$

gdzie: ε_j - parametr równy kwadratowi średniej wartości funkcji $v(\mu_j \vec{r})$ do średniego kwadratu tej funkcji. Definicja parametru ε_j zapisana w postaci wzoru jest następująca

$$\varepsilon_j = \frac{\left[\frac{1}{V} \int_V v(\mu_j \vec{r}) dV \right]^2}{\frac{1}{V} \int_V v^2(\mu_j \vec{r}) dV} \quad (15)$$

Z relacji tej wynika, że parametr ε_j zależy od kształtu elementu wypełnienia i liczby BIOTA decydującej o wartości własnej μ_j .

Proste przekształcenia matematyczne prowadzą do wniosku, że każdy z wyrazów ε_j jest mniejszy od jedności ($\varepsilon_j < 1$), a nieskończona suma składników ε_j równa jest jedności

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j = 1 \quad (16)$$

Pewną zaletę przy graficznym przedstawieniu parametru ε_j ma wielkość E_i zdefiniowana jako suma i wyrazów ε_j - gdzie $0 \leq j \leq i$. Z definicji tej wynikają następujące wzory

$$E_i = \sum_{j=0}^{j=i} \varepsilon_j \quad \text{oraz} \quad E_{\infty} = 1.$$

Interesujące są wnioski jakie można wyprowadzić na podstawie wzoru (14). Przyjmując stałą wartość wielkości $S = \text{idem}$, otrzymuje się uproszczony wzór na zredukowaną zdolność akumulowania energii

$$\mathcal{H} = \frac{S}{(Bi)} \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{E}_j \frac{(1-e_j^*)(1-e_j)}{1 - e_j e_j^*} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{E}_j \frac{(1-e_j^*)\tilde{H}_j - (1-e_j)H_j^*}{1 - e_j e_j^*} \quad (14a)$$

gdzie: \tilde{H}_j - wielkość określona równaniem (11), w którym pominięto człon $S(\varphi)$. Założenie stałej wartości $S = \text{idem}$ jest spełnione tym lepiej im mniejsze są wahania bezwzględnej temperatury gazu i bezwzględnej temperatury ściany wypełnienia. Założenie to ma swe źródła nie tyle w zgodności z rzeczywistością ile w wynikających stąd uproszczeniach matematycznych. Z tych też przyczyn autorzy prac [7], [8], [25] i [26] przyjmowali warunki brzegowe drugiego rodzaju. W pracach tych zakładano jako stały nie tylko transport energii drogą promieniowania lecz także i strumień ciepła wnikałego do ścian drogą konwekcji i to zarówno dla fazy grzania jak i fazy chłodzenia.

Gdyby wziąć pod uwagę skokowe zmiany temperatury gazu omywającego wypełnienie, którym odpowiadałyby wartości zredukowanych temperatur np.: $\psi(f) = 1$ i $\psi^*(f^*) = 0$ - to wzór (14a) na \mathcal{H} miałby postać jeszcze prostszą

$$\mathcal{H} = \left[1 + \frac{S}{(Bi)} \right] \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{E}_j \frac{(1-e_j^*)(1-e_j)}{1 - e_j e_j^*} \quad (14b)$$

Jeżeli w ostatniej zależności pominie się wyraz S , weźmie pod uwagę tylko jeden wskaźnik $j=0$ oraz przyjmie $\mathcal{E}_0 \approx 1$ - to wzór (14b) będzie podobny do zależności podanej przez W. HEILIGENSTAEDTA i H. HAUSENA

$$\mathcal{H} \approx \frac{(1 - e_0^*)(1 - e_0)}{1 - e_0 e_0^*}$$

Drogą prostych przekształceń można stwierdzić, że kwadrat zerowej wartości własnej μ_0^2 występujący w wykładnikach funkcji e_0 i e_0^* proporcjonalny jest do liczby BIOTA.

W celu przekonania się o tym, w jakim stopniu słuszne były uproszczenia, dla których wartość \mathcal{H} można liczyć wg ostatniego wzoru jako przykład wzięte będzie wypełnienie w kształcie nieograniczonej płyty. Funkcje $v(\mu_j, \bar{r})$ i wartości μ_j dla płyty można znaleźć w literaturze np.: [16]. Dla dwustronnie grzanej i chłodzonej płyty parametr \mathcal{E}_j określony jest wzorem

$$\mathcal{E}_j = 2 \frac{\sin^2 \mu_j}{\mu_j^2 \left(1 + \frac{\sin \mu_j \cos \mu_j}{\mu_j}\right)} = \frac{2(Bi)^2}{\mu_j^2 [\mu_j^2 + (Bi)^2 + (Bi)]} \quad (17)$$

Na rysunku 1 pokazano przebieg zmienności parametru \mathcal{E}_1 oraz nadwyżek wartości własnych $(\mu_j - j\pi)$ dla różnych liczb BIOTA. Wprost z rysunku tego można ustalić zakres liczb BIOTA, w którym dopuszczalne było założenie $\mathcal{E}_0 \approx 1$ oraz poprawne liczenie wartości własnej μ_0 z wzoru $\mu_0 = \sqrt{(Bi)}$.

Odpowiednie wykresy parametru \mathcal{E}_j i wartości μ_j dla elementu wypełnienia mającego kształt kraty pokazano na rysunkach 3 i 4.

Inny praktyczny wniosek jaki można wyprowadzić z wzoru (14) dotyczy obliczenia samej wartości \mathcal{H} . Dla dużych liczb BIOTA obliczenia te są żmudne ze względu na wolną zbieżność szeregu. Im większa jest liczba BIOTA tym więcej wyrazów należy zsumować w celu wyznaczenia poprawnej wartości \mathcal{H} . Gdyby jednak wziąć pod uwagę wartości cyfrowe μ_j oraz konkretne liczby FOURIERA (Fo) i $(Fo)^*$, to okazałoby się, że wyrazy e_j oraz e_j^* [wzór (13)] bardzo szybko dążą do zera. Tak więc począwszy od wskaźnika np.: $j=m$ zamiast członu $(1-e_j^*)(1-e_j)/(1-e_j e_j^*)$

można wstawiać jedność. Założenie to pozwala na szybkie obliczenie wolnozbieżnej sumy częściowej $\sum_{j=m}^{\infty} \varepsilon_j$ - która równa jest wtedy $1 - E_{m-1}$.

W konkretnym przypadku dotyczącym nieograniczonej płyty, liczby BIOTA (Bi) = 10, liczb FOURIERA (Fo) = 2.0 i $(Fo)^* = 1.0$ i skokowych zmian temperatury gazu $\phi(f) = 1$ i $\phi^*(f)^* = 0$ do obliczenia \mathcal{H} wystarczy wziąć tylko zerowy wyraz

$$\mathcal{H} \approx \varepsilon_0 \frac{(1-e_0)(1-e_0^*)}{1 - e_0 e_0^*} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \approx 1 - \varepsilon_0 \left[1 - \frac{(1-e_0)(1-e_0^*)}{1 - e_0 e_0^*} \right] = 0,8753$$

gdyż dla $j \geq 1$: $e_j \approx 0$ i $e_j^* \approx 0$, a suma $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j$ jest uzupełnieniem do jedności parametru ε_0 :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = 1 - E_0 = 1 - \varepsilon_0$$

Przedstawione rozumowanie jest także słuszne dla dowolnej postaci funkcji $\phi(f)$ i $\phi^*(f^*)$, co pozwala na duże uproszczenia obliczeń całego regeneratora, w których \mathcal{H} należy liczyć wielokrotnie. Analizowany przypadek dotyczył wprowadzie dużej liczby BIOTA, jednak należy zaznaczyć, że podane wnioski słuszne są i dla małych liczb BIOTA i to tym bardziej im mniejsza jest liczba (Bi).

2.2. Wypełnienie w kształcie kraty

Określenie pola temperatury i zdolności akumulowania \mathcal{H} energii w elemencie wypełnienia o kształcie kraty jest zagadnieniem złożonym i dlatego należy je potraktować oddzielnie. Główna trudność polega tutaj na dostosowaniu rozwiązania równania FOURIERA-KIRCHHOFFA do warunków jakie ma spełniać funkcja temperatury na brzegu obszaru o skomplikowanym kształcie (rys. 2).

Analizowany obszar będzie stanowił niepowtarzalny fragment wypełnienia kratowego - reprezentujący jednak wszystkie jego geometryczne cechy. Obszar ten ma kształt trapezu (rys. 2) ograniczonego z trzech stron osiami symetrii dla pola temperatury oraz z jednej strony fragmentem ściany kraty, przez którą ścianę odbywa się wymiana energii.

Na rysunku 2a zaznaczone są rozmiary elementu wypełnienia: jego grubość D oraz rozstaw L pomiędzy osiami tworzącymi kratę. Jako charakterystyczny rozmiar liniowy l_0 przyjęto połowę grubości elementu $l_0 = D/2^x$). Proporcje rozmiarów elementu wypełnienia kratowego uwzględnia tzw. liczba kształtu K , zdefiniowana za pomocą wzoru

$$K = \frac{l_0 A}{V} = \frac{L-D}{L-D/2} \quad \text{lub} \quad K = \frac{l_0}{l_e} = \frac{L-D}{L-D/2} \quad (18)$$

Długość podstawy trapezu w jednostkach bezwymiarowych wynosi $l_0 = L/D$ (rys. 2b). Dla przyjętego już rozmiaru l_0 zreduko-

^{x)} Należy zwrócić uwagę, że również możliwe było przyjęcie innego rozmiaru l_0 równego ekwiwalentnej grubości wypełnienia ustalonej z wzoru $l_e = V/A = \frac{D}{2} \frac{L-D/2}{L-D}$. Definicja taka celowa w równaniach analizy wymiarowej jest zupełnie niepraktyczna przy analitycznym rozwiązaniu problemu.

wane współrzędne ξ i η są odpowiednio równe $\xi = 2x/D$ oraz $\eta = 2y/D$.

Dalszym etapem będą poszukiwania wartości własnych μ_j i funkcji własnych $v(\mu_j, \bar{r}) = v(\xi, \eta)$ - dla obszaru w kształcie trapezu.

Po odseparowaniu w równaniu FOURIERA-KIRCHHOFFA zmiennej zależnej od czasu, otrzymuje się równanie, które ma sprawdzać funkcja v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \mu^2 v = 0 \quad (19)$$

Wzdłuż trzech boków trapezu pochodne funkcji $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ i $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ spełniają warunki brzegowe:

a) warunki brzegowe symetrii pola temperatury

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial v}{\partial \xi} \right|_{\xi=b} = 0 \quad (20)$$

b) warunki brzegowe trzeciego rodzaju

$$-\left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = (Bi) v \Big|_{\eta=1} \quad (8a)$$

Natomiast wzdłuż boku czwartego wyznaczonego przez prostą o równaniu $\eta = \xi$ warunek brzegowy symetrii ma postać

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} = \cos \frac{\pi}{4} \left. \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|_{\eta=\xi} - \sin \frac{\pi}{4} \left. \frac{\partial v}{\partial \xi} \right|_{\eta=\xi} = 0 \quad (21)$$

gdzie ζ jest zredukowaną współrzędną prostopadłą do tego boku.

Funkcję v można wyznaczyć różnymi sposobami. W pracy tej omówiony zostanie tylko jeden z nich - polegający na podzie-

leniu obszaru trapezu na prostokąt oraz równoramienny prostokątny trójkąt i na sformułowaniu funkcji v oddzielnie w każdym z tych obszarów.

Rozwiązanie równania (19) zbudowane będzie na zbiorze ortogonalnych funkcji $\cos \nu_m$. Występujące w tych funkcjach wartości własne ν_m są pierwiastkami równania $\nu_m \sin \nu_m = (Bi) \cos \nu_m$ gdzie wskaźnik m przyjmuje wartości $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dalej pod uwagę brany będzie także inny zbiór funkcji pomocniczych, które zdefiniowano wzorem

$$M_m(\omega) = (Bi) + \sqrt{\nu_m^2 - \mu^2} \operatorname{tgh} \left[\sqrt{\nu_m^2 - \mu^2} (1 - \omega b) \right] \quad (22)$$

W zależności tej pierwszy z parametrów ω równy jest 0 lub 1 drugi zaś μ może przyjmować tylko dyskretne wartości μ_j . Sposób wyznaczenia wartości μ_j omówiony zostanie dalej. Funkcja $v(\mu \bar{r})$ określona będzie przez różne wzory w zależności od tego, która z części trapezu jest rozpatrywana. Stąd

$$v(\mu \bar{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{M_m(1)} \frac{\cosh \left[\sqrt{\nu_m^2 - \mu^2} (\xi - b) \right]}{\cosh \left[\sqrt{\nu_m^2 - \mu^2} (1 - b) \right]} \frac{\cos \nu_m \eta}{\cos \nu_m} \\ \text{dotyczy obszaru "prostokąta"} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i}{M_i(0)} \left[\frac{\cosh \sqrt{\nu_i^2 - \mu^2} \xi \cos \nu_i \eta}{\cosh \sqrt{\nu_i^2 - \mu^2} \cos \nu_i} + \right. \\ \left. + \frac{\cosh \sqrt{\nu_i^2 - \mu^2} \eta \cos \nu_i \xi}{\cosh \sqrt{\nu_i^2 - \mu^2} \cos \nu_i} \right] \\ \text{dotyczy obszaru "trójkąta"} \end{array} \right. \quad (23)$$

Dla wskaźników $m=1$ stałe C_m i C_1 są także sobie równe. Prawe strony w równaniu (23) dobrano w ten sposób, aby wzdłuż boków trapezu funkcja v spełniała wszystkie warunki brzegowe sformułowane za pomocą wzorów (20), (21) oraz (8a).

Wzdłuż linii dzielącej trapez na obszary trójkąta i prostokąta ta sama funkcja $v(\mu\bar{r})$ opisana jest jednocześnie przez dwa wzory. Wynika stąd, że na linii rozdziału wzory te powinny być identyczne

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{M_m(1)} \frac{\cos v_m \eta}{\cos v_m} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i}{M_i(0)} \left[\frac{\cos v_i \eta}{\cos v_i} + \frac{\cosh \sqrt{v_i^2 - \mu^2} \eta}{\cosh \sqrt{v_i^2 - \mu^2}} \right] \quad (24)$$

Drogą prostych przekształceń można sprawdzić, że stałe $C_m/M_m(1)$ i $C_i/M_i(0)$ są tak dobrane, aby wzdłuż linii rozdziału, tj. dla $\xi = 1$ równe były także pochodne funkcji $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ wzdłuż zmiennej η .

W rezultacie obustronnego pomnożenia równania (24) przez funkcję $\cos v_p$, a następnie scałkowania wyniku wzdłuż linii rozdziału, tj. od $\eta=0$ do $\eta=1$ dla $\xi=1$ - otrzymuje się nieograniczony układ równań, w którym niewiadomymi są stałe C_p . Reprezentacyjne równanie tego układu, dla wskaźnika p przyjmującego znaczenia $p = 0, 1, 2, \dots$ - można napisać następująco

$$C_p \frac{v_p}{2} \left[\frac{1}{M_p(1)} - \frac{1}{M_p(0)} \right] - \frac{v_p^2}{v_p^2 + (Bi)^2 + (Bi)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v_p}{v_p^2 + v_i^2 - \mu^2} C_i = 0 \quad (25)$$

W dalszym ciągu należy znaleźć takie rozwiązanie układu $p = 0, 1, 2, \dots$ równań, dla którego stałe C_i są różne od zera. Ponieważ prawa strona równania (25) jest zerem, przeto układ ten ma rozwiązanie niezerowe tylko wtedy, gdy jego wyznacznik charakterystyczny W równy jest zeru. Jak to wynika

z równania (25) elementy wyznacznika W zależą od parametru μ^2 . Na parametr ten nie nakładano dotąd żadnych ograniczeń. Dlatego też dalej można badać zależność pomiędzy wartością wyznacznika W i parametrem μ^2 . Interesujące będą tylko te spośród wartości $\mu^2 = \mu_j^2$, dla których wyznacznik $W(\mu^2) = 0$. Analiza matematyczna pozwala na ustalenie przedziału i ilości wartości μ_j^2 zwanych dalej wartościami własnymi funkcji $v(\mu_j, \bar{r})$. Okazuje się, że wartości tych jest nieskończenie wiele i wszystkie one są liczbami dodatnimi. Numerację wartości wskaźnikiem $j = 0, 1, 2, 3, \dots$ ustalono kierując się zasadą, wg której rosnącym znaczeniem μ_j przyporządkowane są coraz to wyższe wskaźniki. Stąd $\mu_0^2 < \mu_1^2 < \mu_2^2 < \mu_3^2 \dots$.

Wyznacznik W teoretycznie składa się z nieskończenie wielu wyrazów. Do konkretnych obliczeń potrzebne jest ustalenie możliwości zastąpienia wyznacznika nieograniczonego - wyznacznikiem ograniczonym. W tym celu zbadane będą granice, do których dążą wyrazy wyznacznika dla wskaźników: $p \rightarrow \infty$ oraz $i \rightarrow \infty$. Na podstawie definicji funkcji $M_p(\omega)$ [równ. (22)] oraz wartości liczbowych jakie przyjmują wyrazy v_p - można ustalić, że dla $\mu^2 \neq \pm \infty$ wyrazy wyznacznika wzdłuż głównej jego przekątnej $p = i$, $p \rightarrow \infty$ dążą do jedności

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{v_p}{2} \left[\frac{1}{M_p(1)} - \frac{1}{M_p(0)} \right] = \frac{v_p^2}{v_p^2 + (Bi)^2 + (Bi)} \cdot \frac{v_p}{2v_p^2 - 4} \rightarrow 1$$

natomiast pozostałe wyrazy wyznacznika dążą do zera i to tym prędzej im większy jest wskaźnik p lub i . Biorąc więc pod uwagę te rezultaty oraz reguły obliczania wyznaczników, można uznać za usprawiedliwione zastąpienie wyznacznika nieograniczonego wyznacznikiem ograniczonym pod warunkiem, że do obliczeń weźmie się wystarczająco dużo wyrazów. Dla znanej już

wartości μ_j^2 można wyznaczyć stałe C_{j1} , z tym, że jedna z nich pozostaje nadal nieokreślona.

Stałe C_{j1} dla każdej wartości własnej μ_j^2 są inne co też należałoby uwzględnić oznaczając je podwójnym indeksem i oraz j , tj. C_{ji} . Umownie przyjmuje się, że nieokreśloną stałą jest stała C_{j0} i dalej dobiera się dla niej wartość równą jedności $C_{j0} = 1$. Z wzorów (9) i (14) wynika, że funkcje $v(\mu_j, \bar{r})$ oraz parametry ϵ_j stanowią podstawę do obliczenia pola temperatury i zdolności akumulowania energii w elemencie wypełnienia regeneratora. W celu obliczenia parametru ϵ_j występującego w równaniu (14) należy znać średnie wartości samej funkcji \bar{v} oraz jej kwadratu \bar{v}^2 . Odpowiednie wzory na \bar{v}_j i \bar{v}_j^2 mają postać

$$\bar{v}_j = \frac{1}{V} \int v(\mu_j, \bar{r}) dv = \sum_{i=0}^{\infty} C_{ji} \frac{(Bi)^2}{(v_1^2 - \mu_j^2) v_1^2} \left[\frac{1}{M_1(1)} - \frac{1}{M_1(0)} \right]$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{v}_j^2 = & \frac{1}{V} \int v^2(\mu_j, \bar{r}) dv = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D_m D_i}{(v_1^2 + v_m^2 - \mu_j^2)^2} + \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} C_{ji} \left\{ \frac{1 + \frac{(Bi)^2 + (Bi)}{v_1^2}}{4 M_1(0)} \left[\frac{1}{\cosh^2 \sqrt{v_1^2 - \mu_j^2}} + \frac{\operatorname{tgh} \sqrt{v_1^2 - \mu_j^2}}{\sqrt{v_1^2 - \mu_j^2}} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \frac{(Bi)^2 + (Bi)}{v_1^2}}{4 M_1(1)} \left[\frac{b-1}{\cosh^2 \left[\sqrt{v_1^2 - \mu_j^2} (b-1) \right]} + \frac{\operatorname{tgh} \left[\sqrt{v_1^2 - \mu_j^2} (b-1) \right]}{\sqrt{v_1^2 - \mu_j^2}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Znając wzory na \bar{v}_j i $\sqrt{v_j^2}$ na podstawie zależności (15) można wyznaczyć parametr ε_j .

Konkretne obliczenia cyfrowe wartości własnych μ_j i parametrów ε_j przeprowadzono dla kratowego elementu wypełnienia o liczbie kształtu $K = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ i 1 (płyta) oraz dla różnych liczb BIOTA (Bi). Wyniki obliczeń pokazano na rysunkach 1, 3 i 4.

Obliczenie zdolności akumulowania \mathcal{H} energii w kratowym elemencie wypełnienia możliwe jest dla konkretnej funkcji $\mathcal{J}(f)$ i $\mathcal{J}^*(f^*)$. Jako pierwsze przybliżenie przyjęto, że funkcje są niezmiennie, tj. $\mathcal{J}(f) = 1$ oraz $\mathcal{J}^*(f^*) = 0$. Formułując założenia dotyczące czasów trwania fazy grzania i chłodzenia przyjmuje się dwie alternatywy. W pierwszej z nich czasy te są jednakowe, a odpowiadające im liczby FOURIERA są równe $(Fo) = (Fo)^*$. W drugiej zaś czas grzania jest dwukrotnie większy od czasu chłodzenia, co zazwyczaj spełnione jest w działających regeneracjach hutniczych. W przypadku tym proporcjonalne do czasów liczby FOURIERA spełniają zależność $(Fo) = 2(Fo)^*$. Odpowiednie wykresy, na których zaznaczono zależność \mathcal{H} od liczb FOURIERA dla różnych liczb kształtu $K = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ i 1 (płyta) i liczb BIOTA (Bi) = 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 2,0; 3,0; 5,0 i 10,0 - pokazano na rysunkach 5, 8a i 9a.

Na przykładzie kratowego elementu wypełnienia pokazano wpływ jaki ma liczba kształtu K na wielkość \mathcal{H} . Dla różnych liczb FOURIERA, przy ustalonej liczbie BIOTA - zależność \mathcal{H} od liczby kształtu pokazano na rysunkach 6. Z zamieszczonych tam wykresów (rys. 6) wynika, że małym liczbom FOURIERA $\frac{1}{2}(Fo) = (Fo)^* < 1$ odpowiadają zmiany \mathcal{H} wraz z liczbą K , które z dobrym przybliżeniem można aproksymować linią.

3. ZAGADNIENIE SKOKOWYCH ZMIAN LICZBY BIOTA WYWOŁANYCH ZWROTEM KIERUNKU STRUMIENIA CIEPŁA WNIKAJĄCEGO DO ŚCIAN WYPEŁNIENIA

Założenia dotyczące dowolnego kształtu funkcji $\vartheta(f)$ i $\vartheta^*(f^*)$ wyrażającej zmianę temperatury gazu omywającego element wypełnienia regeneratora - są takie same jak w rozdziale poprzednim.

Przechodząc do bliższego określenia warunków brzegowych - opisanych równaniem (3), dla funkcji $S(\vartheta, \vartheta)$ dobrano wzór, który z dużym przybliżeniem będzie odpowiadał zmianie funkcji S wraz z temperaturą. Korzystając z definicji promienistego współczynnika wnikania ciepła α_r - za pomocą wzoru NEWTONA można opisać ilość energii przekazywanej drogą promieniowania od gazu do ścian elementu wypełnienia

$$S(\vartheta, \vartheta) = (Bi)_r (\vartheta - \vartheta)$$

gdzie $(Bi)_r$ - liczba BIOTA odpowiadająca współczynnikowi α_r . Po uwzględnieniu w jednej liczbie BIOTA $(Bi) = (Bi)_{konw} + (Bi)_r$ obydwóch procesów, tj. konwekcji i promieniowania - równania warunków brzegowych można zapisać następująco

$$\left. \begin{aligned} - \frac{\partial \vartheta(\vec{r}, f)}{\partial n} &= (Bi) [\vartheta(\vec{r}, f) - \vartheta(f)] \quad \vec{r} \in A \\ - \frac{\partial \vartheta^*(\vec{r}, f^*)}{\partial n} &= (Bi)^* [\vartheta^*(\vec{r}, f^*) - \vartheta^*(f^*)] \quad \vec{r} \in A \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

Dalej przyjmuje się liczby BIOTA jako niezmiennie: $(Bi)^* =$ = idem, $(Bi) =$ idem oraz $(Bi) \neq (Bi)^*$. W czasie trwania procesu liczba BIOTA zmienia się skokowo, przyjmując na przemian jedną z dwóch wartości (Bi) lub $(Bi)^*$. Tak więc przez pe-

wien czas w dowolnym miejscu na powierzchni elementu wypełnienia liczba BIOTa jest taka sama, a jej zmiana na nową wartość następuje w wyniku przejścia z fazy grzania do fazy chłodzenia lub odwrotnie - gwałtownie na całej powierzchni. O ile założenie $(Bi)^* = idem$ na ogół nie powinno budzić zastrzeżeń, o tyle przyjęcie $(Bi) = idem$ jest mniej zgodne z rzeczywistością. Wynika to stąd, że linearyzacja skomplikowanej funkcji $S(\Theta, \delta)$ stanowi jedynie pierwsze przybliżenie tej funkcji.

Przedmiotem dalszej analizy będzie układ równań (1) i uzupełniających go warunków (2) i (3b).

Biorąc pod uwagę rzeczywiste wartości cyfrowe jakie przyjmują liczby BIOTa, można założyć, że liczba (Bi) jest większa od liczby $(Bi)^*$. Z praktycznego punktu widzenia celowe jest wprowadzenie parametru δ będącego miarą względnej różnicy liczb BIOTa dla fazy grzania i chłodzenia. Parametr δ zdefiniowano za pomocą wzoru

$$\delta = 1 - \frac{(Bi)^*}{(Bi)} \quad (26)$$

gdzie δ spełnia nierówność $0 \leq \delta < 1$. Przeprowadzone dalej rozważania będą także słuszne dla przypadku odwrotnego $(Bi) < (Bi)^*$, pod warunkiem, że zamienione zostaną wszystkie oznaczenia dotyczące faz grzania i chłodzenia.

Dla każdej z faz jednego cyklu zaproponowano następujące wzory na zredukowaną temperaturę elementu wypełnienia regeneratora

$$\Theta(\vec{r}, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \Theta_k(\vec{r}, f) \quad \text{oraz} \quad \Theta^*(\vec{r}, f^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \Theta_k^*(\vec{r}, f^*) \quad (27)$$

gdzie: k - liczba naturalna. Można wykazać, że przy odpowiedniej definicji zredukowanej temperatury składowe θ_k i θ_k^* co do wartości bezwzględnej są mniejsze od jedności.

Wzory wynikłe ze skojarzenia zależności (26) z równaniem FOURIERA-KIRCHHOFFA (1) oraz uzupełniającymi je warunkami początkowymi (2) i brzegowymi (3b) - są spełnione niezależnie od wartości jakie przyjmuje parametr δ . Przyrównując do zera wyrazy stojące przy wielkości δ^k - otrzymuje się nieograniczoną ilość grup równań.

Dla wskaźnika k układ równań, który spełniają składowe $\theta_k(\vec{r}, f)$ i $\theta_k^*(\vec{r}, f^*)$ temperatury zredukowanej ma postać

$$\nabla^2 \theta_k(\vec{r}, f) = \frac{\partial \theta_k(\vec{r}, f)}{\partial f} \quad \text{i} \quad \nabla^2 \theta_k^*(\vec{r}, f^*) = \frac{\partial \theta_k^*(\vec{r}, f^*)}{\partial f^*} \quad (28)$$

dla równania FOURIERA-KIRCHHOFFA

$$\theta_k(\vec{r}, 0) = \theta_k^*[\vec{r}, (f_0)^*] \quad \text{i} \quad \theta_k[\vec{r}, (f_0)] = \theta_k^*(\vec{r}, 0) \quad \vec{r} \in V \quad (29)$$

dla warunków początkowych oraz

$$-\frac{\partial \theta_k(\vec{r}, f)}{\partial n} = \begin{cases} (Bi) [\theta_0(\vec{r}, f) - \psi(f)] & \text{gdy } k=0 \\ (Bi) \theta_k(\vec{r}, f) & \text{gdy } k \geq 1 \end{cases} \quad (30)$$

$$-\frac{\partial \theta_k^*(\vec{r}, f^*)}{\partial n} = \begin{cases} (Bi) [\theta_0^*(\vec{r}, f^*) - \psi^*(f^*)] & \text{gdy } k=0 \\ (Bi) [\theta_1^*(\vec{r}, f^*) - \theta_0^*(\vec{r}, f^*) + \psi^*(f^*)] & \text{gdy } k=1 \\ (Bi) [\theta_k^*(\vec{r}, f^*) - \theta_{k-1}^*(\vec{r}, f^*)] & \text{gdy } k \geq 2 \end{cases}$$

dla warunków brzegowych, gdzie $\vec{r} \in A$.

Układ równań (28), (29) i (30) odpowiada jednakowym liczbom BIOTA, a dla wskaźnika $k=0$ jest identyczny z układem (1), (2) i (3a) rozwiązany w poprzednim rozdziale.

Zredukowaną zdolność akumulowania χ energii oblicza się z wzoru, który powstał w następstwie wstawienia równań (27) do zależności (5). Wzór ten ma postać

$$\chi = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \chi_k \quad (31)$$

gdzie $\chi_k = \theta_{mk} [(Fo)] - \theta_{mk}(0)$ jest różnicą pomiędzy średnimi wartościami składowych θ_k na końcu i na początku fazy grzania.

W szczególnym przypadku, gdy temperatura powierzchni elementu wypełnienia zależy tylko od czasu, a nie zależy od miejsca na powierzchni elementu wypełnienia - rozwiązanie układu równań (29), (30) i (31) dla dowolnego wskaźnika k okazuje się wyjątkowo proste. Warunek ten spełniony jest dla elementów w kształcie płyt i okrągłych prętów, a więc kształtów które najczęściej rozpatrywane są w obliczeniach. Dlatego też należałoby opisać sposoby wyznaczania składowych $\theta_k(\vec{r}, f)$ i $\theta_k^*(\vec{r}, f^*)$ naprzód dla przypadku, gdy funkcja $\theta_k^*(\vec{r}, f^*)|_{\vec{r} \in A}$ nie zależy od współrzędnej punktu położonego na powierzchni elementu, a dopiero potem podać ogólne rozwiązanie tego zagadnienia.

3.1. Dobór temperatur "umownego gazu"

Jeżeli składowe $\theta_k^*(\vec{r}, f^*)|_{\vec{r} \in A}$ temperatury na ścianie elementu wypełnienia nie zależą od miejsca lecz wyłącznie od czasu, to problem wyznaczenia zredukowanej temperatury i zdolności akumulowania χ energii dla skokowych zmian liczby BIOTa - sprowadza się do wielokrotnego rozwiązania przypadku odpowiadającego jednakowym liczbom BIOTa. Zależne od czasu funkcje $\theta_k^*(\vec{r}, f^*)|_{\vec{r} \in A}$ zostaną oznaczone nowymi symbolami $R_k(f)$ i $R_k^*(f^*)$

$$R_0(f) = \psi(f) \quad \text{i} \quad R_0^*(f^*) = \psi^*(f^*) \quad \text{dla } k=0$$

$$R_1(f) = 0 \quad \text{i} \quad R_1^*(f^*) = \theta_0^*(\bar{F}, f^*)|_{\bar{F} \in A} - \psi^*(f^*) \quad \text{dla } k=1$$

oraz

$$R_k(f) = 0 \quad \text{i} \quad R_k^*(f^*) = \theta_{k-1}^*(\bar{F}, f^*)|_{\bar{F} \in A} \quad \text{dla } k \geq 2.$$

Stosując te oznaczenia można ponownie zapisać równania warunków brzegowych

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \theta_k(\bar{F}, f)}{\partial n} &= (B1) [\theta_k(\bar{F}, f) - R_k(f)] & \bar{F} \in A \\ -\frac{\partial \theta_k^*(\bar{F}, f^*)}{\partial n} &= (B1) [\theta_k^*(\bar{F}, f^*) - R_k^*(f^*)] & \bar{F} \in A \end{aligned} \right\} \quad (3c)$$

Rozwiązanie układu równań (28), (29) i (3c) należy powtarzać wielokrotnie - każdorazowo dla innych warunków brzegowych, zmieniających się wraz ze wzrostem wskaźnika k . Funkcje $R_k(f)$ i $R_k^*(f^*)$ z warunku (3c) formalnie mogą być potraktowane, jako temperatury "umownego gazu" omywającego element wypełnienia (rys. 7).

Podczas porównywania układów równań (1), (2) i (3a) oraz (28), (29) i (3c) - różnice można dostrzec jedynie w niektórych oznaczeniach. Dlatego też wszystkie wnioski wyprowadzone w podrozdziale 2.1 będą słuszne również w odniesieniu do rozpatrywanego przypadku.

Należałoby jeszcze uzupełnić wzór (31). Dla wspomnianych założeń wyrazy \mathcal{H}_k mogą być liczone z zależności

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_k^* - \mathcal{H}_{k-1}^* \quad \text{dla } k \geq 1, \quad \text{gdzie } \mathcal{H}_k^* = (B1) K \int_0^{(F_0)^*} R_{k+1}^*(f^*) df^*$$

Z równań (28), (29) i (3c) wynika, że wszystkie wyrazy \mathcal{H}_k i \mathcal{H}_k^* odpowiadają jednej liczbie BIOTA - (Bi).

Ilustrację tej metody rozwiązania zagadnienia stanowi przykład wyznaczenia zredukowanej temperatury i zdolności akumulowania energii w elemencie wypełnienia mającym kształt nieograniczonej płyty. Płyta o grubości D omywana jest przez gaz, którego temperatura zmienia się okresowo skokami. Zmianom tym odpowiadają funkcje zredukowanej temperatury gazu $\psi(f) = 1$ i $\psi^*(f^*) = 0$. Dopływ i odpływ ciepła jest symetryczny względem środkowej płaszczyzny płyty.

W rezultacie rozwiązania układu równań (28), (29) i (3c) dla wskaźników $k = 0, 1, \dots$ otrzymuje się następujące wzory na zredukowaną temperaturę w płytowym elemencie wypełnienia

$$\left. \begin{aligned} \Theta_0(\xi, f) &= 1 - \sum_{j=0}^{\infty} G_j \frac{1-e_j^*}{1-e_j e_j^*} \cos \mu_j \xi e^{-\mu_j^2 f} \\ \Theta_0^*(\xi, f^*) &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \frac{1-e_j}{1-e_j e_j^*} \cos \mu_j \xi e^{-\mu_j^2 f^*} \end{aligned} \right\} (32)$$

dla $k=0$ oraz

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1(\xi, f) &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \frac{H_1^*}{1-e_j e_j^*} \cos \mu_j \xi e^{-\mu_j^2 f} \\ \Theta_1^*(\xi, f^*) &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \left[\frac{e_j H_1^*}{1-e_j e_j^*} e^{-\mu_j^2 f} + H_j^*(f^*) \right] \cos \mu_j \xi \end{aligned} \right\} (33)$$

dla $k=1$

gdzie:

$$H_j^*(f^*) = G_j \frac{1-e_j}{1-e_j e_j^*} \mu_j^2 \cos \mu_j f^* e^{-\mu_j^2 f^*} +$$

$$+ \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{\infty} G_m \frac{1-e_m}{1-e_m e_m^*} \mu_j^2 \cos \mu_m \frac{e^{-\mu_m^2 f^*} - e^{-\mu_j^2 f^*}}{\mu_j^2 - \mu_m^2}$$

$$H_j^* = H_j [(Fo)^*]$$

Przez ξ oznaczono zredukowaną współrzędną $\xi = \frac{2x}{D}$.

Dla liczby BIOTA (Bi) = 1.0 oraz liczb FOURIERA (Fo) = $(Fo)^* = 2$ na rysunku 7 pokazano zmianę w czasie zredukowanej temperatury gazu rzeczywistego i umownego oraz odpowiadające im zmiany temperatury ściany płyty. Pokazane na rysunku 7 krzywe nie powinny być interpretowane fizycznie, gdyż podejście do zagadnienia w tej metodzie jest czysto formalne.

Konkretne obliczenia dotyczą zdolności akumulowania \mathcal{H} energii w płycie, a wyniki tych obliczeń pokazano na wykresach. Wykresy funkcji $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ i \mathcal{H}_4 dla różnych liczb BIOTA i jednakowych czasów trwania fazy grzania i fazy chłodzenia pokazano na rysunku 8. Rysunek 9 dotyczy tych samych funkcji $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ i \mathcal{H}_4 z tym, że odpowiada proporcjom czasów grzania i chłodzenia występującym zazwyczaj w praktyce, tj. $(Fo) = 2(Fo)^*$.

Z wykresów (rys. 8b, c, d i e) widać, że wpływ członów $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ i \mathcal{H}_4 po przekroczeniu pewnej granicy maleje ze wzrostem liczb kryterialnych BIOTA - (Bi) i FOURIERA - $(Fo) = (Fo)^*$ lub $(Fo) = 2(Fo)^*$.

Wytłumaczenie tego jest następujące:

Długości czasu trwania każdej z faz, a więc dużym liczbom FOURIERA - odpowiada stabilizacja pola temperatury w elemencie wypełnienia. Temperatura elementu zbliża się wtedy do temperatury gazu, a wpływ warunków wnikania ciepła ujęty w liczbie BIOTA - jest nieznaczny. Skutkiem tego zanika wpływ wahań temperatury płynu z poprzednich faz-cyklu. W tym przypadku wielkości \mathcal{H} i \mathcal{H}_0 dążą do jedności, a udział członów $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ maleje.

Znaczne różnice pomiędzy liczbami BIOTA, z których każda jest wielka, w małym stopniu wpływają na wielkość \mathcal{H} . Dużym liczbom (Bi) oraz $(Bi)^*$ odpowiadają małe różnice pomiędzy temperaturami powierzchni elementu wypełnienia i gazu. Główny opór jaki napotyka ciepło wnikające do elementu występuje w materiale wypełnienia, a nie w przysściennnej warstwie gazu. W tym przypadku nawet kilkakrotny wzrost którejkolwiek z liczb BIOTA tylko nieznacznie zmieni przebieg temperatury na powierzchni elementu wypełnienia, co nie wpłynie wyraźnie na zdolność akumulowania energii.

Drogą prostego rozumowania można ustalić przedział zmienności składowych \mathcal{H}_k , która to wielkość spełnia nierówność $|\mathcal{H}_k| < 1$. Wzór (31) ograniczony tylko do czterech, a nawet do trzech wyrazów $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ i \mathcal{H}_2 daje dobre wyniki dla liczb BIOTA niewiele się różniących, co w praktyce często zachodzi.

3.2. Modyfikacja warunków brzegowych

W ogólnym przypadku, gdy kształt elementu wypełnienia jest dowolny, składowa temperatury $\theta_{k-1}^*(\bar{r}, f^*)|_{\bar{r} \in A}$ odpowiadająca punktom położonym na powierzchni elementu, zależy nie tylko od czasu f^* , lecz również i od współrzędnych tych punktów. Warunek brzegowy zapisany za pomocą równania (30) jest wtedy

niejednorodny względem funkcji Θ_{k-1}^* . Niejednorodność tą można usunąć drogą modyfikacji warunku brzegowego. W tym celu należy znaleźć nowe rozwiązanie równania FOURIERA-KIRCHHOFFA, gdyż dotychczas omówione całki szczególne są nieprzydatne, a rozwiązanie wspomnianego równania metodą rozdzielania zmiennych jest niewystarczające.

3.2a. Uogólnione rozwiązanie równania FOURIERA-KIRCHHOFFA

Dalej rozpatrzony będzie zbiór nowych funkcji $v_i(\vec{\mu}\vec{r})$. Na podstawie tego zbioru zbudowane zostanie rozwiązanie bardziej ogólne od rozwiązania utworzonego z całek $v(\mu_j, \vec{r}) \exp(-\mu_j^2 f)$. W zależności od indeksu i ($0 \leq i < \infty$) funkcje $v_i(\vec{\mu}\vec{r})$ będą miały zupełnie odmienną budowę, z tym, że indeksowi $i=0$ odpowiada znana z poprzednich rozdziałów funkcja $v(\vec{\mu}\vec{r}) = v_0(\vec{\mu}\vec{r})$. Nowe funkcje $v_i(\vec{\mu}\vec{r})$ są rozwiązaniami szczególnymi równania różniczkowego

$$\nabla^2 v_i(\vec{\mu}\vec{r}) + \mu^2 v_i(\vec{\mu}\vec{r}) = v_{i-1}(\vec{\mu}\vec{r}) \quad (34)$$

Równanie (34) stanowi formułę rekurencyjną do obliczenia funkcji $v_i(\vec{\mu}\vec{r})$ i odpowiada wskaźnikom $i \geq 1$.

Uogólnione rozwiązanie $F_m(\vec{\mu}\vec{r}, f)$ równania FOURIERA-KIRCHHOFFA zbudowane w oparciu o funkcje $v_i(\vec{\mu}\vec{r})$ oraz $\exp(-\mu^2 f)$ ma postać

$$F_m(\vec{\mu}\vec{r}, f) = e^{-\mu^2 f} W_m(\vec{\mu}\vec{r}, f) = e^{-\mu^2 f} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{m-1-i}}{(m-1-i)!} v_i(\vec{\mu}\vec{r}) \quad (35)$$

gdzie: m - liczba naturalna, $W_m(\vec{\mu}\vec{r}, f)$ - wielomian stopnia k zmiennej f .

Wielomian $W(\mu\vec{r}, f)$ spełnia następującą relację

$$\frac{\partial W_m(\mu\vec{r}, f)}{\partial f} = W_{m-1}(\mu\vec{r}, f)$$

Na podstawie wzoru definicyjnego (35) dla funkcji $F_m(\mu\vec{r}, f)$ oraz z ostatniej zależności można łatwo przekonać się, że funkcja F_m sprawdza równania FOURIERA-KIRCHHOFFA.

W konkretnym przypadku funkcje $v_1(\mu\vec{r})$ wyznaczono dla elementu wypełnienia o prostych kształtach, tj. dla płyty i okrągłego pręta. Na stronie 39 w specjalnym zestawieniu zebrano funkcje $v_1(\mu\vec{r})$ stanowiące rozwiązanie równania różniczkowego (34).

Początkowa funkcja $v_0(\mu\vec{r})$ odpowiada warunkom, w których gazy omywają element wypełnienia równomiernie wzdłuż całego obwodu, a więc: $v_0(\mu\vec{r}) = \cos \mu\xi$ dla płyty oraz $v_0(\mu\vec{r}) = J_0(\mu\xi)$ dla pręta okrągłego.

3.2b. Ujednorodnienie warunku brzegowego

Wyznaczenie składowych $\Theta_k(\vec{r}, f)$ nie zawiera nowych problemów w porównaniu z tymi, które omówiono w rozdziale 2.1. Stamtąd też należy brać wzory dla funkcji $\Theta_0(\vec{r}, f)$, tj. dla $k = 0$, natomiast dla wskaźnika $k \geq 1$ funkcjom $\Theta_k(\vec{r}, f)$ odpowiada wzór

$$\Theta_k(\vec{r}, f) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{kj} v_0(\mu_j \vec{r}) e^{-\mu_j^2 f} \quad (36)$$

gdzie stałe B_{kj} będą wyznaczone z warunku początkowego (29).

Składowym $\Theta_k^*(\vec{r}, f^*)$ zredukowanej temperatury wypełnienia dotyczącym fazy chłodzenia odpowiada wyrażenie matematyczne

Zbiór uogólnionych funkcji $v_i(\mu r)$
dla płyty i okrągłego pręta

Kształt	Indeks	Funkcje $v_i(\mu r)$
PŁYTA	0	$\cos \mu \xi$
	1	$\frac{\xi}{2\mu} \sin \mu \xi$
	2	$-\frac{\xi^2}{8\mu^2} \cos \mu \xi + \frac{\xi}{8\mu^3} \sin \mu \xi$
	3	$-\frac{\xi^2}{16\mu^4} \cos \mu \xi + \left(\frac{\xi}{16\mu^5} - \frac{\xi^3}{48\mu^3}\right) \sin \mu \xi$
	4	$\left(\frac{\xi^4}{384\mu^4} + \frac{\xi^2}{128\mu^6}\right) \cos \mu \xi - \left(\frac{\xi}{128\mu^7} + \frac{\xi^3}{64\mu^5}\right) \sin \mu \xi$
	5	$\left(\frac{\xi^4}{384\mu^6} - \frac{\xi^2}{256\mu^8}\right) \cos \mu \xi + \left(\frac{\xi}{256\mu^9} - \frac{\xi^3}{256\mu^7} + \frac{\xi^5}{3840\mu^5}\right) \sin \mu \xi$
PRĘT OKRĄGŁY	0	$J_0(\mu \xi)$
	1	$\frac{\xi}{2\mu} J_1(\mu \xi)$
	2	$-\frac{\xi^2}{4\mu^2} J_0(\mu \xi) + \frac{\xi}{2\mu^3} J_1(\mu \xi)$
	3	$-\frac{\xi^2}{3\mu^4} J_0(\mu \xi) + \left(\frac{2}{3\mu^5} - \frac{\xi^2}{24\mu^3}\right) \xi J_1(\mu \xi)$
	4	$\left(\frac{\xi^4}{192\mu^4} - \frac{17}{16} \frac{\xi^2}{\mu^6}\right) J_0(\mu \xi) - \left(\frac{5}{72} \frac{\xi^2}{\mu^5} - \frac{17}{18\mu^7}\right) \xi J_1(\mu \xi)$

mające postać kombinacji liniowej funkcji $F_m(\mu\vec{r}, f)$. W kombinacji tej indeks m przyjmuje znacznie od 0 do k . Stąd

$$\Theta_k^*(\vec{r}, f^*) = \sum_{m=0}^{m=k} B_{km}^* F_m(\mu\vec{r}, f^*) =$$

$$= \sum_{m=0}^{m=k} B_{km}^* e^{-\mu^2 f^*} \sum_{i=0}^{i=m} \frac{(f^*)^{m-i}}{(m-i)!} v_i(\mu\vec{r})$$
(37)

gdzie stałe B_{km}^* wyznaczone będą z warunków brzegowych i początkowych uzupełniających równanie różniczkowe. Funkcja $\Theta_k^*(\vec{r}, f^*)$ wstawiona zostaje do równania warunku brzegowego (30). Ponieważ rozwiązanie prowadzone jest etapami - dla coraz to wyższego wskaźnika k , przeto w równaniu (30) funkcją poszukiwaną jest składowa $\Theta_k^*(\vec{r}, f^*)$, natomiast funkcją znaną jest składowa $\Theta_{k-1}^*(\vec{r}, f^*)$ zawierająca m.in. stałe $B_{k-1,m}^*$. Warunek (30) spełniony ma być w dowolnej chwili trwania procesu chłodzenia, a więc dla każdej wartości zredukowanego czasu f^* . Zachodzi to wówczas, gdy stałe B_{km}^* ($k \geq 1$) zostaną tak dobrane, aby człony stojące przy zmiennych $(f^*)^{i-m}$ były równe zeru. Przyrównanie do zera tych członów prowadzi do równań liniowych z niewiadomymi B_{km}^* ($k \geq 1$).

Pewne osobliwości występują podczas wyznaczania stałych B_{kk}^* i B_{k0}^* . Wyrażenie stojące przy najwyższej potędze $(f^*)^k$ ma być zerem niezależnie od znaczenia przyjmowanego przez stałą B_{kk}^* . Ponieważ warunek ten nie może być spełniony przez tą stałą, przeto należy go przenieść na funkcje $v_0(\mu\vec{r}) = v(\mu\vec{r})$. Takie przeniesienie prowadzi do zależności, która jest identyczna z równaniem (8) - służącym do wyznaczenia stałych μ_j . Stała B_{kk}^* może być zatem określona tylko za pomocą relacji

powstałej z przyrównania do zera członu stojącego przy argumencie $(f^*)^{k-1}$. W rezultacie zastosowania omówionych poprzednio reguł oraz wstawienia do funkcji $v_1(\mu_j \bar{r})$ parametru $\mu = \mu_j$ wyznaczonego z równania (8) - warunek brzegowy (30) spełniony jest przez funkcję $\Theta_{k-1}^*(\bar{r}, f^*)$ niezależnie od wartości jakie przyjmują stałe B_{ko}^* . Stałe te, jak również stałe B_{ko} będą wyznaczone z warunku początkowego (29).

Wyjaśnionej metodzie postępowania odpowiadają konkretne wzory. Dla wskaźnika $k=0$ rozwiązanie zagadnienia opisano w rozdziale 2.1. Początkowym wskaźnikiem $k = 1, 2, \dots$ odpowiadają następujące relacje

$$\begin{aligned}
 \Theta_1^*(\bar{r}, f^*) &= \sum_{j=0}^{\infty} B_{10j}^* v_0(\mu_j \bar{r}) e^{-\mu_j^2 f^*} + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} B_{11j}^* \left[v_0(\mu_j \bar{r}) f^* + v_1(\mu_j \bar{r}) \right] e^{-\mu_j^2 f^*} \\
 \text{dla } k=1 \text{ oraz} \\
 \Theta_2^*(\bar{r}, f^*) &= \sum_{j=0}^{\infty} B_{20j}^* v_0(\mu_j \bar{r}) e^{-\mu_j^2 f^*} + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} B_{21j}^* \left[v_0(\mu_j \bar{r}) f^* + v_1(\mu_j \bar{r}) \right] e^{-\mu_j^2 f^*} + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} B_{22j}^* \left[v_0(\mu_j \bar{r}) \frac{(f^*)^2}{2!} + v_1(\mu_j \bar{r}) f^* + v_2(\mu_j \bar{r}) \right] e^{-\mu_j^2 f^*}
 \end{aligned} \tag{38}$$

dla $k=2$

gdzie stałe B_{11j}^* , B_{21j}^* i B_{22j}^* wyznaczone są z warunku brzegowego

$$\begin{aligned}
 B_{11j}^* &= G_j B_j^* \frac{(Bi) v_o(\mu_j \bar{r})}{(Bi) v_1(\mu_j \bar{r}) + \frac{\partial v_1(\mu_j \bar{r})}{\partial n}} \Big|_{\bar{r} \in A} \\
 B_{22j}^* &= B_{11j}^* \frac{(Bi) v_o(\mu_j \bar{r})}{(Bi) v_1(\mu_j \bar{r}) + \frac{\partial v_1(\mu_j \bar{r})}{\partial n}} \Big|_{\bar{r} \in A} = \\
 &= G_j B_j^* \left[\frac{(Bi) v_o(\mu_j \bar{r})}{(Bi) v_1(\mu_j \bar{r}) + \frac{\partial v_1(\mu_j \bar{r})}{\partial n}} \right]^2 \Big|_{\bar{r} \in A} \\
 B_{21j}^* &= - B_{22j}^* \frac{(Bi) v_o(\mu_j \bar{r})}{(Bi) v_1(\mu_j \bar{r}) + \frac{\partial v_1(\mu_j \bar{r})}{\partial n}} \Big|_{\bar{r} \in A} + \\
 &- (Bi) \frac{B_{10j}^* v_o(\mu_j \bar{r}) + B_{11j}^* v_1(\mu_j \bar{r})}{(Bi) v_1(\mu_j \bar{r}) + \frac{\partial v_1(\mu_j \bar{r})}{\partial n}} \Big|_{\bar{r} \in A}
 \end{aligned} \quad (39)$$

Znaczenie wielkości B_j^* podane jest we wzorze (12). Dalsze stałe z równań (38), tj. B_{10j}^* i B_{20j}^* mogą być rozpatrzone tylko w połączeniu ze stałymi B_{1j} i B_{2j} z równania (36). Wzory na te stałe wyznacza się w rezultacie wstawienia zależności (36) i (38) do równania warunku początkowego (29). Stąd dla $k=1$ otrzymuje się następujące relacje

$$\left. \begin{aligned}
 B_{1j} &= \frac{B_{11j}^*(F_0)^*}{1 - e_j e_j^*} e_j^* - \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B_{11i}^*(e_j^* - e_i^*) \int_V v_0(\mu_j \vec{r}) v_1(\mu_i \vec{r}) dV}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v_0^2(\mu_j \vec{r}) dV} \\
 B_{10j}^* &= \frac{B_{11j}^*(F_0)^* e_j e_j^*}{1 - e_j e_j^*} - \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B_{11i}^*(1 - e_j e_j^*) \int_V v_0(\mu_j \vec{r}) v_1(\mu_i \vec{r}) dV}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v_0^2(\mu_j \vec{r}) dV}
 \end{aligned} \right\} (40)$$

Odpowiednie wzory dla $k=2$ przyjmują postać

$$\left. \begin{aligned}
 B_{2j} &= \frac{B_{21j}^* + \frac{1}{2}(F_0)^* B_{22j}^*}{1 - e_j e_j^*} (F_0)^* e_j^* + \\
 &+ \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B_{22i}^*(e_j^* - e_i^*) \int_V v_0(\mu_j \vec{r}) v_2(\mu_i \vec{r}) dV}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v_0^2(\mu_j \vec{r}) dV} + \\
 &- \frac{\sum_{i=0}^{\infty} [B_{21i}^*(e_j^* - e_i^*) - (F_0)^* B_{22i}^*] \int_V v_0(\mu_j \vec{r}) v_1(\mu_i \vec{r}) dV}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v_0^2(\mu_j \vec{r}) dV}
 \end{aligned} \right\} (41)$$

$$\begin{aligned}
 E_{20j}^* &= \frac{B_{21j}^* + \frac{1}{2}(Fo)^* B_{22j}^*}{1 - e_j e_j^*} (Fo)^* e_j e_j^* + \\
 & - \frac{\sum_{i=0}^{\infty} B_{22i}^* (1 - e_j e_i^*) \int_V v_0(\mu_j \bar{r}) v_2(\mu_i \bar{r}) dV}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v_0^2(\mu_j \bar{r}) dV} + \\
 & - \frac{\sum_{i=0}^{\infty} [B_{21i}^* (1 - e_j e_i^*) - (Fo)^* B_{22i}^* e_j^*] \int_V v_0(\mu_j \bar{r}) v_1(\mu_i \bar{r}) dV}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v_0^2(\mu_j \bar{r}) dV}
 \end{aligned} \quad (41)$$

W konkretnych obliczeniach wzory te ulegają daleko idącym uproszczeniom, ponieważ dla rosnącego wskaźnika j stałe B_{11j}^* , B_{21j}^* i B_{22j}^* szybko dążą do zera, a wyrażenia zawierające funkcje wykładnicze zanikają jeszcze szybciej. Dalej zrezygnowano z rozpisania zależności odpowiadających wskaźnikom $k \geq 3$, gdyż nie wnoszą one istotnych nowych informacji do opisanej metody obliczeń składowych zredukowanej temperatury elementu wypełnienia.

3.2c. Zastosowania metody obliczeń dla płyty i pręta prostokątnego

W oparciu o przedstawiony tok wywodów podane będą wzory na zredukowaną temperaturę elementu wypełnienia dla przypadku nieograniczonej płyty i pręta o przekroju prostokątnym.

Wzory dotyczące płyty zostały już raz omówione w poprzednim podrozdziale, a teraz zamieszczone będą ponownie jedynie

dla celów porównawczych. Tak samo jak i przy ustaleniu wzorów (32) i (33) założono także i teraz, że temperatura gazu omywającego element wypełnienia zmienia się skokowo. Dla wskaźnika $k=0$ zasada otrzymania funkcji $\Theta_0(\xi, f)$ i $\Theta_0^*(\xi, f^*)$ jest taka sama jak i poprzednio i dlatego równania (32) nie będą tutaj powtarzane. Wzory dla funkcji $\Theta_1(\xi, f)$ i $\Theta_1^*(\xi, f^*)$ ustalone są na podstawie równań (38), (39) i zestawienia ze strony 39. Stąd

$$\begin{aligned} \Theta_1(\xi, f) &= \sum_{j=0}^{\infty} B_{1j} \cos \mu_j \xi e^{-\frac{\mu_j^2 f}{\alpha}} \\ \Theta_1^*(\xi, f^*) &= \sum_{j=0}^{\infty} B_{10j}^* \cos \mu_j \xi e^{-\frac{\mu_j^2 f^*}{\alpha}} + \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} B_{11j}^* \left(\cos \mu_j \xi f^* + \frac{\xi}{2\mu_j} \sin \mu_j \xi \right) e^{-\frac{\mu_j^2 f^*}{\alpha}} \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} B_{11j}^* &= G_j B_j^* \frac{(Bi) \cos \mu_j}{(Bi) \frac{\sin \mu_j}{2\mu_j} + \frac{\sin \mu_j + \mu_j \cos \mu_j}{2\mu_j}} = \\ &= G_j^2 \mu_j^2 \cos \mu_j \frac{1 - e_j}{1 - e_j e_j^*} \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę wzory (40) otrzymuje się znaczenia stałych B_{1j} i B_{10j}^*

$$B_{1j} = G_j^2 \mu_j^2 \cos \mu_j \frac{(1 - e_j) e_j^*}{(1 - e_j e_j^*)^2} (Fo)^* +$$

$$- \frac{1}{1 - e_j e_j^*} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{\infty} G_j G_m \frac{1 - e_m}{1 - e_m e_m^*} \cos \mu_m \frac{\mu_j^2}{\mu_j^2 - \mu_m^2} (e_m^* - e_j^*)$$

oraz

$$B_{10j}^* = G_j^2 \cos \mu_j \frac{1 - e_j}{1 - e_j e_j^*} \left[\frac{1}{4} - \frac{G_j}{4} \mu_j^2 \cos^2 \mu_j + \mu_j^2 \frac{e_j e_j^*}{1 - e_j e_j^*} (Fo)^* \right] +$$

$$- \frac{1}{1 - e_j e_j^*} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{\infty} G_j G_m \frac{1 - e_m}{1 - e_m e_m^*} \cos \mu_m \frac{\mu_j^2}{\mu_j^2 - \mu_m^2} (1 - e_j e_m^*)$$

Zgodność wzorów - równania (33) i (42) - na zredukowaną temperaturę $\theta_1(\xi, f)$ dla fazy grzania elementu wypełnienia - widoczna jest wprost z tych wzorów. Natomiast składowe $\theta_1^*(\xi, f^*)$ dotyczące fazy chłodzenia są także identyczne, lecz można się o tym przekonać dopiero po rozwinięciu funkcji $v_1(\mu_j \xi) = \frac{\xi}{2\mu_j} \sin \mu_j \xi$ w szereg według ortogonalnych funkcji $v_0(\mu_m \xi) = \cos \mu_m \xi$.

Zaproponowana metoda obliczeń będzie także zilustrowana na przykładzie elementu wypełnienia mającego kształt długiego pręta o przekroju prostokątnym, tj. w przypadku, gdy temperatura ścian pręta zależy od współrzędnej i czasu. Pręt omywany jest przez gaz, którego temperatura zmienia się okresowo, skokami.

Zmianom tym odpowiadają funkcje $v(f) = 1$ i $v^*(f^*) = 0$. Dopływ i odpływ ciepła jest symetryczny względem osi układu współrzędnych x, y , którego początek umieszczony jest w środku prostokąta. Długość jednego z boków prostokąta oznaczono przez $2l_0$, a iloraz długości dwóch sąsiednich boków oznaczono przez b . Wielkość zredukowanego strumienia ciepła charakteryzują liczby BIOTA (Bi) i $(Bi)^*$ - dla jednej pary ścian pręta oraz (\tilde{Bi}) i $(\tilde{Bi})^*$ dla pary drugiej. Zredukowane współrzędne oznaczono symbolami $\xi = x/l_0$ oraz $\eta = y/l_0$.

Wykorzystane dalej wartości własne v_m oraz \tilde{v}_1 są pierwiastkami równań: $v \sin v = (Bi) \cos v$, $\tilde{v} \sin b\tilde{v} = (\tilde{Bi}) \cos b\tilde{v}$ - ustalonych na podstawie wzoru (8).

W pierwszym etapie rozwiązania wyznaczone zostają funkcje $\theta_0(\xi, \eta, f)$ i $\theta_0^*(\xi, \eta, f^*)$:

$$\begin{aligned} \theta_0(\xi, \eta, f) = & \\ = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} G_m G_i \frac{1 - e^{-v_m \xi} e^{-\tilde{v}_1 \eta}}{1 - e^{-v_m \xi} e^{-\tilde{v}_1 \eta}} \cos v_m \xi \cos \tilde{v}_1 \eta e^{-(v_m^2 + \tilde{v}_1^2) f} & \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_0^*(\xi, \eta, f^*) = & \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} G_m G_i \frac{1 - e^{-v_m \xi} e^{-\tilde{v}_1 \eta}}{1 - e^{-v_m \xi} e^{-\tilde{v}_1 \eta}} \cos v_m \xi \cdot \cos \tilde{v}_1 \eta e^{-(v_m^2 + \tilde{v}_1^2) f^*} & \end{aligned}$$

gdzie:

$$G_i = \frac{2 \sin \tilde{v}_1 b}{\tilde{v}_1 b + \sin \tilde{v}_1 b \cos \tilde{v}_1 b}$$

W drugim zaś etapie będzie wyznaczona para funkcji $\theta_1(\xi, \rho, f)$ i $\theta_1^*(\xi, \rho, f^*)$ odpowiadająca wskaźnikowi $k=1$

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_1(\xi, \rho, f) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} B_{1mi} \cos v_m \xi \cos \tilde{v}_i \rho e^{-(v_m^2 + \tilde{v}_i^2) f} \\
 \theta_1^*(\xi, \rho, f^*) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} B_{10mi}^* \cos v_m \xi \cos \tilde{v}_i \rho e^{-(v_m^2 + \tilde{v}_i^2) f^*} \\
 &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} G_m G_i \frac{1 - e_m e_i}{1 - e_m e_m^* e_i e_i^*} \left\{ G_m v_m^2 \cos v_m \cos \tilde{v}_i \rho \left[f^* \cos v_m \xi + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{\xi \sin v_m \xi}{2 v_m} \right] + G_i \tilde{v}_i^2 \cos v_i \rho \cos v_m \xi \left[f^* \cos \tilde{v}_i \rho + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{\rho \sin \tilde{v}_i \rho}{2 \tilde{v}_i} \right] \right\} e^{-(v_m^2 + \tilde{v}_i^2) f^*}
 \end{aligned} \right\} (44)$$

Stałe B_{1mi} oraz B_{10mi}^* otrzymuje się z zależności (40). Na podstawie ostatniej relacji można poznać sposób tworzenia funkcji $F_m(\xi, \rho, f)$ dla przypadku dwóch zmiennych ξ i ρ . Funkcje te mają następującą budowę

$$\begin{aligned}
 F_m(\xi, \rho, f) &= F_0(\xi, f) F_m(\rho, f) + F_m(\xi, f) F_0(\rho, f) = \\
 &= v(v\xi) e^{-v^2 f} F_m(\rho, f) + F_m(\xi, f) v(\tilde{v}\rho) e^{-\tilde{v}^2 f}
 \end{aligned}$$

Odpowiedni wzór dla funkcji F_m zależnej od trzech współrzędnych przestrzennych będzie składał się z trzech członów.

W obydwóch przykładach opuszczono wzory na zredukowaną zdolność akumulowania χ energii, gdyż wzory te wynikają w oczywisty sposób z równań (5), (6), (14) i (31).

4. LICZBY BIOTA ZMIENNE W CZASIE GRZANIA I CHŁODZENIA WYPEŁNIENIA REGENERATORA

Przedmiotem dalszej analizy jest wpływ zmienności liczb BIOTA na wahania pola temperatury w elemencie wypełnienia i na zdolność akumulowania χ energii w tym elemencie. Zakłada się, że wstępne rozważania przeprowadzone dla stałej lub zmiennej skokowo liczby BIOTA pozwoliłyby na orientacyjne uchwycenie czasowego przebiegu temperatury na ścianie elementu wypełnienia. Postępowanie to umożliwi przetransponowanie wzoru uzależniającego liczbę BIOTA od temperatury i prędkości gazów - zazwyczaj empirycznego - na wzór wiążący bezpośrednio liczbę BIOTA z czasem. Przekształcenia te uwzględni następująca relacja $(Bi) = Bi(\theta) = Bi[\theta(f)] = Bi(f)$. Dla funkcji tej dobrano postać wielomianu.

Podobnie jak w rozdziale 2 dobrana zostaje także zależność funkcji S od czasu f .

Drogą przegrupowania niektórych wyrażeń w równaniach warunków brzegowych (3) można dojść do uproszczeń ułatwiających dalsze rozważania. Równanie (3) zapisane zostaje w nowej postaci

$$-\frac{\partial \theta(\vec{r}, f)}{\partial n} = (Bi)_0 \left[(1 + \beta_1 f + \beta_2 f^2 + \beta_3 f^3 + \dots) \theta(\vec{r}, f) + \chi(f) \right] \quad \vec{r} \in A \quad (3d)$$

$$-\frac{\partial \theta(\bar{r}, f^*)}{\partial n} = (Bi)_0 \left\{ \left[\beta_0^* + \beta_1^* f^* + \beta_2^* (f^*)^2 + \dots \right] \cdot \theta^*(\bar{r}, f^*) - \check{v}^*(f^*) \right\} \quad \bar{r} \in A \quad (3d)$$

gdzie przez $\check{v}(f)$ i $\check{v}^*(f^*)$ oznaczono następujące funkcje

$$\check{v}(f) = (1 + \beta_1 f + \beta_2 f^2 + \beta_3 f^3 + \dots) \left[v(f) - \frac{S(f)}{(Bi)_0} \right]$$

oraz

$$\check{v}^*(f^*) = \left[\beta_0^* + \beta_1^* f^* + \beta_2^* (f^*)^2 + \dots \right] v^*(f^*)$$

Dobór stopnia większego niż trzeci, a nawet drugi dla wielomianu - ujmującego zmienność liczby BIOTa w czasie f - jest zbyteczny. Spowodowałoby to nadmierną dokładność obliczeń a przez to i ich uciążliwość - przy równoczesnych błędach jakimi obarczone są empiryczne zależności liczby BIOTa od temperatury.

Istotnym warunkiem pozwalającym na rozwiązanie problemu ze zmiennymi liczbami BIOTa jest zastosowanie uogólnionych funkcji F_m opisanych w podrozdziale 3.2a. Zredukowana temperatura $\theta(\bar{r}, f)$ i $\theta^*(\bar{r}, f^*)$ elementu wypełnienia wyrażona zostaje za pomocą funkcji F_m - równ. (35), zbudowanych na zbiorze ortogonalnych funkcji $v_0(\mu_j \bar{r}) = v(\mu_j \bar{r})$. Stąd

$$\left. \begin{aligned} \theta(\bar{r}, f) &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \left\{ \left[B_j e^{-\mu_j^2 f} + H_j(f) \right] v(\mu_j \bar{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} d_{mj} F_m(\mu_j \bar{r}, f) \right\} \\ \theta^*(\bar{r}, f^*) &= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \left\{ \left[B_j^* e^{-\mu_j^2 f^*} + H_j^*(f^*) \right] v(\mu_j \bar{r}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} d_{mj}^* F_m(\mu_j \bar{r}, f^*) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Stałe d_{mj} i d_{mj}^* dobrane zostaną na podstawie warunków brzegowych (3d), natomiast stałe B_j i B_j^* wynikają z warunków początkowych (2). Wyrażenia $H_j(f)$ i $H_j^*(f^*)$ odpowiadają funkcjom $\check{v}_j(f)$ i $\check{v}_j^*(f^*)$.

Oznaczając przez P_{mj} następujące wyrażenia

$$P_{mj} = (Bi)_0 v_m(\mu_j \vec{r}) + \frac{\partial v_m(\mu_j t)}{\partial n}; \quad \vec{r} \in A$$

$$P_{mj}^* = (Bi)_0 \beta_0^* v_m(\mu_j \vec{r}) + \frac{\partial v_m(\mu_j \vec{r})}{\partial n}; \quad \vec{r} \in A$$

uzyskuje się znaczne uproszczenia w zapisie warunku brzegowego. Z równania (8) wynika warunek $P_{0j} = 0$. Postępowanie prowadzące do wyznaczenia stałych d_{mj} i d_{mj}^* jest podobne do postępowania opisanego w punkcie 2 rozdziału 3. Polega ono na przyrównaniu do zera wyrazów stojących przy zmiennej f^1 i $(f^*)^1$. Wszystkie przekształcenia jakie powinny być przeprowadzone po wstawieniu równań (45) do warunku (3d) - zostają tutaj pominięte. Rezultatem końcowym tych operacji matematycznych jest nieograniczony układ równań liniowych jaki powinny spełniać stałe d_{mj} lub d_{mj}^* . Dla wskaźnika j i jednej z faz np. fazy grzania pierwsze trzy równania tego układu mają postać

$$P_{0j} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{mj}}{B_j} P_{mj} = 0$$

$$(Bi)_0 \beta_1 v_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{mj}}{B_j} \left[\frac{P_{m-1,j}}{1!} + (Bi)_0 \beta_1 v_m \right] = 0$$

$$(B1)_o \left[\beta_2 v_o + \frac{d_{11}}{B_j} \left(\frac{\beta_1}{0!} v_o + \frac{\beta_2}{1!} v_1 \right) \right] + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{d_{mj}}{B_j} \left[\frac{P_{m-2,j}}{2!} + \right. \\ \left. + (B1)_o \left(\frac{\beta_1}{0!} v_{m-1} + \frac{\beta_2}{1!} v_m \right) \right] = 0; \quad \text{gdzie } v_m = v_m(\mu_j \bar{F}) \text{ dla } \bar{F} \in A$$

W ogólnym przypadku równanie i układu można zapisać następująco

$$(B1)_o \left[\beta_1 v_o + \sum_{m=0}^{i-1} \frac{d_{mj}}{B_j} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\beta_{i-l}}{l!} v_{m-l} \right] + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{mj}}{B_j} \left[\frac{P_{m-1,j}}{1!} + (B1)_o \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\beta_{i-l}}{l!} v_{m-l} \right] = 0$$

Dla konkretnych obliczeń, w których bierze się pod uwagę tylko 1 wyrazów wielomianu - ostatni układ równań znacznie się upraszcza, gdyż dla $i > 1$ elementy β_1 odpadają. Dokładna analiza tego układu prowadzi do wniosku, że wszystkie jego wyznaczniki łącznie z wyznacznikiem charakterystycznym mają wyrazy znacznie różniące się od zera tylko wzdłuż skośnego pasa mającego kierunek głównej przekątnej. W wyznacznikach tych poniżej przekątnej głównej jest tyle rzędów do niej równoległych i utworzonych z wyrazów różnych od zera ile wyrazów zawiera wielomian określający liczbę BIOTA. Reszta wyrazów pod tymi skośnymi rzędami jest dokładnie równa zero. Natomiast wyrazy w rzędach powyżej głównej przekątnej wyznacznika - zbiegają do zera i to tym szybciej, im rozpatrywany rząd jest bardziej odległy od głównej przekątnej. Wnioski te oraz reguły obliczania wyznaczników pozwalają na zastąpienie nieograniczonego układu ograniczonym układem równań.

Cały tok rozumowania należy powtórzyć dla warunku brzegowego dotyczącego fazy chłodzenia elementu wypełnienia. W rezultacie takiego postępowania otrzymuje się wartości stałych d_{mj}/B_j i d_{mj}^*/B_j^* .

Ostatnim etapem zmierzającym do wyznaczenia funkcji zredukowanej temperatury jest obliczenie stałych B_j i B_j^* . Wstawiając równania (45) do warunku początkowego (2) można otrzymać następujące wzory na B_j i B_j^*

$$B_j = \frac{H_{j1}^* + e_j^* H_{j1}}{1 - e_j e_j^*} - \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{ml} \int_V \left\{ F_m(\mu_{l\vec{r}}, 0) - e_j^* F_m[\mu_{l\vec{r}}, (Fo)] \right\} v(\mu_{j\vec{r}}) dv}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v^2(\mu_{j\vec{r}}) dv} +$$

$$- \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{ml}^* \int_V \left\{ e_j^* F_m(\mu_{l\vec{r}}, 0) - F_m[\mu_{l\vec{r}}, (Fo)] \right\} v(\mu_{j\vec{r}}) dv}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v^2(\mu_{j\vec{r}}) dv}$$

$$B_j^* = \frac{H_{j1} + e_j H_{j1}^*}{1 - e_j e_j^*} - \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{ml} \int_V \left\{ e_j F_m(\mu_{l\vec{r}}, 0) - F_m[\mu_{l\vec{r}}, (Fo)] \right\} v(\mu_{j\vec{r}}) dv}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v^2(\mu_{j\vec{r}}) dv} +$$

$$- \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{ml}^* \int_V \left\{ F_m(\mu_{l\vec{r}}, 0) - e_j F_m[\mu_{l\vec{r}}, (Fo)] \right\} v(\mu_{j\vec{r}}) dv}{(1 - e_j e_j^*) \int_V v^2(\mu_{j\vec{r}}) dv}$$

Zdolność akumulowania energii dla tego przypadku można obliczyć wprost ze wzorów definicyjnych (5) i (6) wstawiając do nich zależność (45).

Zaproponowana metoda obliczeń może być także wykorzystana do rozwiązania zagadnienia dotyczącego liczb BIOTA zmiennych skokowo. Wtedy wszystkie wyrazy β_1 i β_1^* za wyjątkiem β_0^* są równe zero. Korzystając z definicji parametrów β_0^* i δ ($\beta_0^* = 1 - \delta$) można wykazać, że metoda ta jest zgodna z metodą rozwinięć w szeregi funkcyjne - równ. (27) wyjaśnioną w poprzednim rozdziale.

5. JAKOŚCIOWA OCENA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW I SZYBKOŚCI UZYSKANIA WYNIKÓW

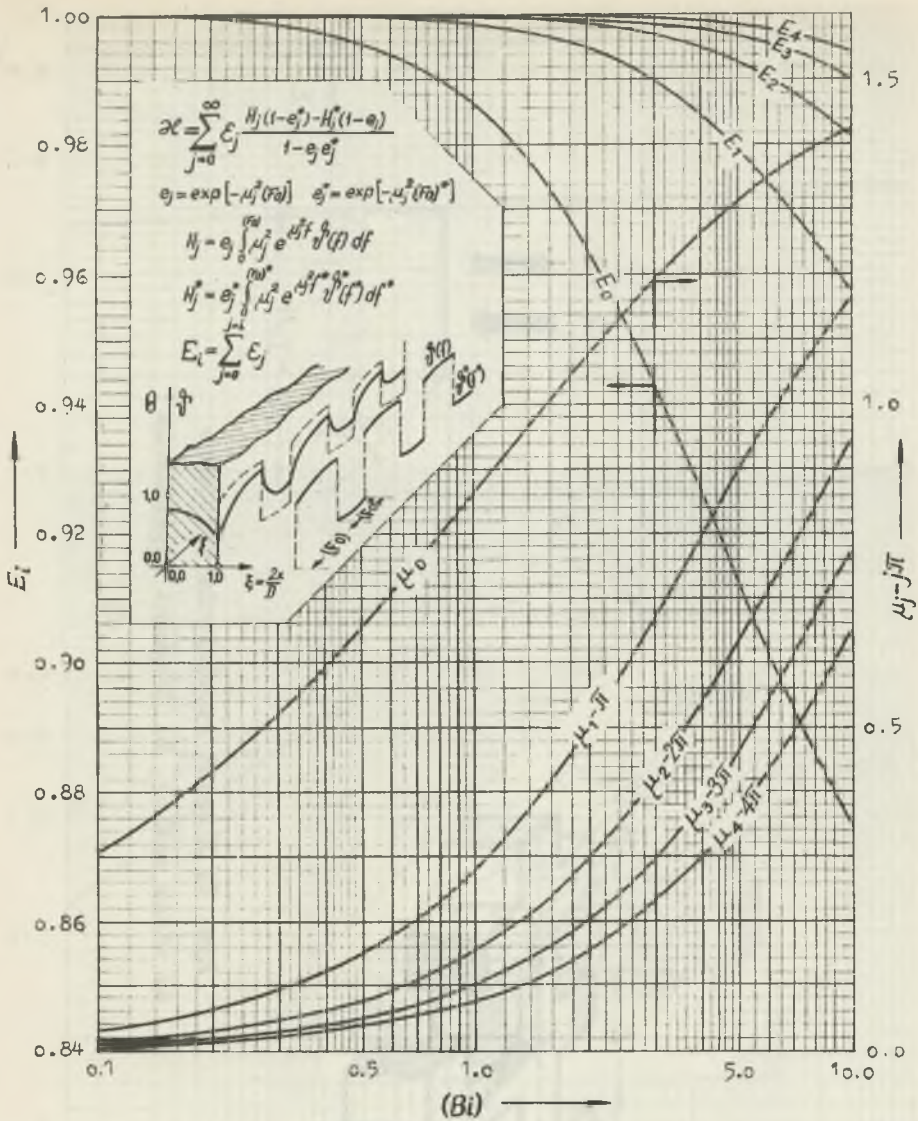
O przydatności metody obliczeń decydują także możliwości szybkiego i prostego uzyskania zamierzonych wyników. W zagadnieniach, w których końcowe rezultaty wyrażone są wzorami zawierającymi szeregi, należy naprzód zbadać ich bezwzględną zbieżność, a potem ich szybkozbieżność.

W pracy tej stosowane były szeregi dwojakiego rodzaju:

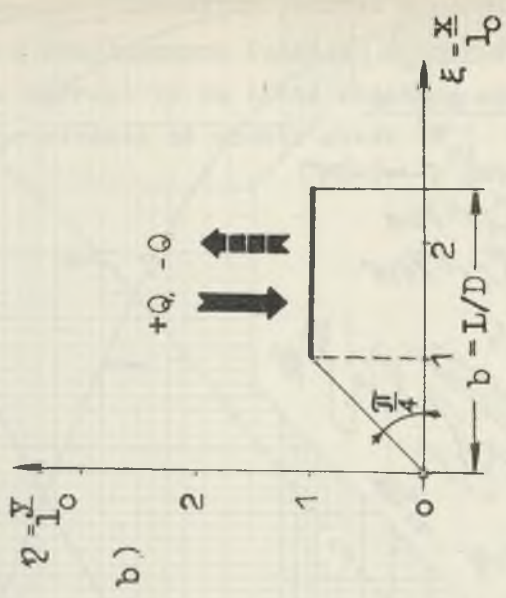
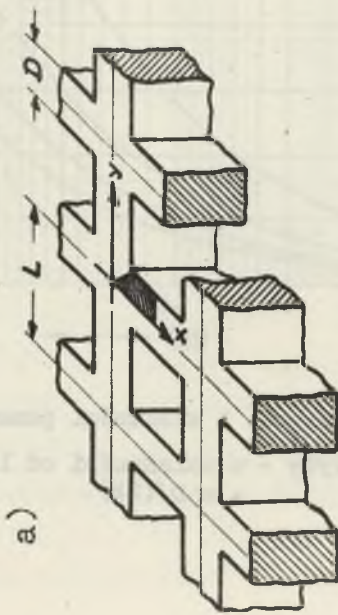
Pierwszy z nich stanowią szeregi zbudowane z funkcji ortogonalnych $v(\mu_j \bar{F})$. Szeregi takie dokładnie zbadane są i opisane w literaturze [21], [30] i dlatego nie ma tutaj potrzeby omawiania ich zbieżności. W problemach numerycznych rozwiązywanych w tej pracy wystarczało zazwyczaj brać tylko kilka wyrazów z funkcjami ortogonalnymi. Ilość ta najczęściej zależała od wielkości liczby FOURIERA. Jeżeli każda z liczb FOURIERA była większa od jedności, to trzy wyrazy szeregu zapewniały już wystarczającą jego zbieżność.

Drugi rodzaj szeregów to szeregi funkcyjne wprowadzone na użytek proponowanych w pracy metod rozwiązania. Dalej należy zbadać zbieżność tych szeregów, gdyż z nich utworzone są funkcje zredukowanej temperatury elementu wypełnienia - równanie (27). Funkcje zredukowanej temperatury gazu $\nu(f)$ i $\nu^*(f^*)$ występujące w składowych $\theta_0(\bar{r}, f)$ i $\theta_0^*(\bar{r}, f^*)$ - równania (9) i (11) - można tak zdefiniować, aby ich wartości należały do przedziału $[0, 1]$. Wzory na składowe θ_0 i θ_0^* zawierają szeregi bezwzględnie zbieżne, bowiem ich wyrazy są znanymi ortogonalnymi funkcjami. Odpowiednie rozważania prowadzą do wniosku, że wszystkie wartości tych składowych muszą także znajdować się w przedziale wyznaczonym przez skrajne wartości funkcji $\nu(f)$ i $\nu^*(f^*)$, a więc pomiędzy 0 a 1. Niezależnie od uzasadnień matematycznych wniosków ten z fizycznego punktu widzenia jest oczywisty. Ponieważ w pierwszym przybliżeniu rolę funkcji $\nu(f)$ i $\nu^*(f^*)$ przejmują funkcje zero i $[-\nu^*(f^*) + \theta_0^*(\bar{r}, f^*)|_{\bar{r} \in A}]$, przeto składowe $\theta_1(\bar{r}, f)$ i $\theta_1^*(\bar{r}, f^*)$ muszą być zawarte w przedziale wyznaczonym przez ekstremalną wartość funkcji $[\nu^*(f^*) - \theta_0^*(\bar{r}, f^*)|_{\bar{r} \in A}]$ i zero. Wynika stąd, że i składowe $|\theta_1|$ i $|\theta_1^*|$ należą też do przedziału $(0, 1)$. Rozumowanie to przenoszone na kolejne przybliżenia pozwala na ustalenie zakresu, w którym mogą znaleźć się dowolne składowe $\theta_k(\bar{r}, f)$ i $\theta_k^*(\bar{r}, f^*)$. Funkcje te należą więc również do przedziału $(0, 1)$. Biorąc pod uwagę znaczenia parametru $[(0 \leq \delta < 1) - \text{równ. (26)}]$ oraz wzory (27) można zauważyć, że majorantną funkcji zredukowanej temperatury $\theta(\bar{r}, f)$ i $\theta^*(\bar{r}, f^*)$ elementu wypełnienia jest szybkozbieżny szereg geometryczny. Dla praktycznych obliczeń x , w których zazwyczaj parametr δ jest niewielki ($0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$) wystarczy wyznaczyć tylko trzecie, a nawet drugie przybliżenie.

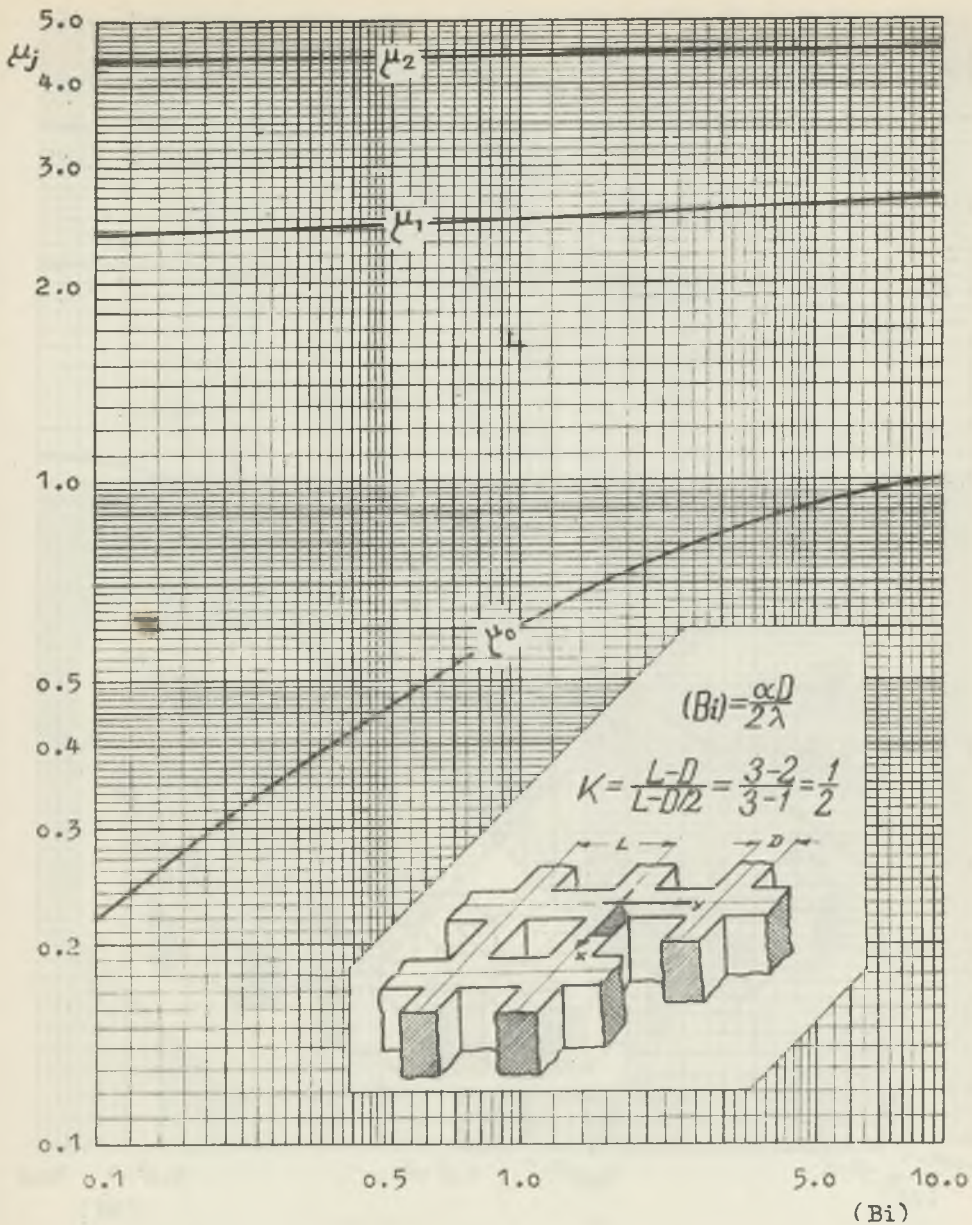
Na zakończenie należałoby jeszcze wspomnieć o szeregach utworzonych z uogólnionych funkcji $F_m(\mu_j, \bar{r}, f)$ zdefiniowanych wzorem (35). Szeregi te są także zbieżne, a zbieżność tę przyspieszają niezależnie od siebie stałe d_{mj} i same funkcje F_m .



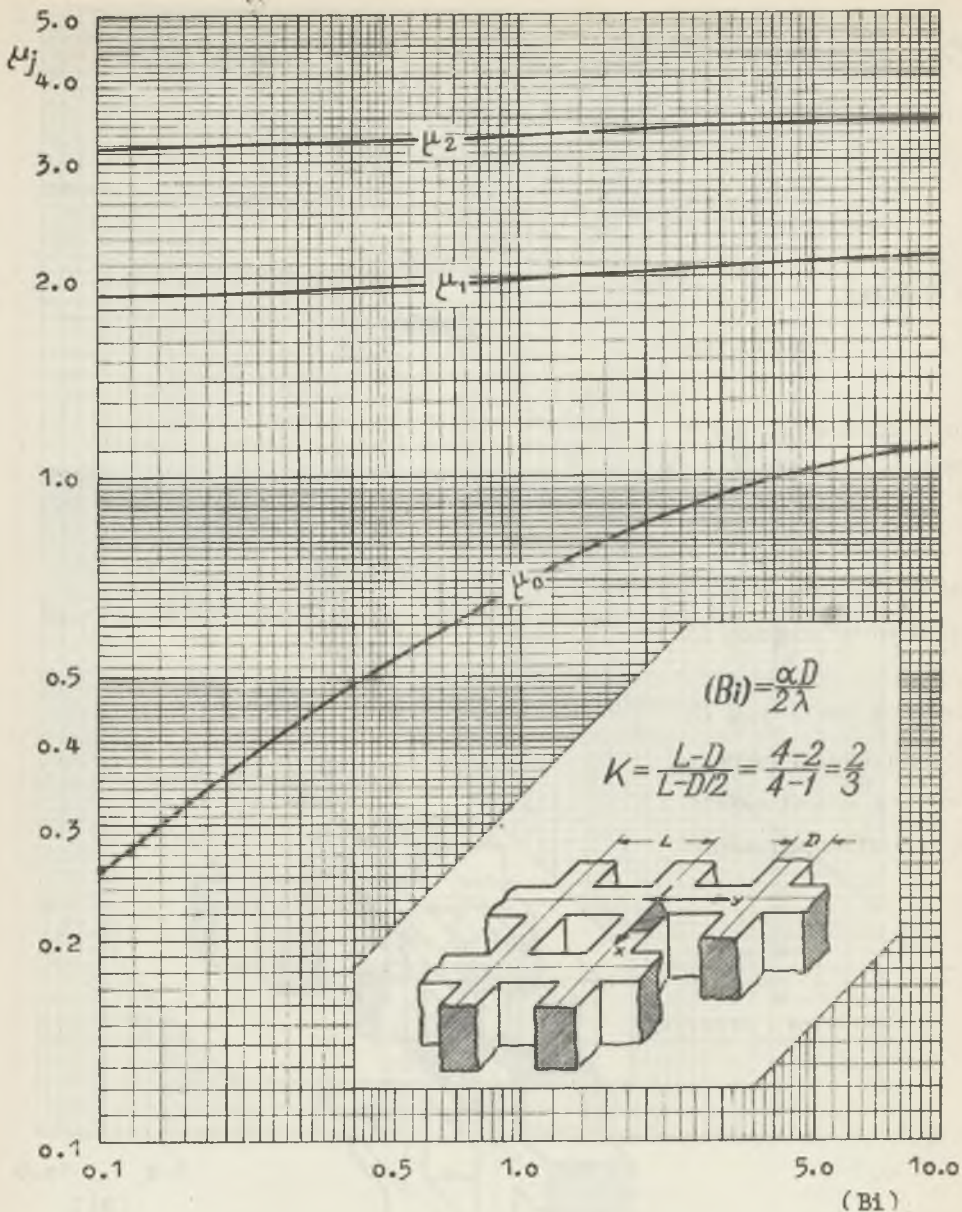
Rys. 1. Wartości własne μ_j i wielkości pomocnicze $\epsilon_j = \bar{v}_j \bar{v}_j / v_j^2$, dla nieograniczonej płyty - w zależności od liczby BIOTA $(Bi) = \alpha D / (2\lambda)$



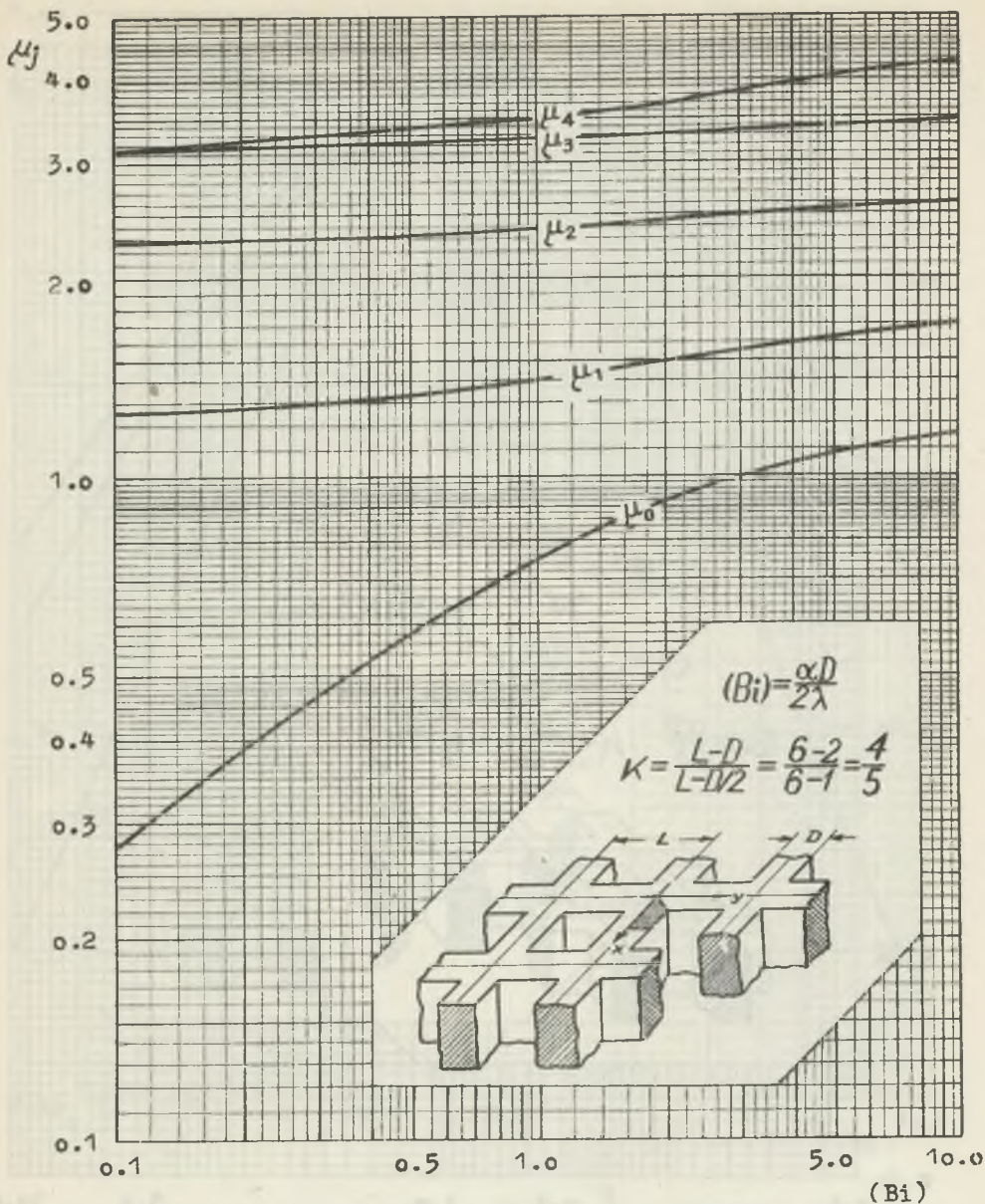
Rys. 2. Element wypełnienia kratowego
 a) widok ogólny, b) fragment wypełnienia



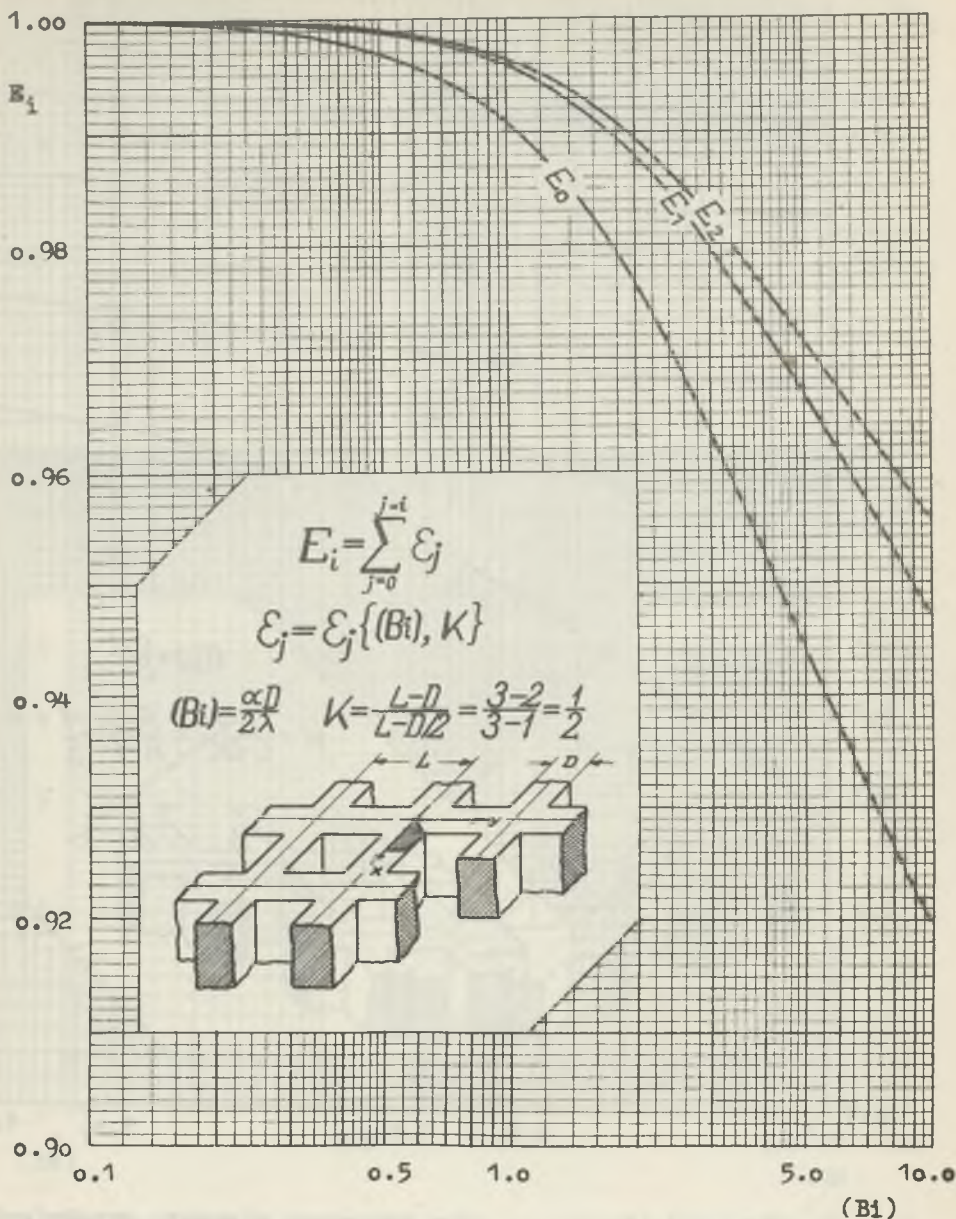
Rys. 3a. Wartości własne μ_j dla kratowego elementu wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = l_o A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{1}{2}$ w zależności od liczby BIOTA $(Bi) = \alpha D/(2\lambda)$



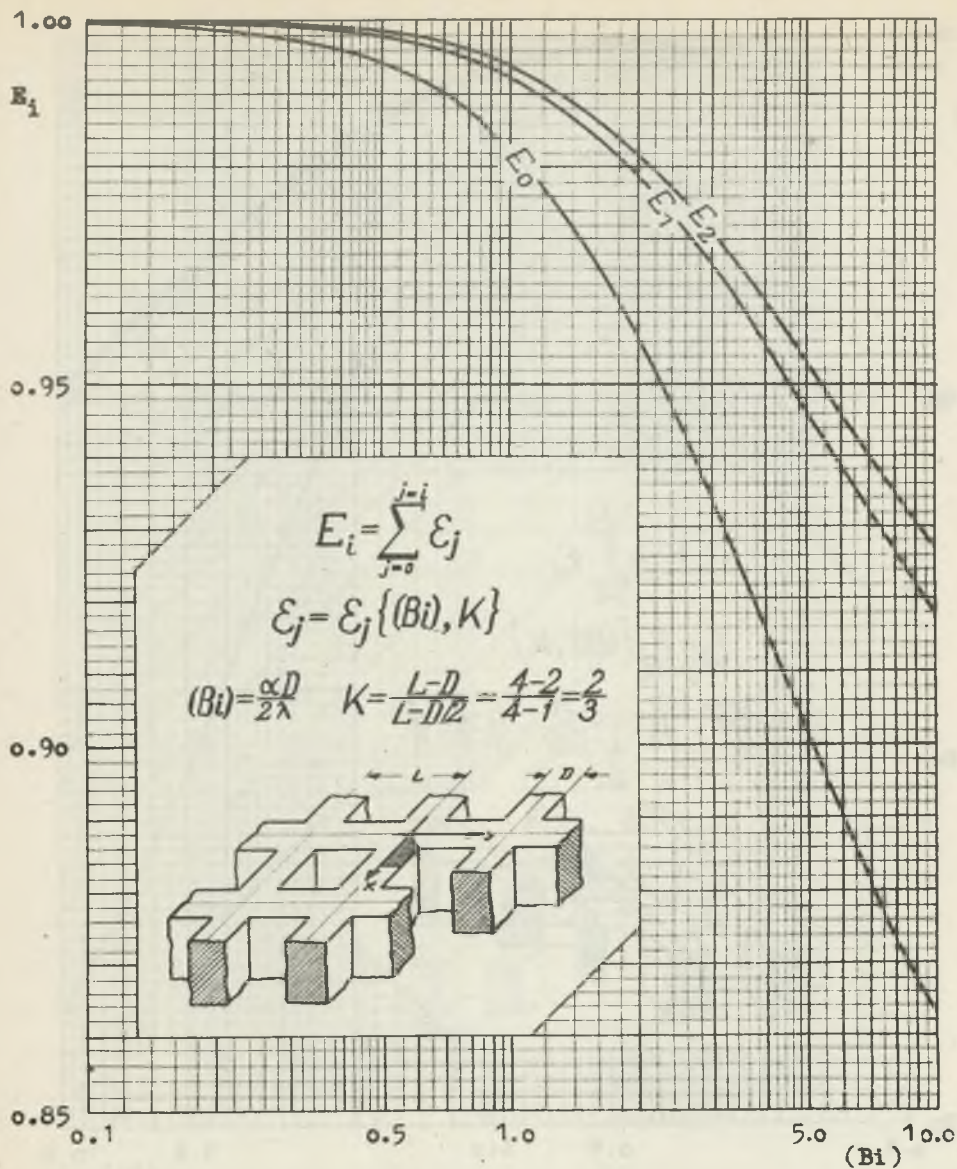
Rys. 3b. Wartości własne μ_j dla kratowego elementu wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = 1_0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{2}{3}$ w zależności od liczby BIOTA $(Bi) = \alpha D / (2\lambda)$



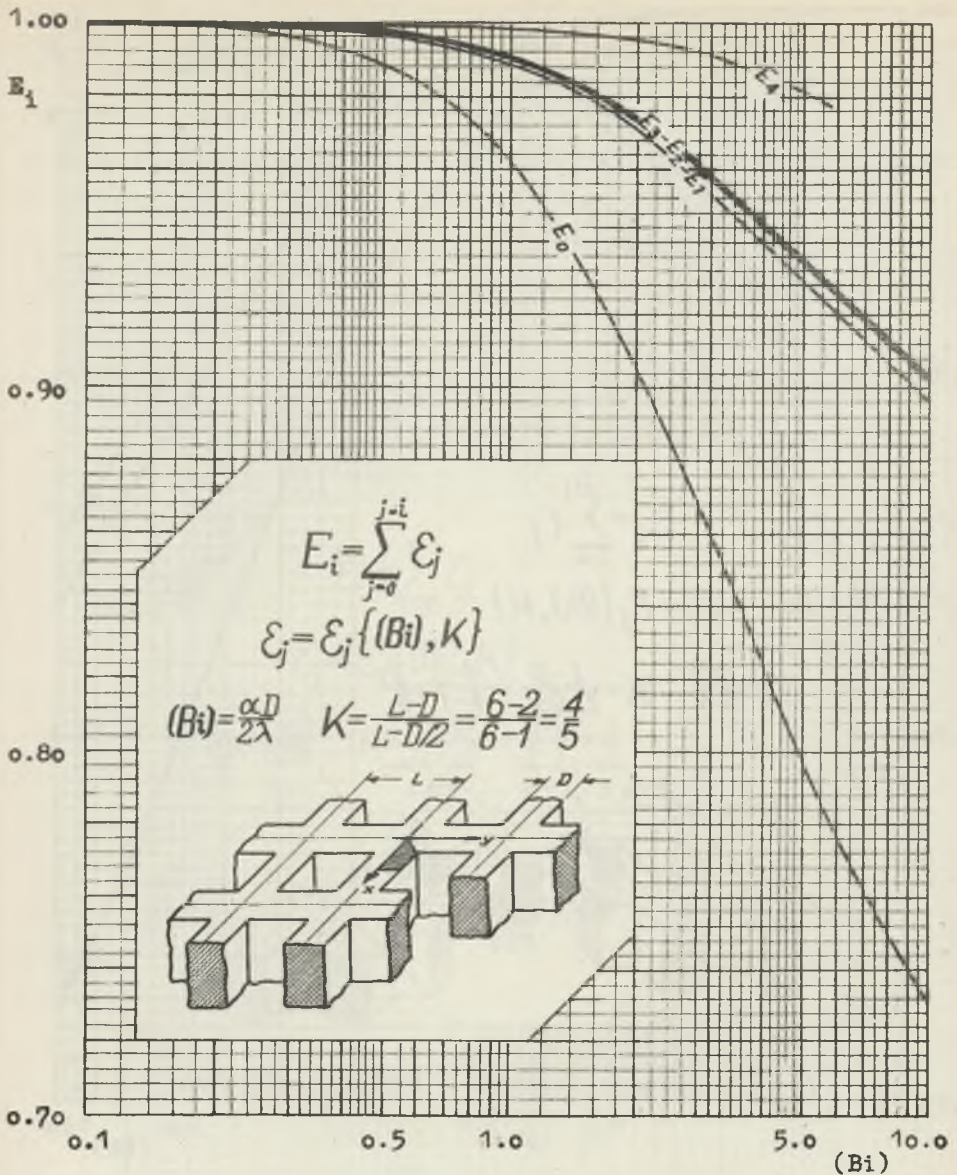
Rys. 3c. Wartości własne μ_j dla kratowego elementu wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{4}{5}$ w zależności od liczby BIOTa $(Bi) = \alpha D / (2\lambda)$



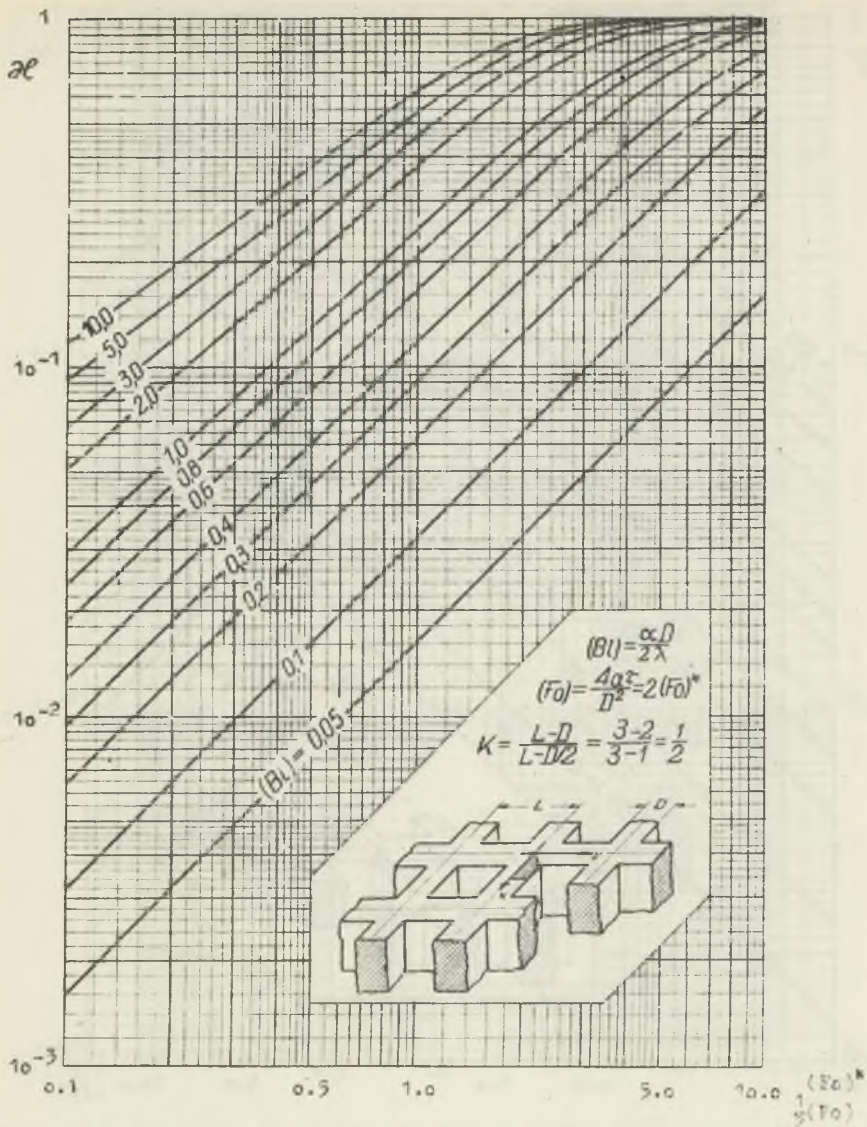
Rys. 4a. Wielkości pomocnicze $\xi_j = \bar{v}_j \bar{v}_j / v_j^2$ z równania (15), dla kratowego elementu wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = 1_0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{1}{2}$ -- w zależności od liczby BIOTA $(Bi) = \alpha D / (2\lambda)$



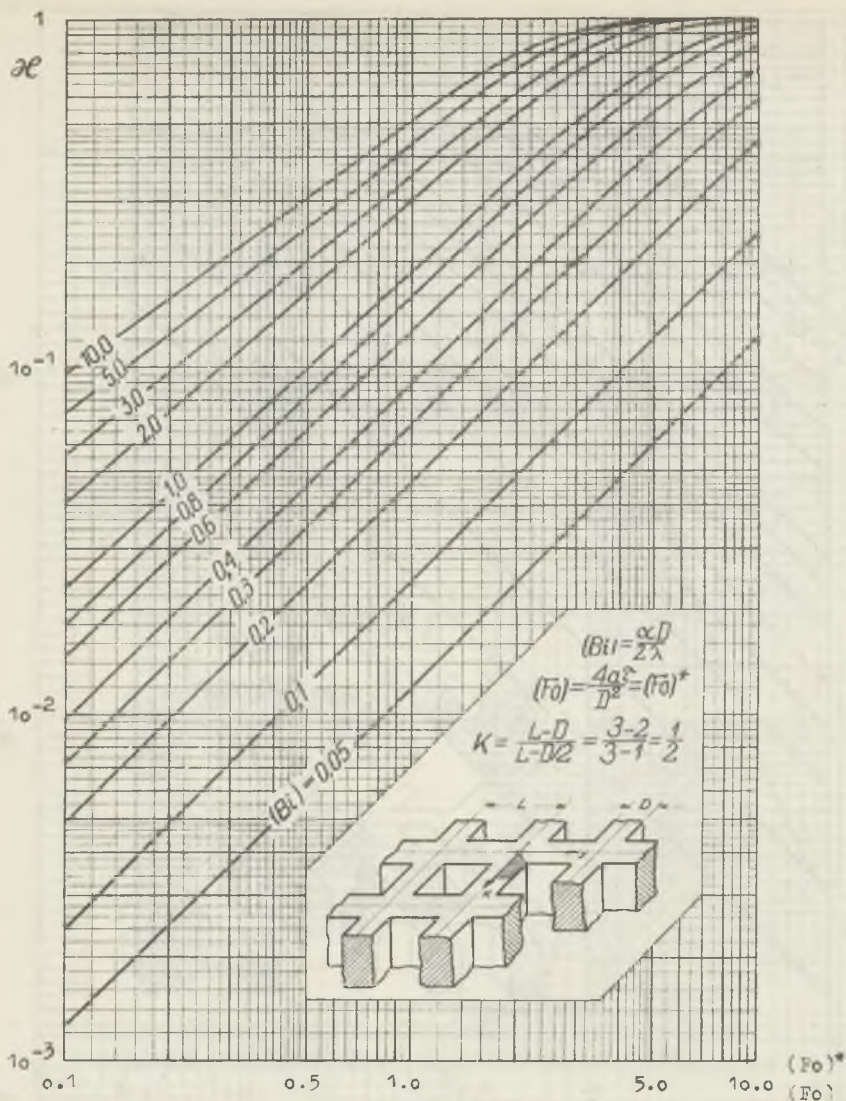
Rys. 4b. Wielkości pomocnicze $\varepsilon_j = \bar{v}_j \bar{v}_j / \bar{v}_j^2$ z równania (15), dla kratowego elementu wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = 1_0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{2}{3}$ - w zależności od liczby BIOTA $(Bi) = \alpha D / (2\lambda)$



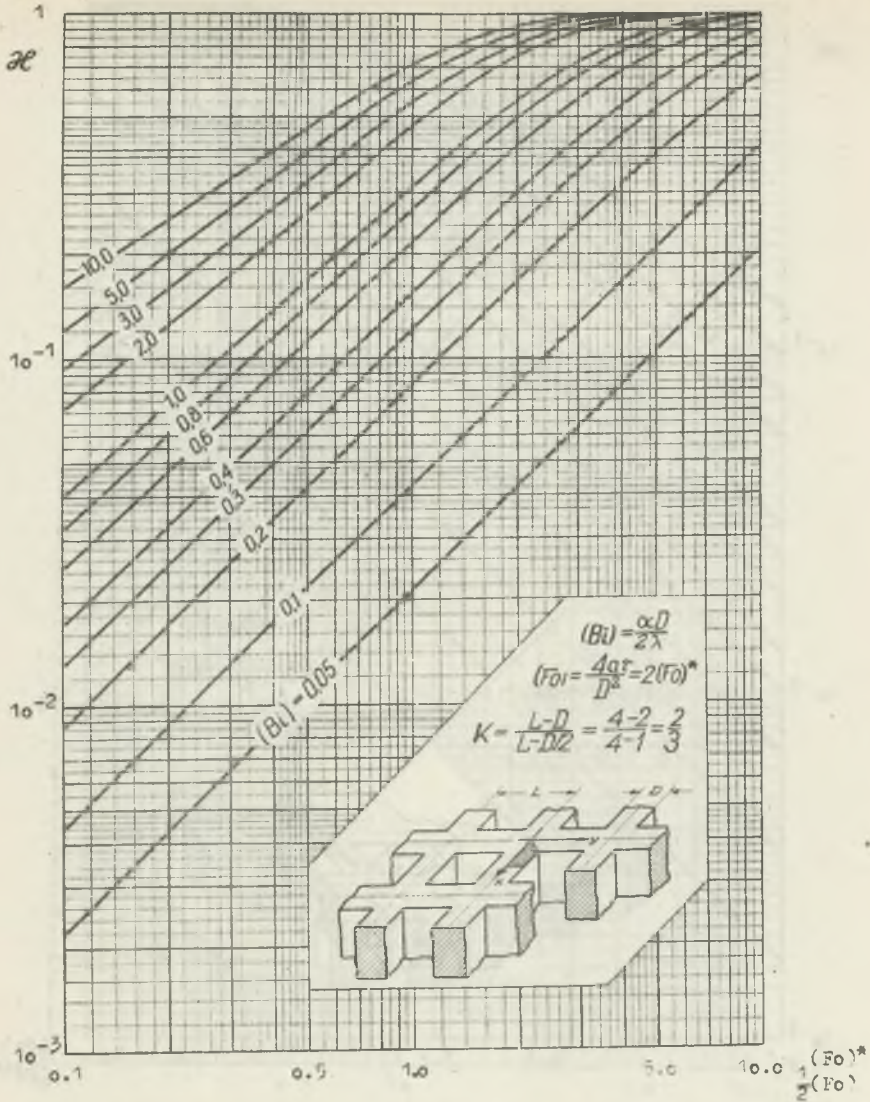
Rys. 4c. Wielkości pomocnicze $E_j = \bar{v}_j \sqrt{\bar{v}_j / v_j^2}$ z równania (15), dla kratowego elementu wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = l_{0A}/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{4}{5}$ - w zależności od liczby BIOTA $(Bi) = \alpha D / (2\lambda)$



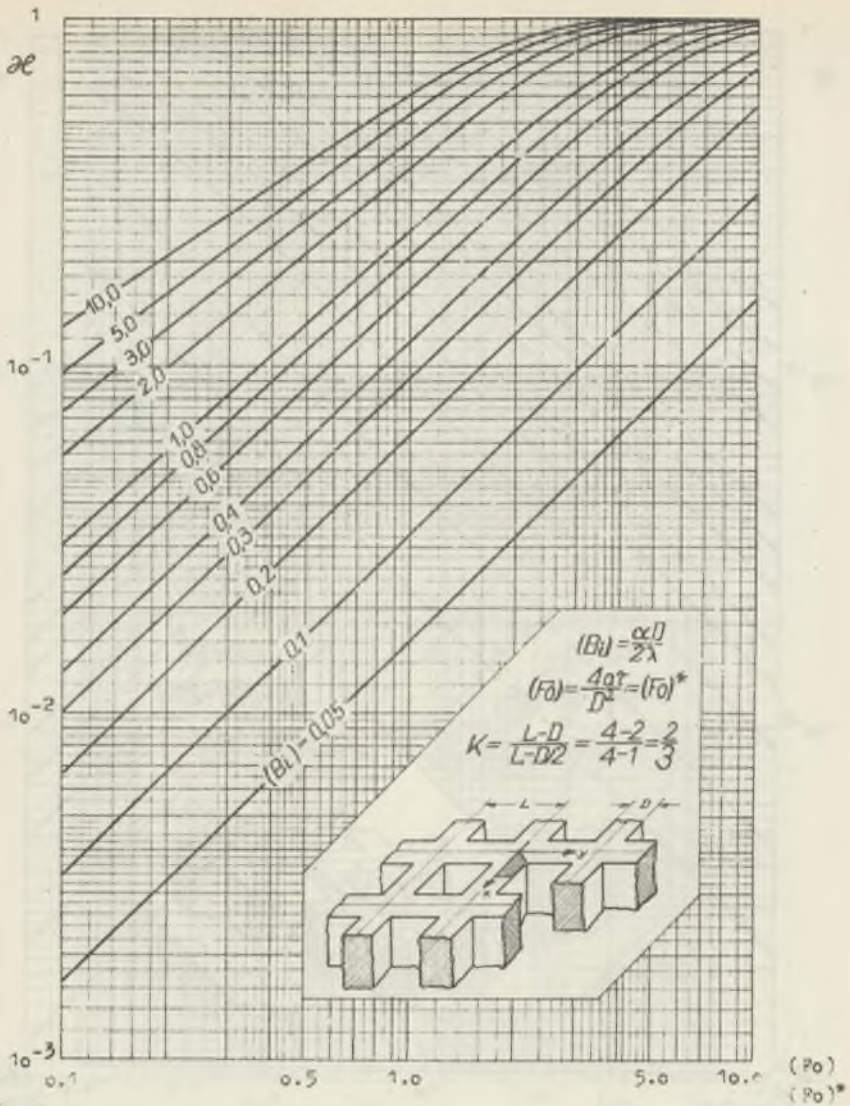
Rys. 5a. Zredukowana zdolność akumulowania z energii w kratowym elemencie wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = l_0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{1}{2}$ - przy okresowych, skokowych zmianach temperatury gazu, dla liczb FOURIERA: $(Fo) = 2(Fo)^*$ oraz jednakowych liczb BIOTA (Bi)



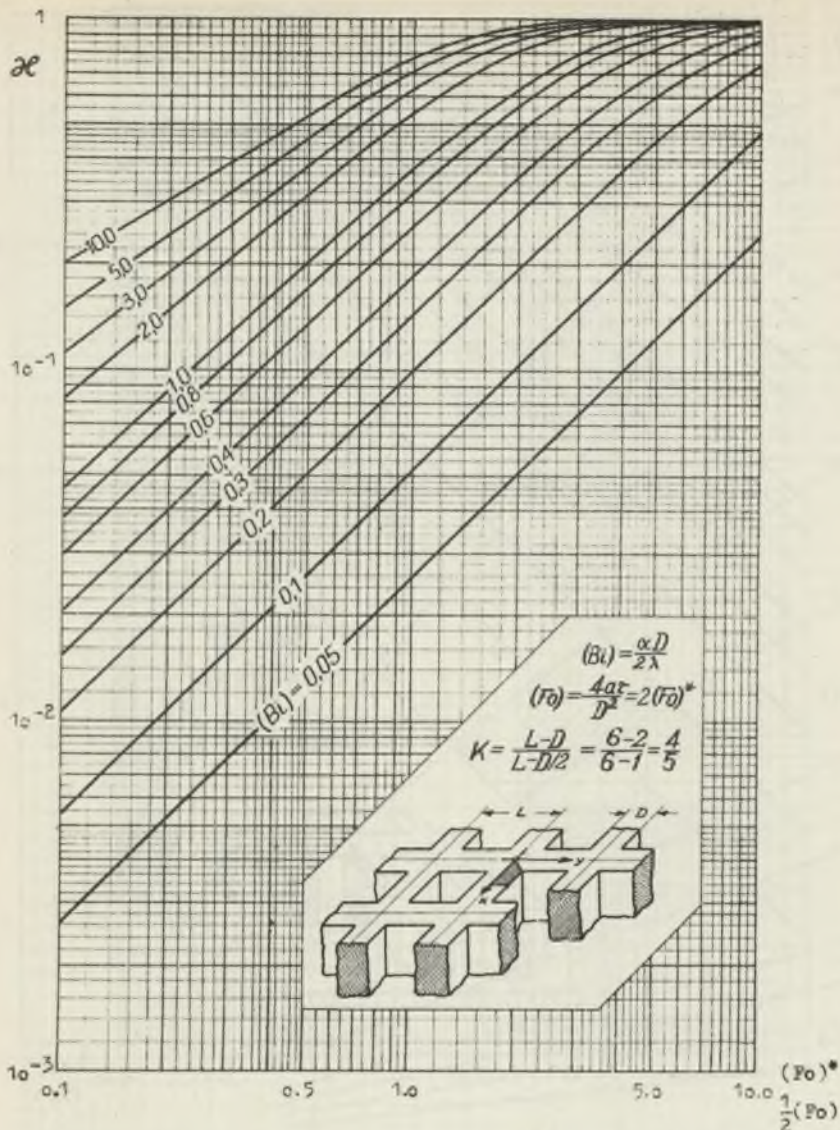
Rys. 5b. Zredukowana zdolność akumulowania α energii w kratowym elemencie wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = 1 \frac{A}{V} = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{1}{2}$ - przy okresowych, skokowych zmianach temperatury gazu, dla liczb FOURIERA: $(Fo) = (Fo)^*$ oraz jednakowych liczb BIOTA (Bi)



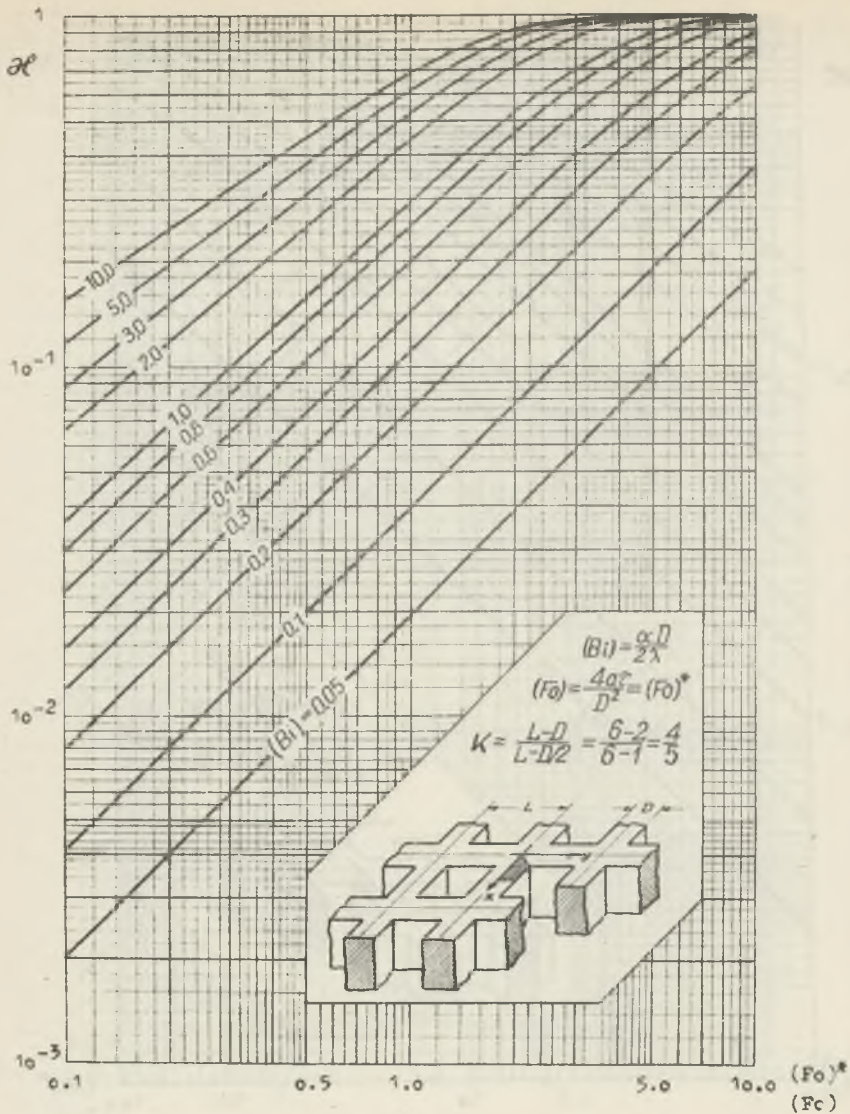
Rys. 5c. Zredukowana zdolność akumulowania α energii w kratowym elemencie wypełnienia regeneratora i liczbie kształtu $K = l_A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{2}{3}$ - przy okresowych, skokowych zmianach temperatury gazu, dla liczb FOURIERA: $(Fo) = 2(Fo)^*$ oraz jednakowych liczb BIOTA (Bi)



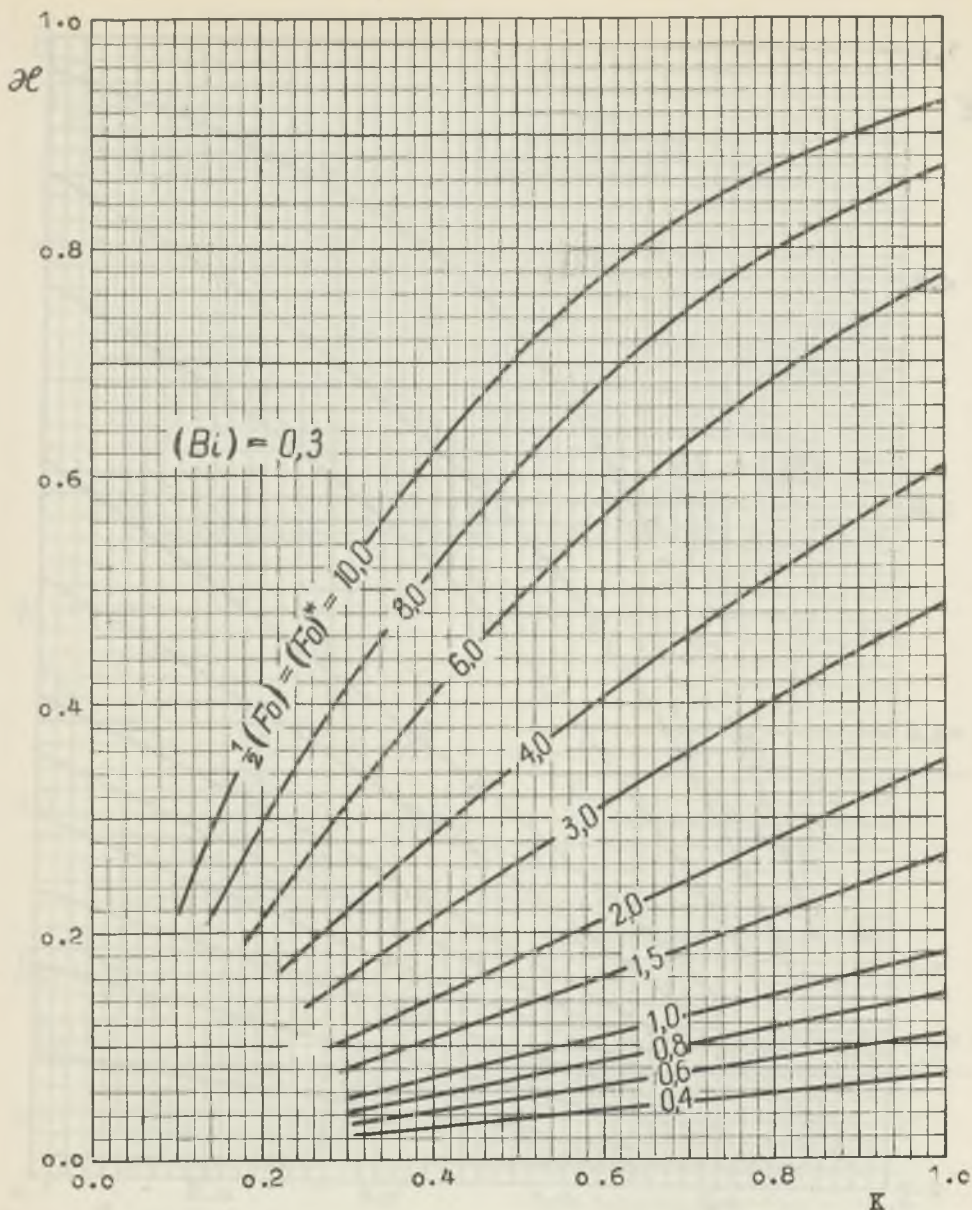
Rys. 5d. Zredukowana zdolność akumulowania $z\epsilon$ energii w kratowym elemencie wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = 1_{\circ}A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{2}{3}$ - przy okresowych, skokowych zmianach temperatury gazu, dla liczb FOURIERA: $(Fo) = (Fo)^*$ oraz jednakowych liczb BIOTA (Bi)



Rys. 5e. Zredukowana zdolność akumulowania $\alpha \epsilon$ energii w kratowym elemencie wypełnienia regeneratora o liczbie kształtu $K = l_0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{4}{5}$ - przy okresowych, skokowych zmianach temperatury gazu, dla liczb FOURIERA: $(Fo) = 2(Fo)^*$ oraz jednakowych liczb BIOTA (Bi)

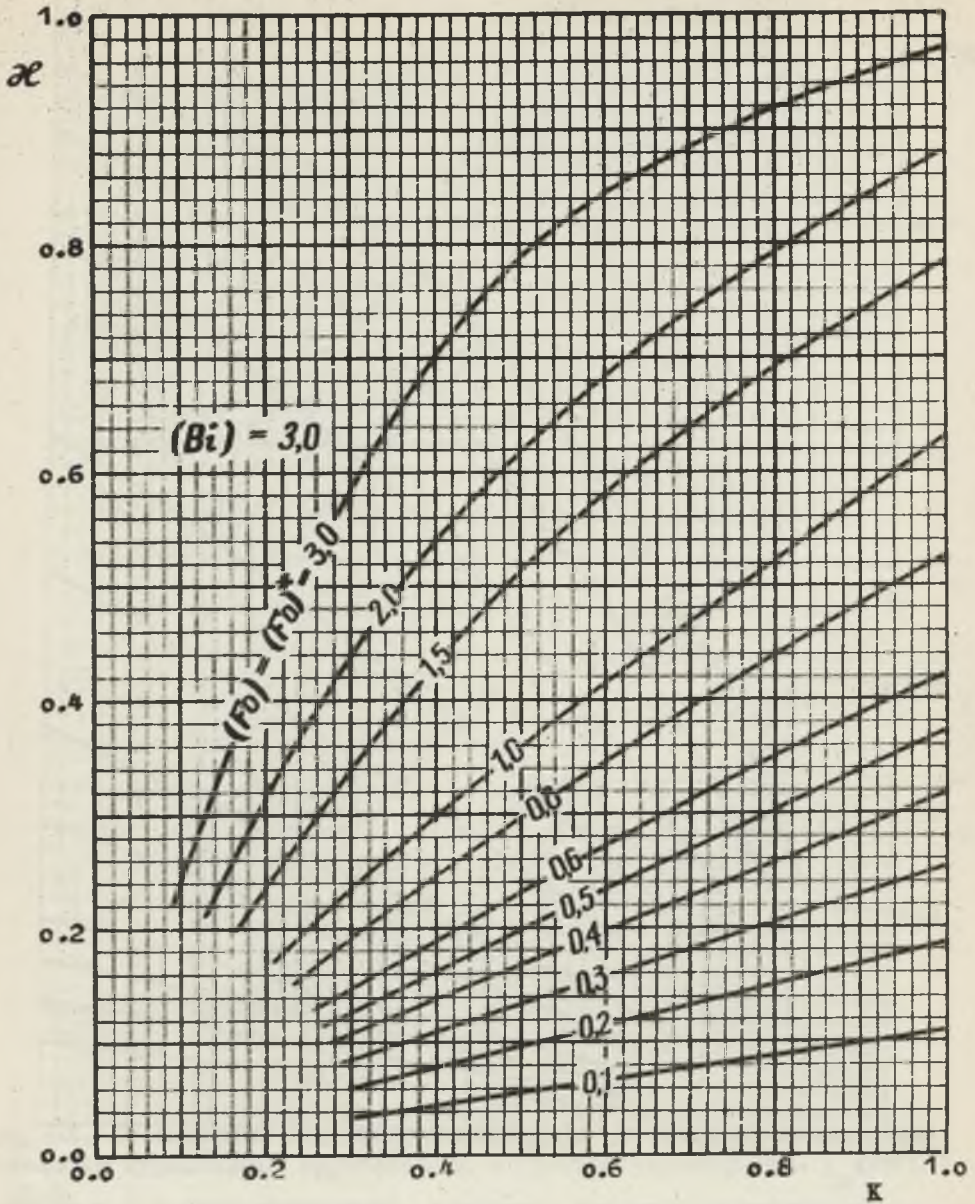


Rys. 5f. Zredukowana zdolność akumulowania α_e energii w kratowym elemencie wypięknienia regeneratora o liczbie kształtu $K = 1_0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2} = \frac{4}{5}$ - przy okresowych, skokowych zmianach temperatury gazu, dla liczb FOURIERA: $(Fo) = (Fo)^*$ oraz jednakowych liczb BIOTA (Bi)



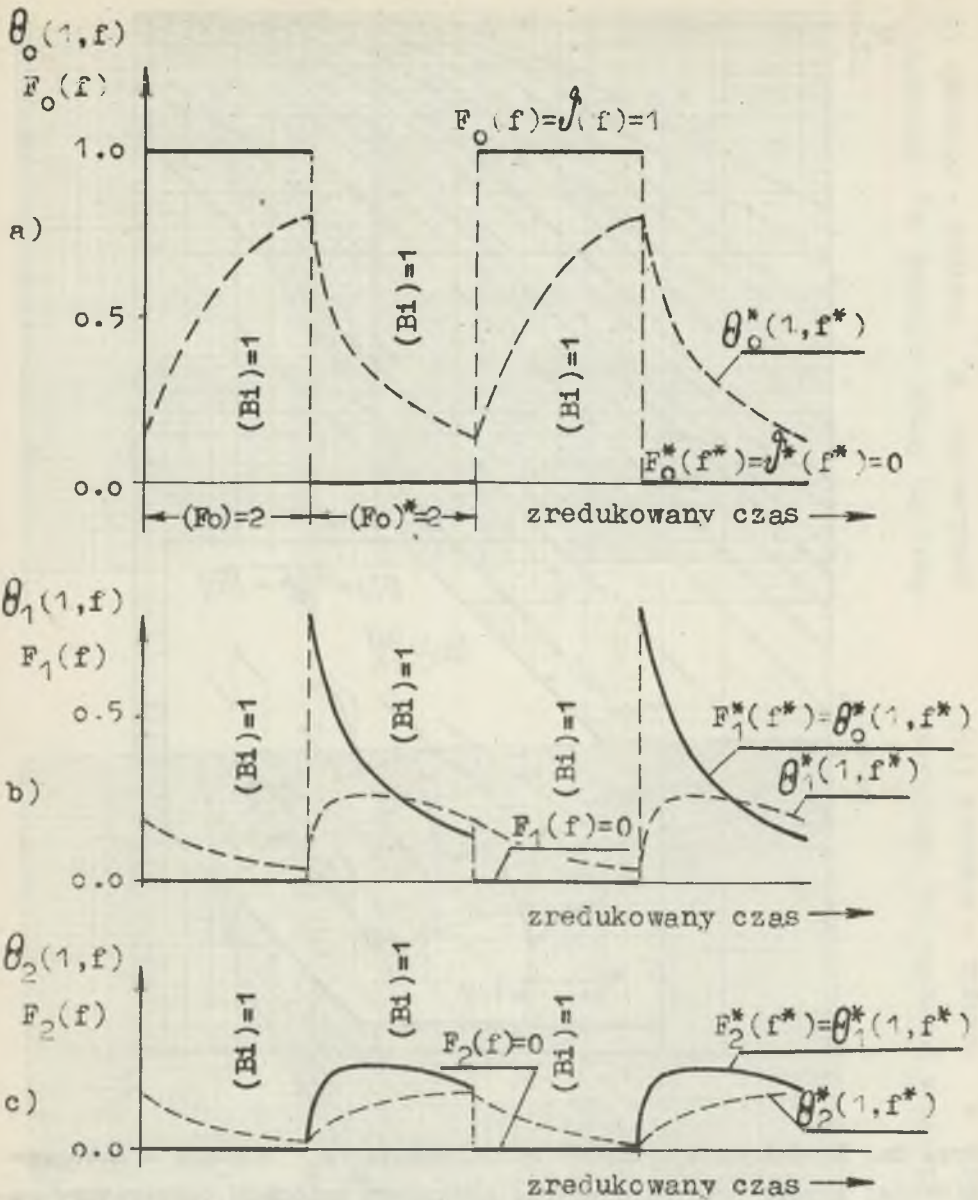
Rys. 6a. Zredukowana zdolność akumulowania α energii w kratowym elemencie wypełnienia regeneratora, dla liczby BIOTA - $(Bi) = 0,3$ oraz dla liczb FOURIERA = $(Fo) = 2(Fo)^*$ w zależności od liczby

$$\text{kształtu } K = l_0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2}$$

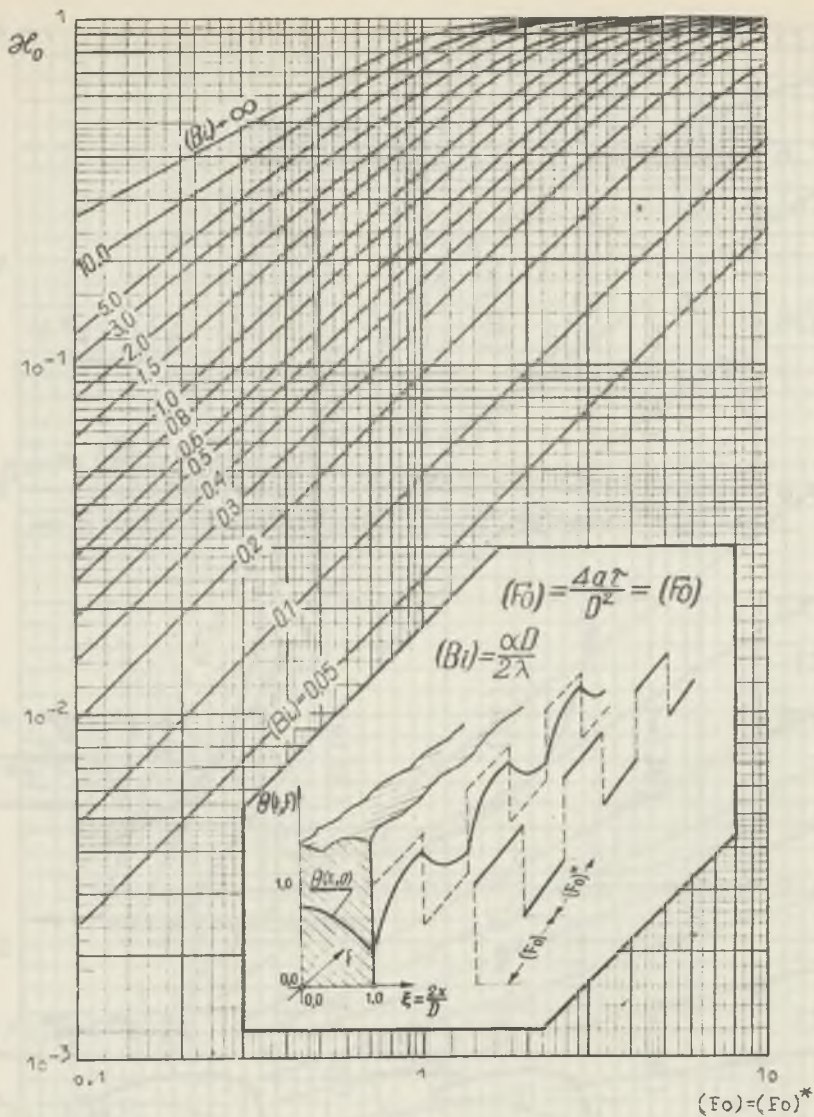


Rys. 6b. Zredukowana zdolność akumulowania α energii w kratowym elemencie wypełnienia regeneratora dla liczby BIOTA - $(Bi) = 3,0$ oraz dla liczb FOURIERA: $(Fo) = (Fo)^*$ w zależności od liczby

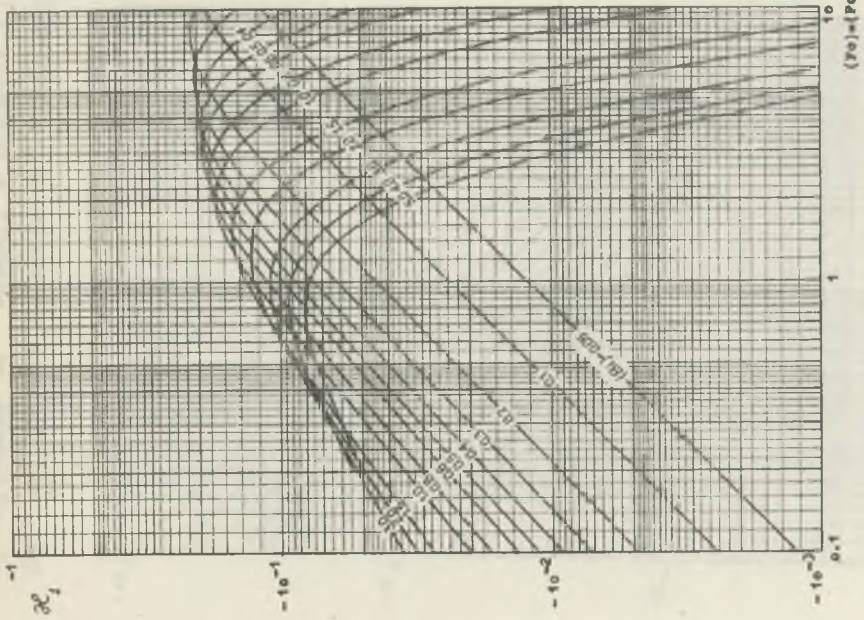
$$\text{kształtu } K = 1_0 \frac{A/V}{L-D/2}$$



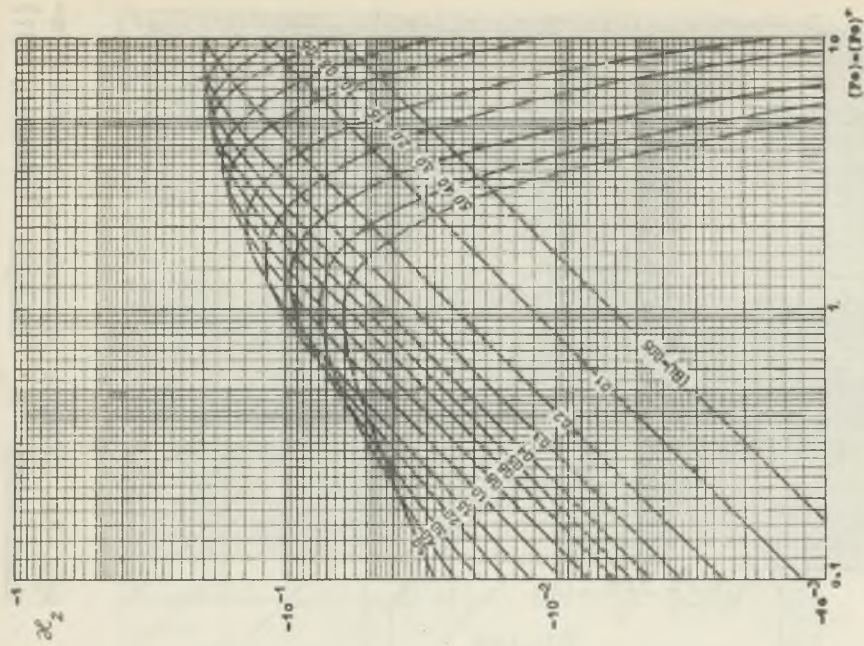
Rys. 7. Zredukowane temperatury $F_1(f)$ i $F_1^*(f^*)$ umownego gazu oraz zredukowane temperatury θ_1 i θ_1^* na ścianie nieograniczonej płyty - w zależności od czasu, przy okresowym grzaniu i chłodzeniu płyty



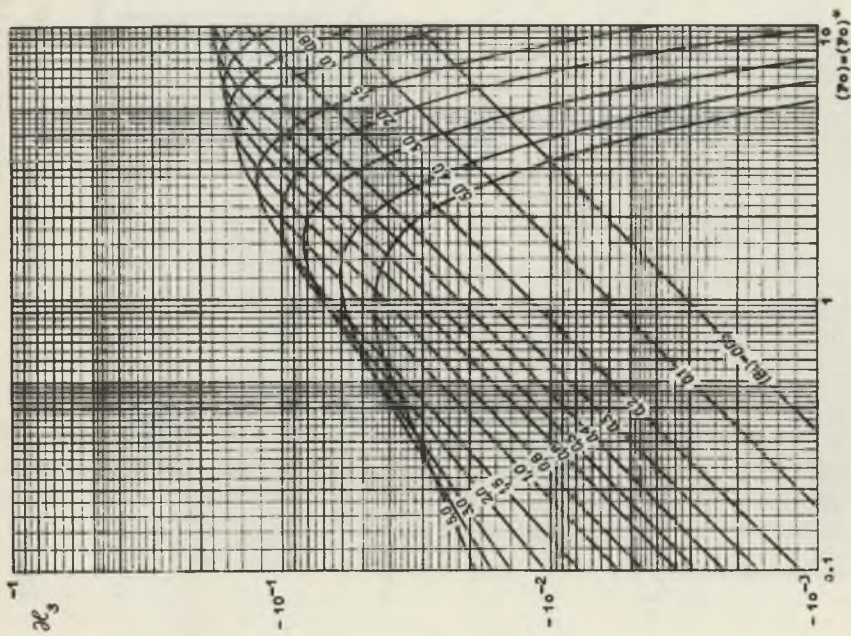
Rys. 8a. Zredukowana zdolność akumulowania α_0 energii w nieograniczonej płycie przy okresowych, skokowych zmianach temperatury gazu dla jednakowych liczb BIOTA i jednakowych czasów grzania i chłodzenia płyty



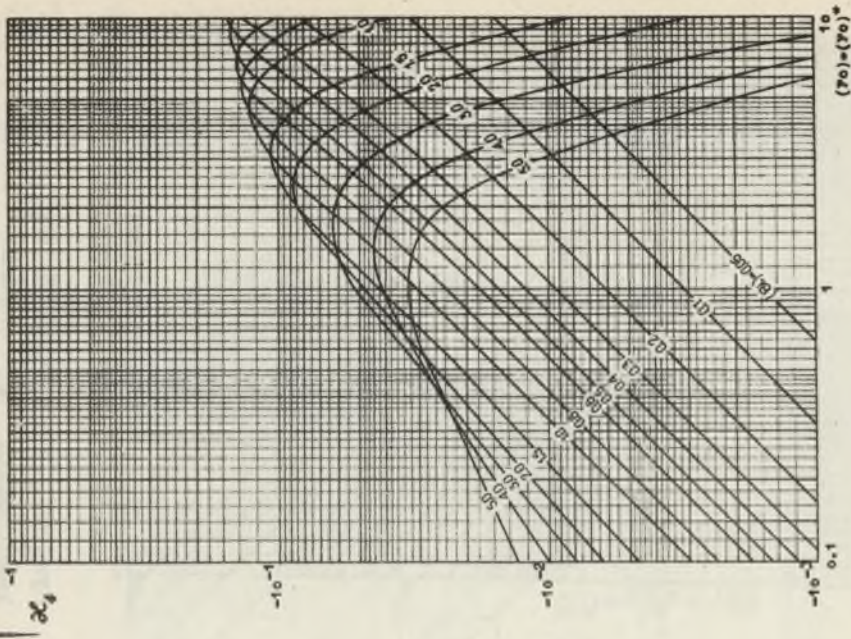
Rys. 8b. Pierwsza poprawka χ_1 zdolności akumulowania χ_0 energii - równanie (31)



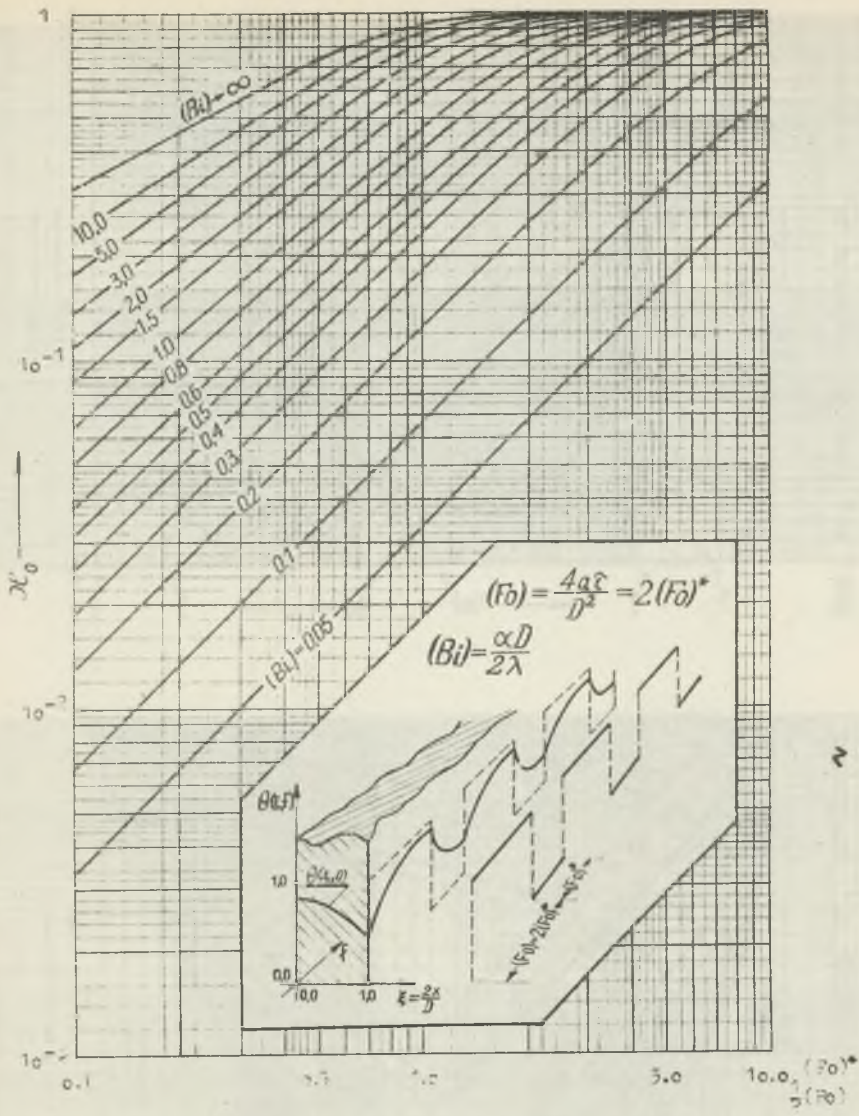
Rys. 8c. Druga poprawka χ_2 zdolności akumulowania χ_0 energii - równanie (31)



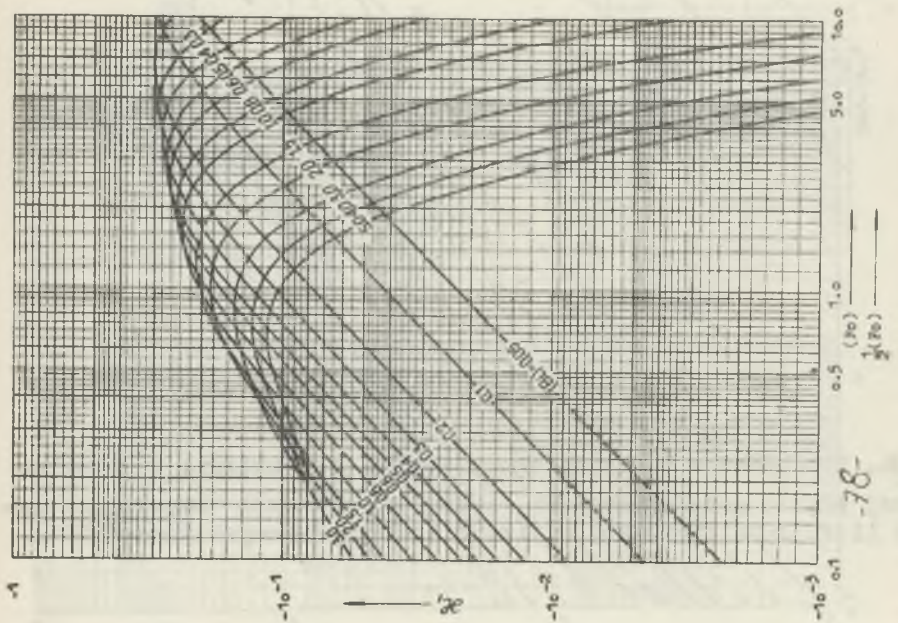
Rys. 8d. Trzecia poprawka α_3 zdolności akumulowania α_0 energii - równanie (31)



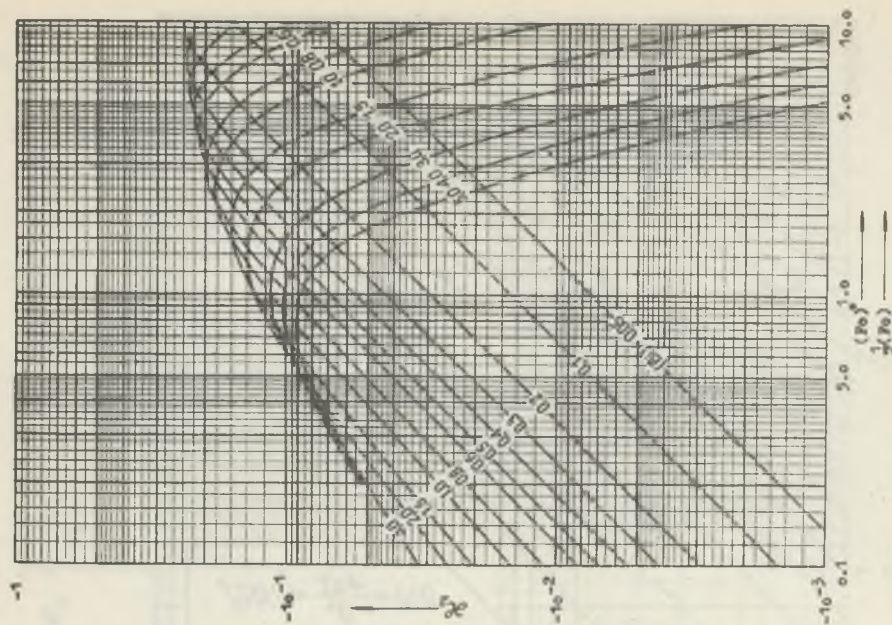
Rys. 8e. Czwarta poprawka α_4 zdolności akumulowania α_0 energii - równanie (31)



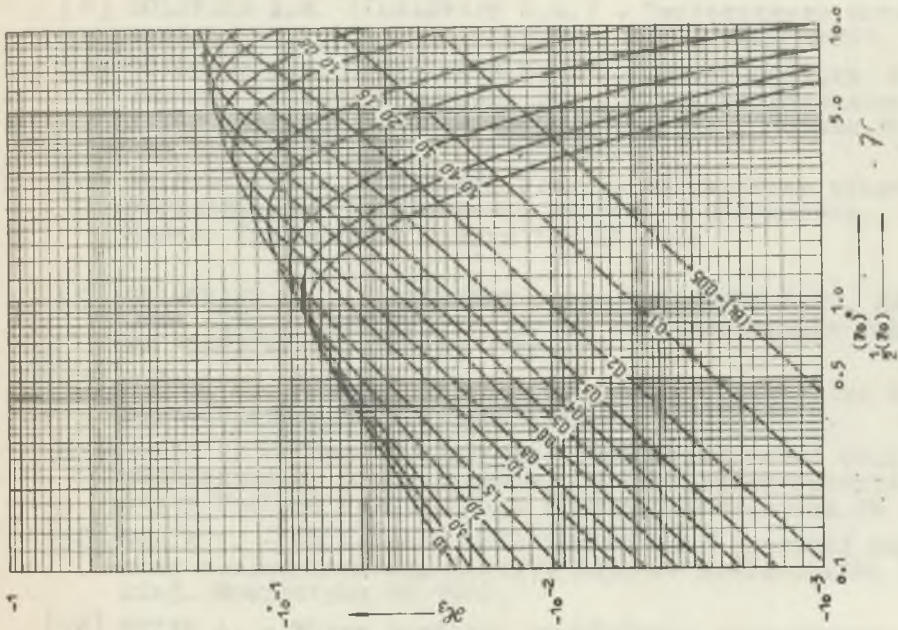
Rys. 9a. Zredukowana zdolność akumulowania η_0 energii w nieograniczonej płycie przy okresowych, skokowych zmianach temperatury gazu dla liczb FOURIERA: $(Fo) = 2(Fo)^*$ oraz jednakowych liczb BIOTA



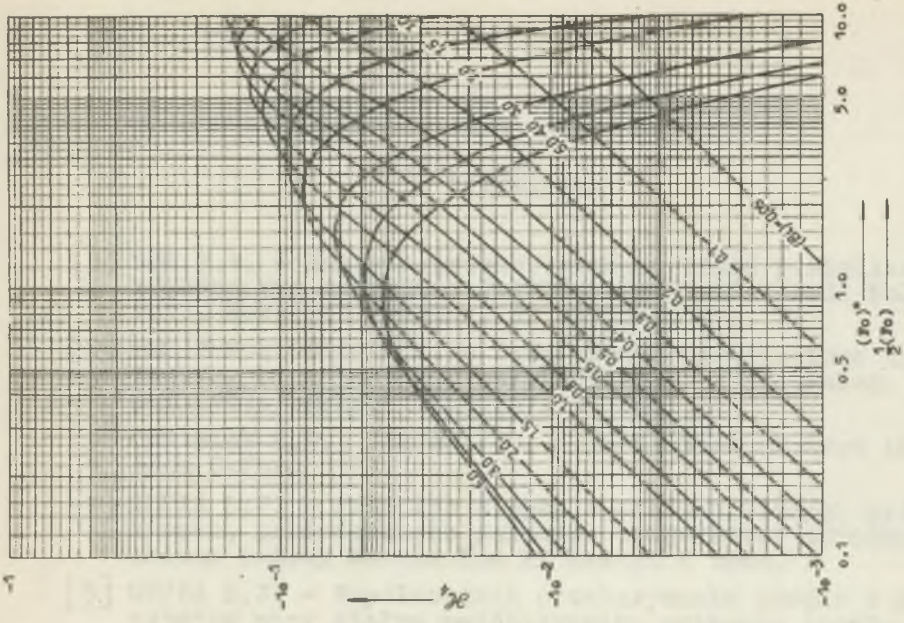
Rys. 9b. Pierwsza poprawka \mathcal{K}_1 zdolności akumulowania \mathcal{K}_0 energii - równanie (31)



Rys. 9c. Druga poprawka \mathcal{K}_2 zdolności akumulowania \mathcal{K}_0 energii - równanie (31)



Rys. 9d. Trzecia poprawka α_3 zdolności akumulowania α_0 energii - równanie (31)



Rys. 9e. Czwarta poprawka α_4 zdolności akumulowania α_0 energii - równanie (31)

LITERATURA

- [1] BES T.M. - Energiespeichervermögen eines periodisch erwärmten und gekühlten Festkörpers. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 17 (1969) 5 21.
- [2] BES T.M., GDULA S.J. - Temperature Oscillations in the Filling of a Heat Regenerator. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn. 17 (1969), 91 145.
- [3] CARISLAW H.S., JAEGER J.C. - Conduction of Heat in Solids Oxford 1947.
- [4] GDULA S.J. - Przepływ ciepła w ciałach stałych przy skokowych, okresowych zmianach temperatury ośrodka. Archiwum Budowy Maszyn Tom XI Zeszyt 2 1964.
- [5] GDULA S.J. - Współczynnik przekazywania ciepła w regeneratorze przy stałym współczynniku wnikania ciepła. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Energetyka 29 1968.
- [6] GOLDFARB E.M. (ГОЛЬДФАРБ Э.М.) - Теплотехника металлургических процессов Издательство "МЕТАЛЛУРГИЯ" 1967.
- [7] GOLDFARB E.M. (ГОЛЬДФАРБ Э.М.) - Закономерности прогресса насадки и пути повышения температуры нагрева доменного дутья. Известия Высших Учебных Заведений Черная Металлургия № 10 1960.
- [8] GOLDFARB E.M. (ГОЛЬДФАРБ Э.М.) - Аккумуляция тепла при периодически повторяющемся нагреве и охлаждении. Журнал Технической физики Том XX 1954
- [9] GRIGORIEW L.J., MAŃKOWSKI O.N. (ГРИГОРЬЕВ Л.Н., МАНЬКОВСКИЙ О.Н.) - Инженерные задачи нестационарного теплообмена "ЭНЕРГИЯ" Ленинград 1968.
- [10] GRÖBER H., ERK S., GRIGULL U. - Die Grundgesetze der Wärmeübertragung Springer-Verlag. Berlin 1957.
- [11] GUZIK A. - Ocena dokładności niektórych metod obliczania współczynnika przekazywania ciepła w regeneratorze. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Energetyka 26 1967.
- [12] GUZIK A. - Obliczenie pola powierzchni grzejnej nagrzewnicy wielkopiecowej. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Energetyka 26 1967.
- [13] GUZIK A. - Wpływ kształtu wypełnienia regeneratora na współczynnik przekazywania ciepła. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Energetyka 29 1968.

- [14] HAUSEN H. - Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom. Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg-München 1950.
- [15] HEILIGENSTAEDT W. - Wärmetechnische Rechnungen für Industrieöfen. 3 Auflage Dusseldorf 1951.
- [16] LYKOW A.W. (ЛЫКОВ А.В.) - Теория теплопроводности ГИИТЛ Москва 1952.
- [17] MADEJSKI J. - Rozwiązanie równania Laplace'a przy pewnych warunkach brzegowych i jego zastosowanie w teorii przewodzenia ciepła. Archiwum Mechaniki Stosowanej Tom III Zeszyt 2 1951.
- [18] MADEJSKI J. - Teoria wymiany ciepła PWN Warszawa-Poznań 1963.
- [19] OCHEŁDUSZKO S. - Termodynamika stosowana. WNT Warszawa 1964.
- [20] OCHEŁDUSZKO S. - Teoria maszyn cieplnych. PWT Tom III Warszawa 1955.
- [21] ROMANOWSKI P.I. - Szeregi Fourier'a - teoria pola - funkcje analityczne i specjalne - przekształcenie Laplace'a. PWN Warszawa 1963.
- [22] SCHACK A. - Der industrielle Wärmeübergang 5 Auflage Dusseldorf 1957.
- [23] SENKARA T. - O pewnym specjalnym przypadku rozwiązania równania Fouriera przewodnictwa ciepła w zastosowaniu do pieców płomiennych. Archiwum Mechaniki Stosowanej Tom III Zeszyt 2 1951.
- [24] SENKARA T. - Obliczenia cieplne pieców grzewczych w hutnictwie żelaza. Wydawnictwo "Śląsk" Katowice 1968.
- [25] SIEMIKIN I.D., GOLDFARB E.M. (СЕМИКИН И.Д., ГОЛЬДФАРБ Э.М.) - Регенерация тепла "Сталь" № 7 1953.
- [26] SIEMIKIN I.D., GOLDFARB E.M. (СЕМИКИН И.Д., ГОЛЬДФАРБ Э.М.) - Регенерация тепла в доменных воздухонагревателях "Сталь" № 9 1954.
- [27] STANISZEWSKI B. - Wymiana ciepła - podstawy teoretyczne. PWN Warszawa 1963.
- [28] SZARGUT J., GUZIK A. - Anwendung des Differenzenverfahrens zur Bestimmung der Wärmedurchgangszahl in Regeneratoren. Archiv für das Eisenhüttenwesen 39 Heft 1 1968.
- [29] TIMOFIEJEW W.N., MAŁKIN W.M., SZKLAR F.R. (ТИМОФЕЕВ В.Н., МАЛКИН В.М., ШКЛЯР Ф.Р.) - Теория расчета регенеративных теплообменников Тепло и Массоперенос Том 5 Минск 1963.
- [30] TOŁSTOW G.P. - Szeregi Fouriera. PWN Warszawa 1954.
- [31] WOSKRIESIENSKI K.D. (ВОСКРЕСЕНСКИЙ К.Д.) - Сборник расчетов и задач по теплопередаче ГОСЭНЕРГОИЗДАТ Москва-Ленинград 1959.

AKUMULACJA ENERGII W ELEMENTIE WYPEŁNIENIA REGENERATORA

S t r e s z c z e n i e

Problem dotyczy obliczeń zdolności akumulowania energii w elemencie wypełnienia regeneratora ciepła. Analiza zagadnienia ograniczona jest do przypadku, gdy proces okresowego grzania i chłodzenia wypełnienia osiągnął stan równowagi. Zagadnienie rozwiązane jest metodami analitycznymi.

Założenia przyjęte w pracy są następujące:

1. Wypełnienie ma dowolny kształt.
2. Temperatura gazu omywającego wypełnienie zmienia się w czasie trwania jednego cyklu według dowolnej funkcji $\psi(f)$ i $\psi^*(f^*)$, symbole bez gwiazdki dotyczą fazy grzania, symbole z gwiazdką dotyczą fazy chłodzenia wypełnienia.
3. Liczby Biota (Bi) oraz (Bi)^{*} mogą być różne i zmienne w czasie, pod warunkiem, że zmiana ta wyrażona jest w postaci wielomianu.

Dla wymienionych pierwszych dwóch założeń, dla liczb Fouriera (Fo) i (Fo)^{*} oraz stałej liczby Biota w ciągu całego procesu - wzór na zredukowaną zdolność akumulacji energii ma postać

$$\chi = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \frac{[1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)^*}] H_j - [1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)}] H_j^*}{1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)^*} e^{-\mu_j^2 (Fo)}}$$

gdzie:

μ_j - wartości własne występujące w równaniu

$$\nabla^2 v_j(\bar{r}) + \mu_j^2 v_j(\bar{r}) = 0,$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j [(Bi), \text{kształt wypełnienia}] = \bar{v}_j \bar{v}_j / \bar{v}_j^2$$

$$H_j = \int_0^{(Fo)} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2 [(Fo)-r]} v_j(r) dr,$$

$$H_j^* = \int_0^{(Fo)^*} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2 [(Fo)^*-r^*]} v_j^*(r^*) dr^*$$

Zmienność liczby Biota, o której mowa w punkcie 3, uwzględniona jest przez superpozycję zmodyfikowanego wzoru na χ . Np.

dla skokowych zmian liczb Biota $[(Bi) = \text{const}, (Bi)^* = \text{const}, (Bi) + (Bi)^*]$ wzór na χ ma postać $\chi = \sum_{i=0} [1 - (Bi)^*/(Bi)]^i \chi_i$ (rys. 8 i 9).

Konkretne obliczenia μ_j i ε_j przeprowadzono dla elementu wypełnienia kratowego o liczbie kształtu $K = l_0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2}$ równej $K = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ (rys. 3 i 4) i 1 (płyta, rys. 1). Obliczenia χ dla skokowej okresowej zmiany temperatury gazu dotyczą wspomnianych wyżej wartości K oraz liczb Fouriera: $(Fo) = (Fo)^*, (Fo) = 2(Fo)^*$ (rys. 5, 8 i 9).

АККУМУЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕМЕНТЕ НАСАДКИ РЕГЕНЕРАТОРА

Р е з ю м е

Проблема касается вычислений способности аккумулирования энергии в элементе насадки регенератора тепла. Анализ проблемы ограничивается случаем, когда процесс периодического нагрева и охлаждения насадки достиг состояния равновесия. Упомянутая проблема решается при использовании аналитических методов.

В работе приняты следующие предположения:

1. Насадка имеет произвольную форму.

2. Температура газа обтекающего насадку изменяется в течение периода одного цикла согласно произвольной функции $v'(f)$ и $v'(f^*)$; обозначения без звездочки касаются фазы нагрева, обозначения со звездочкой касаются фазы охлаждения насадки.

3. Числа Био (Bi) и $(Bi)^*$ могут быть различные и переменные во времени, при условии, что это изменение выражено полиномом.

Для вышеупомянутых первых двух предположений, для чисел Фурье (Fo) и $(Fo)^*$, а также постоянного числа Био в течение целого процесса - формула для коэффициента способности аккумулирования энергии имеет вид

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \frac{[1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)^*}]_{H_1} - [1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)}]_{H_1^*}}{1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)^*} - e^{-\mu_j^2 (Fo)}}$$

где:

μ_j - собственные значения выступающие в уравнении

$$\nabla^2 v_j(\bar{r}) + \mu_j^2 v_j(\bar{r}) = 0,$$

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j [Bi, \text{форма насадки}] = \bar{v}_j \bar{v}_j / \bar{v}_j^2$$

$$N_j = \int_0^{(Fo)} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2 [(Fo)-F]} \psi(F) dF; \quad N_j^* = \int_0^{(Fo)^*} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2 [(Fo)^*-F^*]} \psi(F^*) dF^*$$

Изменяемость числа Био, о которой упоминается в пункте 3, учитывается суперпозицией модифицированной формулы для χ . Напр., для скачкообразных изменений чисел Био $[(Bi) = \text{const} (Bi)^* = \text{const}, (Bi) \neq (Bi)^*]$ формула для χ имеет следующий вид

$$\chi = \sum_{i=0}^{\infty} \left[1 - \frac{(Bi)^i}{(Bi)^*} \right]^i \chi_i \quad (\text{рис. 8, 9})$$

Конкретные вычисления μ_j и ε_j произведены для элемента решетчатой насадки с коэффициентом формы $K = \frac{l_0 A}{V} = \frac{L-D}{L-D/2}$ равному $K = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ (рис. 3, 4) и 1 (пластина, рис. 1). Вычисления χ для скачкообразного периодического изменения температуры газа касаются вышеупомянутых изменений значения K , а также чисел Фурье: $(Fo) = (Fo)^*$, $(Fo) = 2(Fo)^*$ (рис. 5, 8, 9).

THE ACCUMULATION OF ENERGY
IN THE FILLING ELEMENT OF A REGENERATOR

S u m m a r y

In this paper the problem of the possibility of energy accumulation in the filling of the heat regenerator is considered. This considerations are limited to the semi-steady process of the periodic heating and cooling of the filling. The solution is obtained by analytic methods.

The following foundations have been assumed:

1. The arbitrary shape of the filling.
2. The temperature of the gas flowing around the filling changes in one period according to the arbitrary functions $v(f)$ and $v^*(f^*)$. The symbols with the mark - denote the cooling stage. The symbols without the mark denote the heating stage.

3. The Biot-numbers (Bi) and $(Bi)^*$ can be different and changing with time but they have to be given in the form of a polynomial.

For the case of constant Biot-numbers, when only the first two foundations are fulfilled, the expression for the reduced accumulation ability of the energy is as follows

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \frac{[1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)^*}] H_j - [1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)}] H_j^*}{1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)^*} e^{-\mu_j^2 (Fo)}}$$

Where :

μ_j - the own values appearing in the equations

$$\nabla^2 v_j(\bar{r}) + \mu_j^2 v_j(\bar{r}) = 0,$$

$\varepsilon_j = \varepsilon_j[(Bi), \text{ shape of filling}]$

$$H_j = \int_0^{(Fo)} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2 [(Fo) - f]} v(f) df,$$

$$H_j^* = \int_0^{(Fo)^*} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2 [(Fo)^* - f^*]} v^*(f^*) df^*$$

The variability of the Biot-number (assumption 3) is taken into account by superposition of the modified expression for α .

For the jumping changes of the Biot-numbers $[(Bi) = \text{const}, (Bi)^* = \text{const}, (Bi) \neq (Bi)^*]$, for example, the expression for α has a form $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - (Bi)^*/(Bi)]^i \alpha_i$ (Fig. 8 and 9).

The numerical calculations of μ_j and ε_j are carried out for the grille element of filling with the shape number $K = 1.0 A/V = \frac{L-D}{L-D/2}$ equal $K = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ (Fig. 3, 4), and 1 (plate, Fig. 1). The calculations for the jumping periodic change of gas temperature deal with the above mentioned values of K and with the Fourier numbers: $(Fo) = (Fo)^*, (Fo) = 2(Fo)^*$ (Fig. 5, 8, 9).

ENERGIESPEICHERUNG EINES GITTERELEMENTS IM REGENERATOR

Z u s a m m e n f a s s u n g

Das Problem betrifft die Berechnung des Energiespeichervermögens eines Gitterelements im Wärmereregulator. Die Analyse des Problems wurde auf den Fall begrenzt, in dem der Prozess der periodischen Heizung und Kühlung des Gitters den Beharrungszustand erreicht hat. Das Problem wird mit analytischen Methoden gelöst.

In der Arbeit wurden folgende Voraussetzungen angenommen:

1. Die Füllung hat eine beliebige Form.

2. Die Temperatur des die Füllung umströmenden Gases, ändert sich während eines Zyklus nach beliebiger Funktion $\nu(f)$, $\nu^*(f^*)$ - Symbole ohne Stern betreffen die Heizphase, Symbole mit Stern - die Kühlphase.

3. Die Biotzahlen (Bi) und $(Bi)^*$ können verschieden und in der Zeit veränderlich sein - unter der Bedingung, dass die Abhängigkeit in Form eines Polynoms ausgedrückt wird.

Für die erwähnten, beiden ersten Voraussetzungen 1 und 2, die Fourierzahlen (Fo) und (Fo) wie auch die während der ganzen Periode konstanten Biotzahlen nimmt die Formale zur Berechnung des reduzierten Energiespeichervermögen folgende Form an

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \frac{[1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)^*}] H_j - [1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)}] H_j^*}{1 - e^{-\mu_j^2 (Fo)} - e^{-\mu_j^2 (Fo)^*}}$$

dabei sind:

$$H_j = \int_0^{(Fo)} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2 [(Fo)-f]} v(f) df;$$

$$H_j^* = \int_0^{(Fo)^*} \mu_j^2 e^{-\mu_j^2 [(Fo)^*-f]} v^*(f^*) df^*$$

μ_j - in der Gleichung $\nabla^2 v_j(\bar{r}) + \mu_j^2 v_j(\bar{r}) = 0$ auftretender Eigenwert,

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j [(Bi), \text{Füllungsform}] = \bar{v}_j \bar{v}_j / \bar{v}_j^2.$$

Die Änderung der in Punkt 3 besprochenen Biotzahlen wurde durch die Superposition der modifizierten Formel für α berücksichtigt. Für die sprunghafte Änderung der Biotzahlen $(Bi) = \text{const}$, $(Bi)^* = \text{const}$, $(Bi)_j \neq (Bi)^*$ hat z.B. die Formel für α die Form $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - \frac{(Bi)}{(Bi)^*}]^i \alpha_i$ (Abb. 8 und 9).

Zahlenmässige Berechnungen μ_j und ε_j wurden für das Gitterfüllungselement mit der Formzahl $K = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ (Abb. 3, 4) und 1 (Platte, Abb. 1) durchgeführt.

Die Berechnungen von α bei einer sprunghaften periodischen Temperaturänderung des Gases betreffen die oben erwähnten K-Werte, wie auch die Fourierzahlen: $(Fo) = (Fo)^*$ oder $(Fo) = 2(Fo)^*$ (Abb. 5, 8 und 9).

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

ukazują się w następujących seriach:

- A. AUTOMATYKA
- B. BUDOWNICTWO
- Ch. CHEMIA
- E. ELEKTRYKA
- En. ENERGETYKA
- G. GÓRNICTWO
- IS. INŻYNIERIA SANITARNA
- MF. MATEMATYKA-FIZYKA
- M. MECHANIKA
- NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty
z serii En.:

- Energetyka z. 1, 1956 r., s. 174, zł 26,—
- Energetyka z. 2, 1957 r., s. 118, zł 24,—
- Energetyka z. 3, 1959 r., s. 62, zł 7,—
- Energetyka z. 4, 1960 r., s. 113, zł 22,80
- Energetyka z. 5, 1961 r., s. 103, zł 16,25
- Energetyka z. 6, 1961 r., s. 55, zł 4,15
- Energetyka z. 7, 1961 r., s. 60, zł 5,50
- Energetyka z. 8, 1961 r., s. 50, zł 3,70
- Energetyka z. 9, 1962 r., s. 127, zł 9,55
- Energetyka z. 10, 1962 r., s. 73, zł 5,50
- Energetyka z. 11, 1963 r., s. 178, zł 9,30
- Energetyka z. 12, 1964 r., s. 89, zł 4,65
- Energetyka z. 13, 1964 r., s. 109, zł 8,10
- Energetyka z. 14, 1964 r., s. 104, zł 8,15
- Energetyka z. 15, 1964 r., s. 69, zł 4,65
- Energetyka z. 16, 1964 r., s. 149, zł 7,50
- Energetyka z. 17, 1964 r., s. 152, zł 7,10
- Energetyka z. 18, 1965 r., s. 128, zł 6,40
- Energetyka z. 19, 1965 r., s. 92, zł 6,—
- Energetyka z. 20, 1965 r., s. 90, zł 4,70
- Energetyka z. 21, 1966 r., s. 120, zł 8,—
- Energetyka z. 22, 1966 r., s. 111, zł 6,—
- Energetyka z. 23, 1966 r., s. 64, zł 5,—
- Energetyka z. 24, 1967 r., s. 100, zł 5,—
- Energetyka z. 25, 1967 r., s. 176, zł 10,—
- Energetyka z. 26, 1967 r., s. 106, zł 6,—
- Energetyka z. 27, 1967 r., s. 132, zł 8,—
- Energetyka z. 28, 1968 r., s. 239, zł 13,—
- Energetyka z. 29, 1968 r., s. 191, zł 10,—
- Energetyka z. 30, 1969 r., s. 129, zł 7,—