ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: ENERGETYKA z. 34 Nr kol. 279

STANISŁAW JERZY GDULA

Katedra Podstaw Techniki Cieplnej

KONWEKCJA SWOBODNA PRZY PRZEPŁYWIE LAMINARNYM W PIONOWEJ SZCZELINIE PRZELOTOWEJ

Streszczenie. Rozpatrzono zagadnienie konwekcji swobodnej przy przepływie laminarnym w pionowej, przelotowej szczelinie o ściankach ogrzewanych stałymi strumieniami ciepła. Po wyznaczeniu rozkładu temperatur płynu w szczelinie i przy wykorzystaniu równań na współczynnik wnikania ciepła przy przepływie wymuszonym, określono rozkłady temperatur na ściankach szczeliny.

1. Wstęp

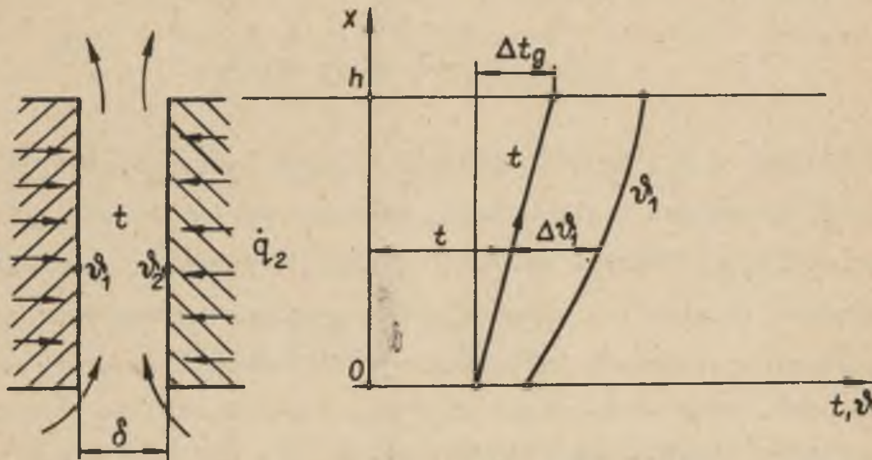
W zagadnieniach konwekcji swobodnej operuje się zwykle rozwiązaniami dotyczącymi przypadku stałej temperatury ścianki. Wielkością poszukiwaną jest gęstość strumienia ciepła, wyznaczana za pośrednictwem współczynnika wnikania ciepła. Gęstość strumienia ciepła nie jest oczywiście jednakowa na całej powierzchni wymieniającej ciepło i zwykle poszukuje się jej wartości średniej.

W wielu zagadnieniach praktycznych gęstość strumienia ciepła jest wielkością zadaną. Z przypadkami takimi mamy do czynienia przy chłodzeniu urządzeń we wnętrzu których generuje się określony strumień ciepła w wyniku np. przepływu prądu elektrycznego, przebiegających reakcji egzotermicznych itp. Rozkład gęstości strumienia ciepła jest z góry zadany, najczęściej można przyjąć że jest stały na powierzchni. Posłużenie się w takim przypadku równaniem obowiązującym przy stałej temperaturze ścianki pozwala jedynie w sposób przybliżony wyznaczyć średnią temperaturę powierzchni. Porównanie dla pionowej płyty rozwiązania dla stałego strumienia ciepła [5] z klasycznym rozwiązaniem dla stałej temperatury ścianki [4] (oba dla przypadku laminarnego) wykazuje różnicę stosunkowo niedużą - rzędu 10%. Dla celów praktycznych konieczna jest jednak znajomość nie tylko średniej, ale i maksymalnej temperatury powierzchni, z uwagi na ograniczenia temperaturowe nakładane na materiały konstrukcyjne z różnych przyczyn technologicznych (wytrzymałość izolacji, samozapłon, naprężenia lub odkształcenia termiczne). Ta maksymalna temperatura niekiedy dość znacznie odbiega od średniej.

W niniejszej pracy rozpatrzono jeden z przypadków konwekcji swobodnej przy stałej gęstości strumienia ciepła, a mianowicie chłodzenie naturalne przelotowej szczeliny pionowej przy przepływie laminarnym płynu chłodzącego. Analogiczne zagadnienie dla stałej temperatury ścianek badał Elenbaas [2].

2. Sformułowanie problemu

Dwie pionowe płyty o wysokości h i wymiarze poziomym (długość) $l \gg h$ są umieszczone równolegle w odległości δ, tworząc pionową przelotową szczelinę (rys. 1). Na powierzchniach płyt wydziela się ciepło o równomiernych gęstościach strumieni ciepła wynoszących dla obu płyt $\dot{q}_1$ i $\dot{q}_2$. Płyty są umieszczone w środowisku płynnym o nieograniczonej pojemności cieplnej, mającym temperaturę t_o. Płyn znajdujący się w szczelinie odbiera ciepło wydzielane na jej ścianach, ogrzewa się i dzięki różnicy gęstości oraz obecności pola grawitacyjnego, przepływa ku górze. Rozpatrujemy ustalony, laminarny przepływ płynu. Poszukiwane są rozkłady temperatur ścian kanału ϑ_1 i ϑ_2, średnie i maksymalne wartości tych temperatur. Należy rów-



Rys. 1. Rozkład temperatur płynu i ścianek szczeliny

nież określić kryterium utworzone ze zmiennych opisujących zjawisko, decydujące o charakterze przepływu (laminarny, czy turbulentny).

3. Rozkład temperatury płynu w szczelinie

Jeżeli przyjmiemy, że ciepło właściwe płynu c_p jest niezmienne, to ze stałych gęstości strumieni ciepła na ściankach szczeliny wynika liniowa zmienność temperatury płynu w szczelinie (rys. 1)

$$\Delta t = t_o + \Delta t_g \frac{x}{h} \tag{1}$$

gdzie Δt_g oznacza przyrost temperatury gazu w szczelinie (nadwyżkę ponad temperaturę t_o u wylotu ze szczeliny).

Dla wyznaczenia Δt_g rozpatrzymy dwa równania: równanie równowagi ciśnień i równanie bilansu energii. Pierwsze z tych równań ma następującą postać

$$\Delta p_h = \varrho \frac{w^2}{2} + \Delta p_f + \xi \varrho \frac{w^2}{2}, \tag{2}$$

w którym Δp_h oznacza różnicę ciśnień hydrostatycznych, Δp_f opory przepływu w szczelinie, ostatni zaś człon opór napływu do szczeliny. Liczba oporu ξ zależy od stopnia zaokrąglenia brzegów szczeliny i ewentualnych ograniczeń przestrzeni sąsiadującej z wlotem do szczeliny. Jeżeli przed wlotem do szczeliny jest przestrzeń nieograniczona, a szczelina ma brzegi o ostrych krawędziach, można przyjąć $\xi = 0,2$ i wartość ta w niniejszej pracy została przyjęta do dalszych obliczeń. Przy smukłych szczelinach (duże h/δ) człon Δp_f majoryzuje pozostałe i wartość ξ nie wpływa znacząco na ostateczny wynik. Na tych samych założeniach o smukłości szczeliny można oprzeć inne uproszczenie - pominięcie wpływu odcinka rozbiegowego na opory przepływu i obliczenie spadku ciśnienia dla całej szczeliny według wzoru Poisseuille'a dotyczącego przepływu przy ustabilizowanym profilu prędkości

$$\Delta p_h = \frac{12\, h \nu \varrho w}{\delta^2}. \tag{3}$$

W równaniu (3), podobnie jak i w (1), symbolem w oznaczono średnią prędkość przepływu płynu w szczelinie.

Różnica ciśnień hydrostatycznych wynika z różnicy gęstości płynu w kanale i zewnątrz kanału, spowodowanej różnicą temperatur

$$\Delta p_h = g \int_0^h (\varrho_o - \varrho)\, dx, \tag{4}$$

gdzie ϱ_o jest gęstością płynu u wlotu do szczeliny (w temperaturze t_o). Ponieważ zmiana ciśnienia w szczelinie jest znikomo mała w porównaniu z wartością samego ciśnienia, proces można traktować jak izobaryczny (założenie powszechnie przyjmowane w konwekcji) i obliczyć przyrost gęstości z prawa rozszerzalności

$$\varrho_o - \varrho = \varrho_o \beta \Delta t, \tag{5}$$

gdzie β jest współczynnikiem rozszerzalności objętościowej

$$\beta = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial T}\right)_p \tag{6}$$

zależnym od temperatury (dla gazu doskonałego i półdoskonałego $\beta = 1/T$). W celu linearyzacji równań opisujących konwekcję swobodną przyjmuje się powszechnie stałą wartość tego współczynnika, odpowiadającą temperaturze t_o.

Wyznaczając z równania (1) przyrost temperatury $t - t_o$, otrzymujemy

$$\varrho_o - \varrho = \varrho_o \beta \Delta t_g \frac{x}{h}$$

co po wstawieniu do równania (4) i wykonaniu całkowania daje

$$\Delta p_h = \frac{1}{2} g \varrho_o \beta \Delta t_g h \tag{7}$$

W rezultacie równanie (7) przybiera postać

$$1{,}2\varrho w^2 + \frac{24\ h\mu w}{\delta^2} - g\varrho_o \beta \Delta t_g h = 0 \tag{8}$$

Równanie to zawiera dwie niewiadome: Δt_g i w.

Drugiego równania dostarcza bilans energii, w myśl którego ciepło wydzielone na powierzchniach szczeliny równa się przyrostowi entalpii płynu przepływającego przez szczelinę

$$(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)h = w\delta\varrho c_p \Delta t_g. \tag{9}$$

W celu przekształcenia równań (8) i (9) do postaci bezwymiarowej wprowadźmy następujące zmienne bezwymiarowe:

- zredukowany przyrost temperatury płynu w kanale

$$\Theta_g = \frac{\Delta t_g \lambda}{(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\delta}, \tag{10}$$

- kryterium K będące modyfikacją liczby Grashofa dla przypadku stałego strumienia ciepła

$$K = \frac{g\beta(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\delta^4}{\lambda\nu^2} \tag{11}$$

- liczbę Reynoldsa

$$Re = \frac{w\delta}{\nu}, \tag{12}$$

- liczbę Prandtla

$$Pr = \frac{\nu c_p \varrho}{\lambda}, \tag{13}$$

- zredukowaną wysokość kanału

$$H = \frac{h}{\delta}. \tag{14}$$

Bezwymiarowa postać równań (9) i (10) jest następująca

$$1{,}2\ Re^2 + 24\ H\ Re - H\ K\ \Theta_g = 0, \tag{15}$$

$$Re = \frac{H}{\Theta_g\ Pr}. \tag{16}$$

Łącząc równania (15) i (16) otrzymujemy równanie o jednej niewiadomej Θ_g

$$\Theta_g^3 - \frac{24\ H}{K\ Pr}\Theta_g - \frac{1{,}2\ H}{K\ Pr^2} = 0. \tag{17}$$

Badając funkcję

$$\frac{H}{K} = \frac{\Theta_g^3}{\frac{24}{Pr}\Theta_g + \frac{1{,}2}{Pr^2}} \tag{18}$$

przy ustalonej wartości liczby Prandtla łatwo wykazać, że funkcja ta przechodzi przez początek układu i jest monotoniczna (rosnąca) w pierwszej ćwiartce. Równanie (17) ma zatem dla $H/K > 0$ jedno dodatnie rozwiązanie będące poszukiwaną funkcją

$$\Theta_g = f(\tfrac{H}{K}, Pr).$$

Funkcję tę aproksymowano dla potrzeb praktycznych funkcją potęgową, przy stałej wartości liczby Prandtla $Pr = 0{,}71$

$$\Theta_g = 0{,}1529\left(\frac{H}{K}\right)^{0{,}3236} \tag{19}$$

Aproksymację wykonano dla zakresu $10^{-7} < H/K < 10^{-2}$
Obliczenia przeprowadzono metodą najmniejszych kwadratów na maszynie cyfrowej ZAM-2.

3. Temperatury ścian szczeliny

Znając rozkład temperatury płynu w szczelinie można wyznaczyć rozkłady temperatur ścian szczeliny, jeżeli znane są współczynniki wnikania ciepła

$$\vartheta_1 = t + \Delta\vartheta_{g1} = t_o + \Delta t_g \frac{x}{h} + \frac{\dot{q}_1}{\alpha_1}, \tag{20}$$

$$\vartheta_2 = t + \Delta\vartheta_{g2} = t_o + \Delta t_g \frac{x}{h} + \frac{\dot{q}_2}{\alpha_2}. \tag{21}$$

Równania (20) i (21) można sprowadzić do postaci bezwymiarowej, wprowadzając określone wcześniej zmienne Θ_g, X, H oraz dodatkowe zmienne:

- zredukowaną temperaturę ściany szczeliny

$$\Theta = \frac{(\vartheta - t_o)\lambda}{(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\delta}, \tag{22}$$

- liczbę Nusselta

$$Nu = \frac{\alpha\delta}{\lambda}, \tag{23}$$

- stosunek strumieni ciepła wydzielanych na obu ścianach szczeliny

$$\varkappa = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}. \tag{24}$$

Bezwymiarowa postać równań (20) i (21) jest następująca

$$\Theta_1 = \Theta_g \frac{X}{H} + \frac{1}{Nu_1} \frac{1}{1+\varkappa},$$

$$\Theta_2 = \Theta_g \frac{X}{H} + \frac{1}{Nu_2} \frac{\varkappa}{1+\varkappa}. \qquad (26)$$

Maksymalne temperatury ścian szczeliny znajdują się u jej szczytu (X = H)

$$\Theta_{1max} = \Theta_g + \frac{1}{Nu_1(H)} \frac{1}{1+\varkappa}, \qquad (27)$$

$$\Theta_{2max} = \Theta_g + \frac{1}{Nu_2(H)} \frac{\varkappa}{1+\varkappa}, \qquad (28)$$

Natomiast średnie temperatury ścian szczeliny uzyskamy obliczając średnie całkowe

$$\Theta_m = \frac{1}{H}\int_0^H \Theta dX$$

temperatur Θ_1 i Θ_2. Po uśrednieniu

$$\Theta_{1m} = \frac{1}{2}\ \Theta_g + \frac{1}{Nu_{1m}} \frac{1}{1+\varkappa}, \qquad (29)$$

$$\Theta_{2m} = \frac{1}{2}\ \Theta_g + \frac{1}{Nu_{2m}} \frac{\varkappa}{1+\varkappa}. \qquad (30)$$

Występująca w powyższych równaniach średnia liczba Nusselta jest uśredniana według odwrotności

$$\frac{1}{Nu_m} = \frac{1}{H}\int_0^H \frac{dX}{Nu}. \qquad (31)$$

Dla wyznaczenia lokalnych liczb Nusselta można się posłużyć równaniami wyprowadzonymi przez Cessa i Shaffera [1] dla wymuszonego, laminarnego przepływu w szczelinie, przy stałych gęstościach strumieni ciepła na ścianach. Dla ściany 1

$$\frac{1}{Nu_1} = \frac{17}{140}(1+\varkappa) + \frac{1}{2}(1+\varkappa)\sum_{i=1}^{\infty} A_i \psi_i(1)\exp\left(-\frac{8}{3}\varepsilon_i^2 \frac{X}{Pe}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}(1-\varkappa)\left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} D_i G_i(1)\exp\left(-\frac{8}{3}\omega_i^2 \frac{X}{Pe}\right)\right]. \qquad (32)$$

Wzór dla ściany 2 jest identyczny, jedynie w miejsce $\varkappa$ pojawia się $1/\varkappa$.

W równaniu powyższym Pe oznacza liczbę Pécleta

$$Pe = \frac{w\delta}{a} = Re\ Pr \qquad (33)$$

a liczbę Reynoldsa należy wyznaczać z równania (16). W cytowanej pracy [1] podano sposób wyznaczania współczynników szeregu (32). W tablicy 1 podano wartości tych współczynników dla trzech pierwszych wyrazów szeregu.

Dla wyznaczenia maksymalnej zredukowanej temperatury ścianki (równania (27) i (28) należy w równaniu (32 położyć X = H. Jeżeli jednak argument funkcji wykładniczej jest dostatecznie duży, tzn. gdy

$$\frac{X}{Pe} > 0{,}1 \qquad (38)$$

można z dostateczną dla obliczeń technicznych dokładnością, operować asymptotyczną wartością liczby Nusselta, dla $X \to \infty$

$$Nu_{1\infty} = \frac{70}{26 - 9\varkappa}, \tag{39}$$

$$Nu_{2\infty} = \frac{70}{26 - \frac{9}{\varkappa}}. \tag{40}$$

Tablica 1

Współczynniki szeregu (32) [3]

i	1	2	3
ε_i	4,28722	8,30372	12,3114
ε^2_i	18,3803	68,9518	151,5706
$\psi_i(1)$	-1,26970	1,4022	-1,4911
A_i	0,087512	-0,025862	0,01253
ω_i	2,263106	6,29768	10,3077
ω^2_i	5,121649	39,6608	106,249
D_i	-1,33817	0,54548	-0,35889
$G_i(1)$	0,49629	-0,21214	0,14038

Przy obliczaniu średniej zredukowanej temperatury powierzchni potrzebna jest znajomość średniej wartości odwrotności liczby Nusselta, którą uzyskamy przez wykonanie operacji przewidzianej równaniem (31) na równaniu (32)

$$\frac{1}{Nu_{1m}} = \frac{17}{140}(1 + \varkappa) -$$

$$- \frac{3}{16}\frac{Pe}{H}(1 + \varkappa)\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon_i^2}A_i\psi_i(1)\exp\left(-\frac{8}{3}\varepsilon_i^2\frac{H}{Pe}\right) -$$

$$- \frac{1}{4}(1 - \varkappa)\left[1 - \frac{3}{8}\frac{Pe}{H}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_i^2}D_iG_i(1)\exp\left(-\frac{8}{3}\omega_i^2\frac{H}{Pe}\right)\right] \tag{41}$$

i podobnie dla Nu_{2m} ($\varkappa$ ulega zamianie na $1/\varkappa$).

4. Kryterium laminarności

Przepływ laminarny w szczelinie płaskiej występuje dla liczb Reynoldsa

$$Re < 1100 \tag{42}$$

Dla wyrażenia tego warunku za pomocą wielkości danych, wykorzystujemy równanie (16) oraz (19) otrzymując

$$K\,H^{2,1} < 10^{10} \tag{43}$$

Z uwagi na przybliżony charakter równania (19) oraz na ograniczony zakres jego stosowania, nierówność (43) należy traktować jako przybliżony warunek wstępny. Jeżeli rozpatrywany przypadek znajdzie się blisko granicy laminarności wytyczonej warunkiem (43), należy po obliczeniu Θ_g wyznaczyć liczbę Reynoldsa i sprawdzić warunek (42).

LITERATURA

[1] CESS R.D., SHAFFER E.S.: Laminar heat transfer between parallel plates with an unsymmetrically prescribed heat flux at the walls. Appl, Scient. Res. 1959, v. A9, Nr 1 str.64--70.

[2] ELENBAAS W.: Dissipation of heat by free convection. Philips Research Reports. 3. 1948, str. 338-360, 450-465.

[3] PIETUCHOW B.S.: Tiepłoobmien i soprotiwlenije pri laminernom tecznii żidkosti w trubach. Energija. Moskwa 1967 str. 154-157.

[4] SCHMIDT E., BECKMANN W.: Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld von einer wärmeabgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion. Techn. Mech. Thermod. 1930. str. 341 i 391.

[5] SPARROW E.M., GREGG J.L.: Laminar free convection from a vertical plate with uniform surface heat flux. Trans. ASME 1956, str. 435.

ТЕПЛООТДАЧА ПРИ СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОТКРЫТОЙ ЩЕЛИ

Р е з ю м е

Рассмотрена задача теплоотдачи при свободном движении жидкости в открытой щели между параллельными, вертикальными стенками, при постоянных плотностях тепловых потоков на стенках. Выведено уравнение для распределения температуры жидкости в щели а затем определено температуры стенок, при использовании известных уравнений для коэффициента теплоотдачи при вынужденной конвекции.

LAMINAR FREE CONVECTION IN VERTICAL OPEN SLIT

S u m m a r y

The problem of laminar free convection in vertical open slit with the walls heated by uniform heat flux, is considered. Fluid temperature distribution in the slit is determined and by means of the equations for heat transfer coefficient at the forced flow, the temperature distribution on the slit walls is calculated.