ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: ENERGETYKA z. 34 Nr kol. 279

JÓZEF SZPILECKI

Katedra Fizyki Technicznej
Politechniki Śląskiej

ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI GREENA FALOWEGO RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO I RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

Streszczenie: W pracy przedyskutowano w układach n wymiarowych współrzędnych Kartezjusza, n wymiarowych cylindrycznych i sferycznych (rozwiązania niekierunkowe i kierunkowe), w celach porównawczych funkcje Greena, będące rozwiązaniami równania przewodzenia ciepła w przypadku skończonej i nieskończonej prędkości ruchu ciepła i równania falowego. Funkcje Greena otrzymano jako szczególne przypadki na podstawie wyrażenia operatorowego (transformacja Laplace'a) otrzymanego dla równania przewodzenia ciepła w przypadku skończonej prędkości ruchu ciepła.

1. Wstęp

W pracy w celach porównawczych rozpatrzono funkcje Greena, będące rozwiązaniami trzech typów cząstkowych równań różniczkowych drugiego rzędu:

1. Równania przewodzenia ciepła w przypadku nieskończonej prędkości ruchu ciepła

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \tag{1}$$

gdzie:

ψ - temperatura,

a - współczynnik przewodzenia temperaturowego,

τ - czas,

∇^2 - operator Laplace'a.

2. Równania przewodzenia ciepła w przypadku skończonej prędkości ruchu ciepła [1 - 3]

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}, \tag{2}$$

gdzie:

c - prędkość ruchu ciepła.

3. Równania falowego

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}. \tag{3}$$

2. n-wymiarowy prostokątny układ współrzędnych Kartezjusza

W przypadku n-wymiarowego prostokątnego układu współrzędnych Kartezjusza $(x_1, \dots x_n)$

$$\nabla^2\psi = \sum_{m=1}^{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_m^2} \tag{4}$$

Jeśli przyjmiemy rozwiązanie równania (1) w przypadku jednowymiarowego pojedynczego źródła [1, 4-6] o natężeniu C, umieszczonego w punkcie ξ w chwili τ, wtedy

$$\psi(x, \xi, \tau, \tau') = \frac{C}{c\varrho\sqrt{4\pi a(\tau-\tau')}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau-\tau')}\right] \tag{5}$$

gdzie:

c - ciepło właściwe,

ϱ - gęstość ośrodka.

Wprowadzając

$$\Theta = a\,(\tau - \tau') \tag{6}$$

oraz

$$h = x - \xi, \tag{7}$$

można zamiast (5) napisać

$$\Psi(h,\Theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\Theta}}\, e^{-h^2/4\Theta}. \tag{8}$$

W źródle (h = 0)

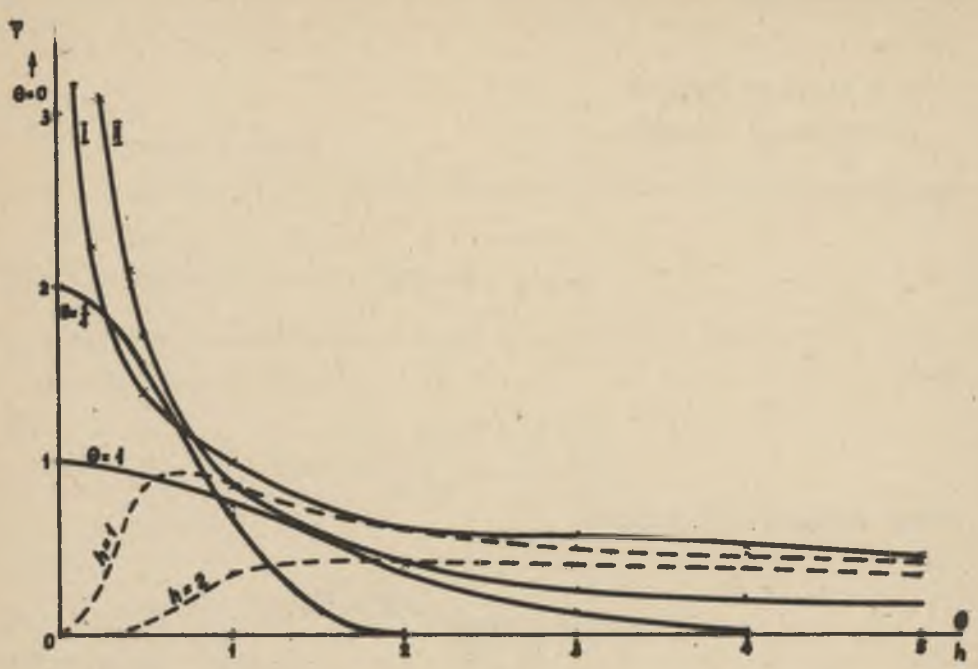
$$\Psi(0,\Theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\Theta}}. \tag{9}$$

Dla $\Theta \to 0$ otrzymujemy $\Psi(0,\Theta) \to \infty$. Ze wzrostem Θ temperatura źródła maleje dążąc asymptotycznie do zera.
Dla h = const (stała odległość od źródła) warunek $\Theta = 0$ daje $\Psi(h,0) = 0$. Dla $\Theta \neq 0$ rozwiązanie jest różne od zera, temperatura rośnie i po osiągnięciu maksimum maleje do zera. Warunek na maksimum daje

$$\Psi_{max} = \frac{1}{h\sqrt{2\pi e}} \tag{10}$$

oraz

$$\Theta_{max} = \frac{h^2}{2}. \tag{11}$$



Rys. 1. Funkcja pojedynczego źródła. Na rysunku przedstawiono dwie rodziny krzywych dla Θ = const i h = const. Przedstawiono również krzywe I $\Psi = \frac{1}{\sqrt{\Theta}}$ i II $\Psi_{max} = \frac{0,85}{h}$

Wartość (10) maleje ze wzrostem odległości od źródła h (rys.1). Innym rozwiązaniem jest dipol cieplny, powstały przez umieszczenie w punkcie $x = \xi$ w chwili τ' dwu źródeł cieplnych różnego znaku i o stałym natężeniu

$$\frac{\partial \Psi(h,\Theta)}{\partial x} = - C \frac{2h}{c\varrho \cdot 8\sqrt{\pi\Theta^3}} \exp\left[-\frac{h^2}{4\Theta}\right], \qquad (12)$$

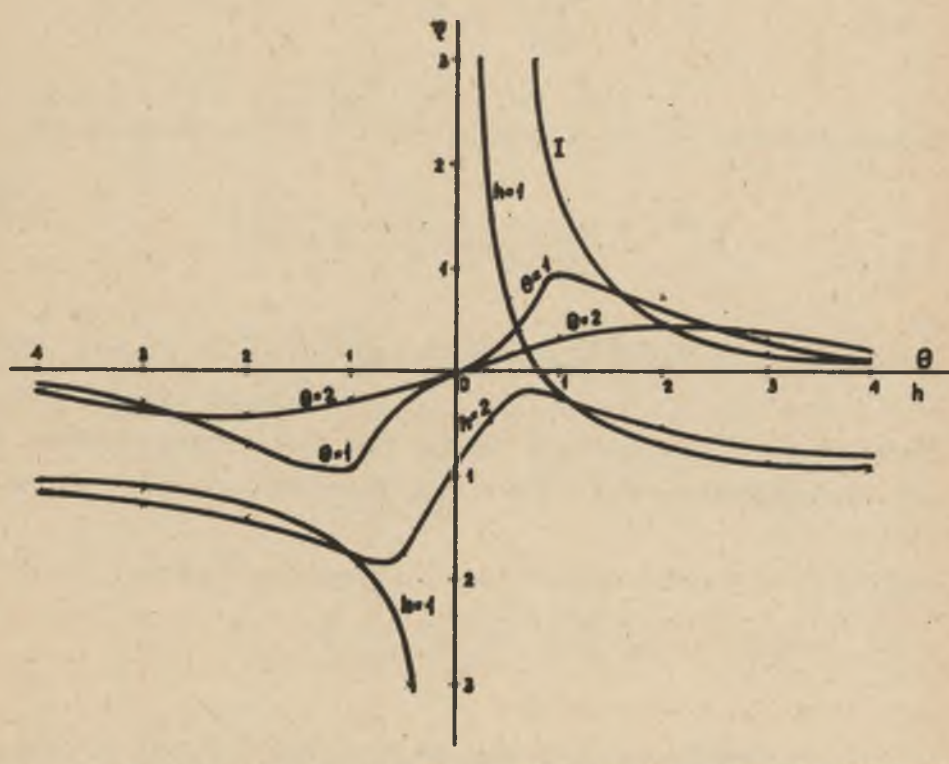
gdzie:

$\frac{C}{c\varrho}$ - moment dipola.

Dla h = 0 (źródło ciepła) wartość funkcji (12) jest równa zeru. Dla $h \neq 0$, wartość jest skończona. Znak zależy od znaku h. Wartość zmienia się od zera przez maksimum asymptotycznie do zera.

W tym przypadku również równanie (11) przedstawia warunek na ekstremum, natomiast

$$\frac{\partial\psi(\Theta_{ekstr})}{\partial x} = \pm \frac{C}{4\, c\varrho\sqrt{\pi e\, \Theta_{ekstr}}}, \tag{13}$$



Rys. 2. Funkcja dipola cieplnego. Na rysunku przedstawiono dwie rodziny krzywych dla Θ = const i h = const. Podano również krzywą $I\psi_{max} = \pm \frac{1,7}{h^2}$

Wartość ekstremum bezwzględnie rośnie dla $h \to 0$ (rys. 2). Powyższe wyniki dadzą się łatwo uogólnić na n wymiarów przez zastąpienie $(x - \xi)^2$ przez $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2$ lub ze względu na

podobieństwo z równaniem falowym (w przypadku ośrodka anizotropowego) przez

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - \xi_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\,2}}.$$

Transformatami Laplace'a funkcji (5) i (12) są odpowiednio [7-9]

$$L_\tau(\psi) = \frac{1}{2\sqrt{a\,s}} \exp\left[-\left|x - \xi\right|\sqrt{\frac{s}{a}}\right] \tag{14}$$

$$L_\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \exp\left[-\left|x - \xi\right|\sqrt{\frac{s}{a}}\right]. \tag{15}$$

Ponieważ przyporządkowanie funkcji nie jest jednoznaczne, w przypadku równania (2) i (3) wzięto za punkt wyjścia równania (14) i (15).

Pomijając stałą multiplikatywną i zastępując $\frac{s}{a}$ przez $\frac{\sigma}{a} = \frac{s}{a} + \frac{s^2}{c^2}$, otrzymuje się [7, 8, 10]

$$L_\tau(\psi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c^2}}} \exp\left[-\left|x - \xi\right|\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c^2}}\right] \tag{16}$$

$$L_\tau\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \exp\left[-\left|x - \xi\right|\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c^2}}\right]. \tag{17}$$

Z tablic [7, 8] otrzymujemy funkcję czasową

$$L_\tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s(s+b)}}\right)\exp\left[-k\sqrt{s(s+b)}\right]=$$

$$=\begin{cases}0 \text{ dla } 0<\tau<k\\ \exp\left(-\frac{b\tau}{2}\right) I_0\left(\frac{b}{2}\sqrt{\tau^2-k^2}\right) \text{ dla } \tau>k\end{cases} \tag{18}$$

gdzie:

$$b=\frac{c^2}{a},\quad k=\frac{|x-\xi|}{c}, \tag{19}$$

$I_0(z)$ - funkcja Bessela 0 rzędu 1 rodzaju i urojonego argumentu. W przypadku funkcji (15)

$$\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)L_\tau^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s(s+b)}}\exp\left[-k\sqrt{s(s+b)}\right]\right\}=$$

$$=\begin{cases}0 \text{ dla } 0<\tau<k\\ \exp\left(-\frac{b\tau}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial k}\right) I_0\left(\frac{b}{2}\sqrt{\tau^2-k^2}\right) \text{ dla } \tau>k\end{cases} \tag{20}$$

W przypadku równania (18) otrzymujemy dla $x=\xi$ (k=0)

$$\exp(-0{,}5\, b\tau)\, I_0(0{,}5\, b\tau) \text{ dla } 0<\tau, \tag{21}$$

W chwili początkowej $\tau=0$ funkcja ta jest równa zeru. Dla $\tau\to\infty$, po usunięciu nieoznaczności, otrzymujemy również asymptotyczną wartość równą zeru. Z dyskusji pierwszej pochodnej wynika, że funkcja ta nie posiada maksimum.

Dla $x \neq \xi$, czyli $k \neq 0$ funkcja ta jest równa zeru dla $\tau = k$. Następnie skokowo przybiera wartość skończoną. Przedstawiając ją jako iloczyn dwu czynników: czynnika (21) i $\exp(-0{,}5\, b(\tau - \sqrt{\tau^2 - k^2}))$, wtedy pierwszy czynnik zmienia się monotonicznie od $\exp(-0{,}5\, bk)$ dla $\tau = k$ do wartości 1 dla $\tau \to \infty$. Wpływ tego czynnika na drugi jest silniejszy w przypadku małych τ. Drugi czynnik nie zmienia zasadniczego charakteru pierwszego czynnika w iloczynie.

W celu przedyskutowania wyrażenia (20), modyfikujemy je

$$-\left(\frac{bk}{2\sqrt{\tau^2 - k^2}}\right)\exp\left(-\frac{b\tau}{2}\right) I_0'\left(\frac{b}{2}\sqrt{\tau^2 - k^2}\right) \quad \text{dla} \quad \tau > k. \tag{22}$$

$I_0'(z)$ oznacza pierwszą pochodną funkcji $I_0(z)$ ze względu na argument.

W przypadku $k = 0 (x - \xi = 0)$ funkcja jest równa zeru.

Dla $x - \xi \neq 0$ dla $\tau - k = 0$ po usunięciu nieoznaczoności otrzymujemy $-\frac{b^2 k}{8}\exp\left(-\frac{bk}{2}\right)$. Gdy argument dąży do nieskończoności, funkcja dąży do zera. Podobne zachowanie otrzymujemy dla $\tau - k \neq 0$.

Wyrażenia wyprowadzone dla przypadku jednowymiarowego dadzą się łatwo uogólnić na n wymiarów przez wprowadzenie w miejsce $|x - \xi|$ sumy $\sum_{i=1}^{n} |x_i - \xi_i|$ w transformatach i za $x - \xi$ wyrażenia $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2$ w funkcjach czasowych.

W przypadku równania falowego (3) najprostsza transformata posiada następującą postać

$$\psi(s) = \exp\left[\pm \frac{s}{c}(x - \xi)\right]. \tag{23}$$

odpowiada jej jako funkcja czasowa funkcja Diraca $\delta(\tau - \tau_0)$, gdzie $\tau_0 = (\frac{x-\xi}{c})$.

Różniczkując wyrażenie (23) ze względu na $(x - \xi)$, otrzymuje się transformatę (24) impulsu dipolowego, całkując zaś - transformatę (25) funkcji schodkowej

$$\psi_1(x, \xi, s) = \pm \frac{s}{c} \exp\left[\pm \frac{s}{c}(x - \xi)\right] \tag{24}$$

$$\psi_2(x, \xi, s) = \pm \frac{c}{s} \exp\left[\pm \frac{s}{c}(x - \xi)\right]. \tag{25}$$

odpowiadają im funkcje czasowe

$$\psi(x, \xi, \tau) = \delta(\tau - \frac{|x-\xi|}{c} \tag{26}$$

$$\frac{d\psi(x, \xi, \tau)}{dx} = -\frac{1}{c} \frac{d\delta\left[\tau - \frac{|x-\xi|}{c}\right]}{d\tau} \tag{27}$$

$$\int \tau(x, \xi, \tau)dx = c\, H(\tau - \frac{|x-\xi|}{c}), \tag{28}$$

gdzie

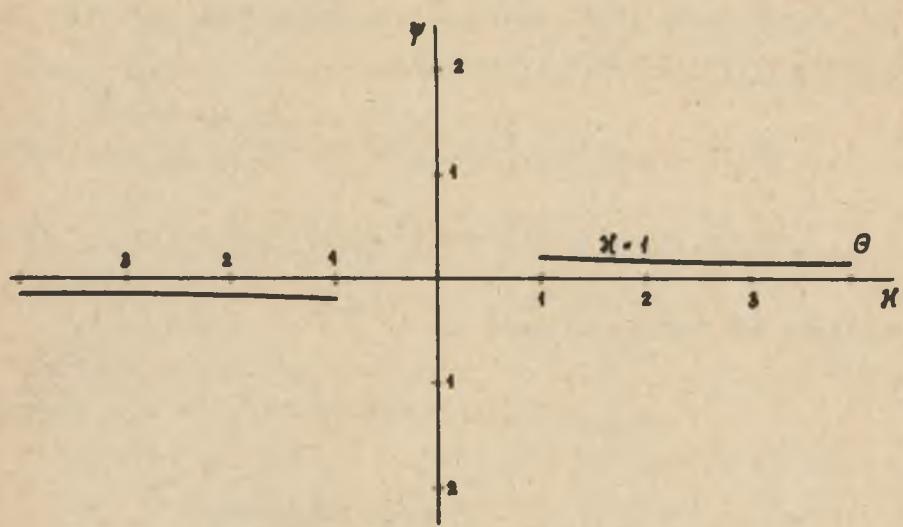
$$H(\tau - \tau_0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \tau < \tau_0 \\ 1 & \text{dla } \tau \geqslant \tau_0 \end{cases} \tag{29}$$

Uogólnienie na n wymiarów jest bezpośrednie.

Na rysunku 3 i 4 przedstawiono przebiegi czasowe w przypadku równania (2).

Jako wspólna cecha w wszystkich przypadkach występuje w stałej odległości od źródła wzrost stopniowy lub skokowy temperatury, by po przekroczeniu maksimum (nieciągłości) maleć asymptotycznie do zera. W przypadku równania (3) jest to funkcja

Diraca. W przypadku równania (1) funkcja źródła o podobnych własnościach, lecz rozmyta z biegiem czasu. W przypadku równania (2) wzrost temperatury w danym punkcie odbywa się skokowo.

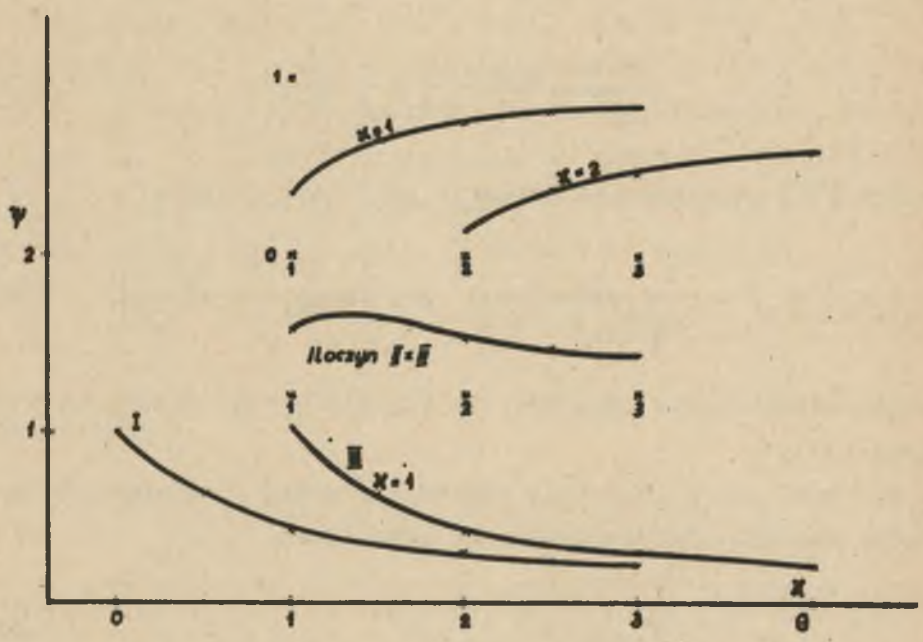


Rys. 3. Funkcje

$$\mathrm{I}\,\Psi = \exp(-\Theta)\, I_0(\Theta), \quad \mathrm{II}\,\Psi = \exp\left(-\Theta + \sqrt{\Theta^2 - \varkappa^2}\right)$$

$$\mathrm{III}\,\Psi = \exp\left(-\sqrt{\Theta^2 - \varkappa^2}\right) I_0\left(\sqrt{\Theta^2 - \varkappa^2}\right)$$

Dipol w przypadku równania (1) i (2) rozszczepia się z biegiem czasu na dwa impulsy o podobnej postaci, lecz różnego znaku, które rozchodzą się w kierunkach przeciwnych. W przypadku równania (3) są to impulsy Diraca. W przypadku równania (2) impulsy posiadają charakter nieciągły.



Rys. 4. Funkcje

$$\psi = \frac{\varkappa}{\sqrt{\Theta^2 - \varkappa^2}} \exp(-\Theta)\, I_0' \left(\sqrt{\Theta^2 - \varkappa^2}\right)$$

$$\psi\Theta_{=\varkappa} = \frac{\varkappa}{2} \exp(-\varkappa)$$

2. <u>Przypadek współrzędnych sferycznych (hipersferycznych)</u> (rozwiązanie niekierunkowe)

Ze względu na to, że

$$\nabla^2 \psi = \nabla_m^2 \psi = \frac{1}{r^{m-1}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \left(r^{m-1} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right), \qquad (30)$$

gdzie:

r - promień,

równanie (1) może być napisane w postaci

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \tag{31}$$

Według [11] rozwiązaniem równania (31) jest funkcja

$$\psi(r,r_o,\tau-\tau_o) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau-\tau_o)}}\right)^n \exp\left[-\frac{(r \pm r_o)^2}{4a(\tau-\tau_o)}\right]. \tag{32}$$

Proste przeliczenie pokazuje, że funkcja dipola nie spełnia równania (31).

Podobnie jak w rozdziale poprzednim można przeprowadzić dyskusję funkcji (32) wprowadzając oznaczenia

$$r \pm r_o = h \tag{33}$$

$$a(\tau-\tau_o) = \Theta. \tag{34}$$

Wtedy w miejsce (31) otrzymujemy

$$\psi(h,\Theta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\Theta}}\right)^n \exp\left(-\frac{h^2}{4\Theta}\right). \tag{35}$$

Funkcja ta posiada podobne własności jak funkcja (5). W miejscu gdzie znajduje się źródło (h = 0) otrzymujemy

$$\psi(0,\Theta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi\Theta}}\right)^n. \tag{36}$$

Funkcja posiada bardziej strome nachylenie, zależne od n, aniżeli w wyżej wymienionym przypadku.

Rozpatrując zachowanie się funkcji poza źródłem $(h \neq 0)$, w przypadku $\Theta \to 0$ po usunięciu nieoznaczoności otrzymujemy wartość 0, co odpowiada fizykalnej stronie zagadnienia. Badając funkcję dla $h = \text{const}$ obserwujemy w pewnej odległości od źródła stopniowy wzrost temperatury do maksimum i następnie asymptotyczne malenie do zera. Z warunku na ekstremum

$$\Theta_{max} = \frac{h^2}{2n} \tag{37}$$

otrzymujemy

$$\psi(h,\Theta)_{max} = \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{h}\right)^n \exp\left(-\frac{n}{2}\right). \tag{38}$$

Wyrażenie maleje gdy n rośnie. Jakościowo przebieg jest podobny do rozpatrzonego w rozdziale poprzednim.

Podamy jeszcze rozwiązania w przypadku $n = 1,2,3$.

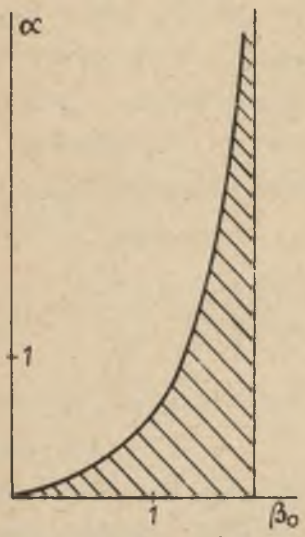
W przypadku jednowymiarowym $(n = 1)$ dyskusja przebiega podobnie jak w rozdziale poprzednim. W przypadku dwuwymiarowym

$$\psi(r,r_o,\tau-\tau_o) = \frac{1}{4\pi a(\tau-\tau_o)} \exp\left(-\frac{r^2+r_o^2}{4a(\tau-\tau_o)}\right) I_o\left(\mp\frac{r\,r_o}{2a(\tau-\tau_o)}\right). \tag{39}$$

Rozwiązanie to w przypadku $r = 0$ lub $r_o = 0$ sprowadza się do rozwiązania pojedynczego źródła. Gdy wartości te są różne od zera, funkcja zmienia się od wartości zero przez ekstremum do wartości zero. Warunek na ekstremum posiada postać następującą

$$I_o\left(\frac{r\,r_o}{4a(\tau-\tau_o)}\right)\left(-1+\frac{r^2+r_o^2}{4a(\tau-\tau_o)}\right) + \frac{r\,r_o}{2a(\tau-\tau_o)} I_o'\left(\frac{r\,r_o}{2a(\tau-\tau_o)}\right) = 0 \tag{40}$$

W przypadku $\tau - \tau_0 = \text{const}$ funkcja posiada jedyne ekstremum dla $r = 0$, więc posiada charakter monotoniczny (rys. 5).



Rys. 5. Przebieg funkcji (39)

W przypadku trójwymiarowym ($n = 3$) równanie (1) daje się sprowadzić do postaci równania jednowymiarowego, gdy w miejsce funkcji ψ podstawi się $r\psi$. W przypadku $r \neq 0$ dyskusja przebiegu funkcji jest analogiczna jak w przypadku jednowymiarowym. W punkcie $r = 0$ funkcja posiada dodatkowy biegun. Sąsiedztwo więc tego punktu działa na przebieg funkcji zniekształcająco.

W celu przyporządkowania sobie funkcji Greena w trzech wymienionych na wstępie przypadkach (1), (2), (3), transformujemy równanie (2) jako najogólniejsze według Laplace'a i oznaczamy parametr transformacji przez s, przez $\psi(s)$ transformatę funkcji $\psi(\tau)$. Transformata równania (2) posiada następującą postać

$$\frac{d^2\psi(s)}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\psi(s)}{dr} - \left(\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c^2}\right)\psi(s) = 0 \qquad (41)$$

jest to równanie typu Bessela

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1-2\alpha}{r}\frac{dy}{dr} + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2 - p^2}{r^2}\right)y = 0, \qquad (42)$$

przy czym

$$\alpha = \frac{2-n}{2}$$

$$p = \pm\alpha$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c^2}} \cdot i, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{43}$$

Całki szczególne równania posiadają następującą postać

$$\psi(s) = r^{1-n/2}\, Z_{\pm(1-n/2)}\left(\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c^2}} \cdot i\, r\right), \tag{44}$$

gdzie $Z_{\pm k}(x)$ jedna z funkcji Bessela.
Argument funkcji (44) można przekształcić

$$\sqrt{\frac{s}{a} + \frac{s^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{(s+b)^2 - b^2}, \tag{45}$$

$$b = \frac{c^2}{2a}.$$

Przechodząc do przypadku (1) otrzymujemy w argumencie $\sqrt{\frac{s}{a}}$, w przypadku zaś równania (3) wyrażenie $\frac{s}{c}$.

Wyboru funkcji Bessela możemy dokonać, uważając rozwiązanie równania (1) jako szczególny przypadek rozwiązania (44). Więc

$$\psi(s) = r^{1-n/2}\, Z_{\pm(1-n/2)}\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, i\, r\right), \quad i = \sqrt{-1}. \tag{46}$$

Ponieważ w równaniu (1) s jest parametrem, można pomnożyć rozwiązanie równania przez dowolną stałą i dowolną funkcję s. W ten sposób rozwiązanie równania (46) można zastąpić następującym

$$\psi(s) = \left((r \pm r_o)\sqrt{\frac{s}{a}}\right)^{1-n/2} Z_{\pm(1-n/2)}\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\, i\, (r \pm r_o)\right). \tag{47}$$

W tablicach [10] znajdujemy następującą zależność

$$L\left\{t^{\nu-1} \exp\left(-\frac{1}{4at}\right)\right\} = 2\left(\frac{1}{4as}\right)^{\nu/2} K_\nu\left(a^{1/2} s^{1/2}\right) \tag{48}$$

dla Re a > 0, Re s > 0, gdzie Re - część rzeczywista. Inny związek jest następujący

$$L\left\{\frac{a^{\nu}}{(2t)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)\right\} = s^{\nu/2}K_{\nu}(a\sqrt{s}). \tag{49}$$

Dla n > 2 znak wykładnika jest ujemny. Nie jest to istotne, ponieważ zachodzi relacja

$$K_{\nu}(x) = K_{-\nu}(x). \tag{50}$$

Obierając jako transformatę funkcję $K_{\pm\nu}(x)$, otrzymujemy w przypadku równania (1)

$$\psi(s) = \left((r \pm r_o)\sqrt{\frac{s}{a}}\right)^{1-n/2} K_{\pm(1-n/2)}\left(\sqrt{\frac{s}{a}}(r \pm r_o)\right). \tag{51}$$

Przez prostą zmianę argumentu otrzymujemy transformaty w dwu pozostałych przypadkach. W przypadku równania (2)

$$\psi(s) = \left((r \pm r_o)\sqrt{\frac{s}{a}+\frac{s^2}{c^2}}\right)^{1-n/2} K_{\pm(1-n/2)}\left(\sqrt{\frac{s}{a}+\frac{s^2}{c^2}}(r \pm r_o)\right) \tag{52}$$

o następującej funkcji czasowej

$$L^{-1}\left\{2^{1/2}\pi^{-1/2}\left(\sqrt{s^2-b^2}\right)^{-\nu}K_{\nu}\left(a\sqrt{s^2-b^2}\right)\right. =$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad 0<t<a \\ b^{1/2-\nu}a^{-\nu}\left(\sqrt{t^2-a^2}\right)^{\nu-1/2} I_{\nu-1/2}\left(b\sqrt{t^2-b^2}\right) \end{cases}$$

$$\text{dla} \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1/2, \quad t > a, \tag{53}$$

przy czym $I_p(z)$ funkcja Bessela 1 rodzaju urojonego argumentu. W przypadku równania (3) otrzymujemy następującą transformatę

$$\psi(s) = \left(\left(r \pm r_o\right) \frac{s}{c}\right)^{1-n/2} K_{\pm(1-n/2)} \left(s \frac{r \pm r_o}{c}\right). \tag{54}$$

W tablicach znajdujemy

$$L^{-1}\left\{ \left(+ \frac{1}{2}\right) s^{-\nu} K_{\nu}(as)\right\} = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad 0 < t < a \\ 2^{-\nu} \pi^{1/2} a^{-\nu} \left(\sqrt{t^2 - a^2}\right)^{2\nu-1} \end{cases} \tag{55}$$

$$\text{dla} \quad t > a.$$

Dyskusja rozwiązania dla $n \geqslant 4$ przebiega prosto. Ze względu na przesunięcie argumentu o $b = \frac{c^2}{2a}$ w miejsce (53) należy napisać

$$\psi(r, r_o, \tau) = \begin{cases} 0 \quad \text{dla} \quad 0 < \tau < \left(\frac{r \pm r_o}{c}\right) \\ \exp\left(- \frac{c^2 \tau}{2a}\right) \left(\frac{r \pm r_o}{c}\right)^{1-n/2} \left(\frac{2a}{c^2} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r \pm r_o}{c}\right)^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \cdot \\ \cdot I_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{c^2}{2a} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r \pm r_o}{c}\right)^2}\right) \quad \text{dla } \tau \geqslant \left(\frac{r \pm r_o}{c}\right) \end{cases} \tag{56}$$

W celu przedyskutowania ostatniego rozwiązania, wprowadzamy dla $\tau \geqslant \left(\frac{r \pm r_o}{c}\right)$

$$x = \frac{c^2}{2a}\sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r \pm r_o}{c}\right)^2} \tag{57}$$

i wtedy

$$\psi(r,r_o,\tau) = \psi_1(r,r_o,\tau)\,\psi_2(r,r_o,\tau), \tag{58}$$

gdzie

$$\psi_1(r,r_o,\tau) = \exp\left(-\frac{c^2\tau}{2a} + x\right), \tag{59}$$

$$\psi_2(r,r_o,\tau) = e^{-x}\left(\frac{r \pm r_o}{c}\right)^{1-n/2}\left(\frac{2a}{c^2}\right)^{(n-3)/2} I_{(n-3)/2}(x). \tag{60}$$

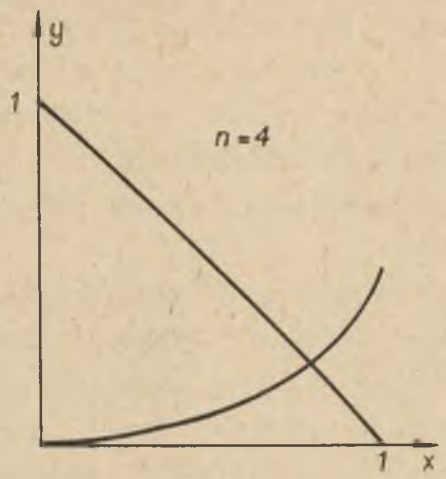
Funkcja $\psi_1(r,r_o,\tau)$ jest rosnąca od $\exp\left(-\frac{c^2}{2a}\,\frac{r \pm r_o}{c}\right)$ dla $\tau = \frac{r \pm r_o}{c}$ do 1 dla $\tau \to \infty$.

Jeśli chodzi o funkcję (60), to dla $\frac{(r \pm r_o)}{c} \neq 0$ dla $\tau = \frac{r \pm r_o}{c}$ otrzymujemy wartość równą zeru. Podobnie dla $\tau \to \infty$, ponieważ w tym ostatnim przypadku przeważa wpływ funkcji wykładniczej, co wynika z asymptotycznego przedstawienia funkcji $I_{(n-3)/2}(x)$.

Ze względu na ciągłość funkcja ta posiada w miejscu pośrednim wartość ekstremalną. Warunek na ekstremum przedstawiony jest równaniem

$$\left(-1 + \frac{n-3}{x}\right) I_{(n-3)/2}(x) + I_{(n-5)/2}(x) = 0. \tag{61}$$

Na rysunku 6 przedstawiono schematycznie graficzne rozwiązanie równania. Wartość zerowa możliwa jest między $x = 0$ i $x=n-3$.



Rys. 6. Graficzne rozwiązanie równania (61)

Ponieważ przedział, w którym leży maksimum, jest zależny od n, należy spodziewać się również, że położenie maksimum zależy od n. Z rozpatrywania równania (57) określającego x, wynika dla x = const jako związek między czasem τ i $(r \pm r_o)$ równanie hiperboli (odpowiadającej x dodatnim)

$$x^2\left(\frac{2a}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{r \pm r_o}{c}\right)^2 = \tau^2. \tag{62}$$

Można to rozumowanie w szczególności zastosować do x = max. Dla stałego τ równanie (62) przedstawia elipsę. Ze względu na czynnik $\left(\frac{r \pm r_o}{c}\right)^{1-n/2}$, w którym wykładnik jest ujemny w miejscu $r = \pm r_o$ występuje biegun funkcji. Ze wzrostem $r \pm r_o$ czynnik ten zmniejsza wartości funkcji. W biegunie funkcja jest nieskończenie duża, ze wzrostem odległości od źródła maleje.

Jeżeli chodzi o iloczyn (58), to ze względu na monotoniczność pierwszego czynnika przebieg jest jakościowo podobny do przebiegu wyrażenia (60).

Stosunkowo prosta jest dyskusja funkcji (55). Wartość jej poniżej wartości a jest równa zeru, w punkcie $t = a$ staje się nieskończenie duża, po czym maleje stopniowo do zera, ze względu na dodatni znak wykładnika.

W uzupełnieniu powyższych rozważań podano dyskusję przypadków szczególnych dla $n = 3$ i 2.

Szczególnie prosto dyskutuje się przypadek $n = 3$. Odpowiada on współrzędnym biegunowym (przypadek symetryczny). Jak w przypadku równania (1) można w przypadkach równań (2) i 3 sprowadzić zagadnienie do przypadku $n = 1$, wprowadzając funkcję $r\psi(r,r_o,\tau)$ lub $(r \pm r_o)\psi(r,r_o,\tau)$. Jedyna różnica w porównaniu z tym przypadkiem polega na tym, że funkcja posiada biegun w punkcie $r = 0$ lub $r = \pm r_o$.

Przypadek $n = 2$ można przedyskutować, wychodząc z równania (1) w przypadku trójwymiarowych współrzędnych Kartezjusza i przechodząc od nich do współrzędnych cylindrycznych przy pomocy podstawienia

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad x_o = r_o\cos\vartheta_o, \quad y_o = r_o\sin\vartheta_o.$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja

$$\psi(r,r_o,\vartheta,\vartheta_o,\tau) = \frac{c}{4\pi a^2\tau}\exp\left(-\frac{r^2 + r_o^2 \pm 2\,r\,r_o\cos(\vartheta-\vartheta_o)}{4\,a\tau}\right).$$

$$\cdot\exp\left(-\frac{(z \mp z_o)^2}{4a\tau}\right). \tag{63}$$

W przypadku gdy źródło jest bezkierunkowe, eliminujemy wpływ kąta przez całkowanie po kącie ϑ od 0 do 2π. W ten sposób powstaje funkcja

$$\psi(r,r_o,\tau) = \frac{C'}{4\pi a\tau}\exp\left(-\frac{r^2+r_o^2}{4a\tau}\right)\exp\left(-\frac{(z\pm z_o)^2}{4a\tau}\right).I_o\left(\pm\frac{r\,r_o}{2a\tau}\right). \tag{64}$$

Transformata funkcji zależnej od promienia posiada następującą postać [12]

$$L\left\{\frac{1}{2}\tau\exp\left(-\frac{x^2+x_1^2}{4a\tau}\right) I_\nu\left(\frac{x\,x_1}{2a\tau}\right)\right\} =$$

$$= \begin{cases} I_\nu\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,x_1\right)K_\nu\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,x\right) & \text{dla} \quad x > x_1 \\ I_\nu\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,x\right)K_\nu\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,x_1\right) & \text{dla} \quad x < x_1 \end{cases} \tag{65}$$

Transformatę równania (2) i (3) można otrzymać z powyższego wyrażenia przez formalne podstawienie w prawej stronie równania (55) w miejsce $\sqrt{\frac{s}{a}}$ wyrażenia $\sqrt{\frac{s}{a}+\frac{s^2}{c^2}}$ lub $\frac{s}{c}$.

Tak otrzymane wyrażenia nie są tabelowane. Można jednak stosując twierdzenie o splocie znaleźć funkcję czasową transformaty

$$\Phi(x,x_1) = \begin{cases} I_\nu\left(\frac{s\,x_1}{c}\right)K_\nu\left(\frac{sx}{c}\right) & \text{dla} \quad x > x_1 \\ I_\nu\left(\frac{sx}{c}\right)K_\nu\left(\frac{s\,x_1}{c}\right) & \text{dla} \quad x < x_1 \end{cases} \tag{66}$$

W tablicach znajdujemy

$$L^{-1}\left\{K_o(b\,s)\right\} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 < \tau < b \\ \frac{1}{\sqrt{\tau^2-b^2}} & \text{dla} \quad \tau > b \end{cases} \tag{67}$$

$$L^{-1}\left\{e^{-bs}\, I_o(bs)\right\} = \begin{cases} \pi^{-1}(2\,b\tau - \tau^2)^{-1/2} & \text{dla } 0 < \tau < 2b \\ 0 & \tau > 2b \end{cases} \tag{68}$$

Jeśli napiszemy

$$I_o(a\,s)K_o(b\,s) = e^{-as}\, I_o(a\,s)K_o(b\,s)\, e^{as} \tag{69}$$

wtedy

$$L^{-1}\left\{\Phi(x,x_1)\right\} = \int \frac{d\beta}{\pi\sqrt{(\tau - \frac{x_1}{c})^2 - (\frac{x}{c})^2}} \cdot \frac{x_1^2}{c^2} - (t + \beta - \frac{x_1}{c})^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\tau - \frac{x_1}{c})^2 - (\frac{x}{c})^2}} \quad \text{dla} \quad x > x_1 \tag{70}$$

lub z zamianą x_1 i x dla $x < x_1$.

Rozwiązanie równania (2) otrzymamy z (70)

$$\psi(x,x_1,\tau) = \frac{1}{\sqrt{(\tau - \frac{x_1}{c})^2 - (\frac{x}{c})^2}} + \frac{x}{c}\int_0^{\sqrt{(\tau - \frac{x_1}{c})^2 - (\frac{x}{c})^2}} \frac{I_1(u)du}{\sqrt{(\tau - \frac{x_1}{c})^2 - (\frac{x}{c})^2 - u^2}}$$

$$\text{dla} \left|\tau - \frac{x_1}{c}\right| > \frac{x}{c}. \tag{71}$$

W przypadku spełnienia przeciwnej nierówności, należy przestawić x oraz x_1.

Dyskusja wyrażenia (70) dla $x > x_1$ stosunkowo prosta. Mianowicie dla $0<\tau<\frac{x_1}{c}$ wyrażenie jest równe zeru. Dla $\tau = (\frac{x \pm x_1}{c})$ staje się nieskończenie duże, więc dla różnych odległości x w różnych chwilach. Dla stałego x wartość funkcji z biegiem czasu maleje monotonicznie do zera. Podobnie przebiega dyskusja w drugim przypadku.

Wyrażenie podcałkowe (71) można przekształcić przy pomocy podstawienia $u = a \sin\varphi$, gdzie $a = \sqrt{(\tau - \frac{x_1}{c})^2 - (\frac{x}{c})^2}$. Wtedy

$$\psi(x,x_1,\tau) = \frac{1}{a} + \frac{x}{c}\int I_1(a \sin\varphi)d\varphi. \tag{72}$$

Tu pierwszy składnik sumy ma podobne własności jak w poprzednim przypadku, drugi zaś można wyliczyć podstawiając pod całką w miejsce funkcji $I_1(z)$ jej przedstawienie w postaci szeregu który jest jednostajnie zbieżny. Będzie to szereg trygonometryczny w którego współczynnikach wystąpią kolejne potęgi wyrażenia a, więc dla $\tau = (\frac{x + x_1}{c})$ są one równe zeru, by w danym punkcie x rosnąć ze wzrostem τ.

3. Współrzędne cylindryczne (hipercylindryczne)

W tym przypadku

$$\nabla^2\psi = \nabla_m^2\psi + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} \tag{73}$$

W przypadku równania (1) można oddzielić część równania zawierającą r od zawierającej pozostałe zmienne przy pomocy podstawienia

$$\psi(r, x_{m+1}, \dots x_n, \tau) = f_1(r, \tau) f_2(x_{m+1}, \dots x_n, \tau). \tag{74}$$

Wtedy równanie różniczkowe (1) rozpada się na dwa równania, z których jedno rozwiązuje się jak w punkcie 2, drugie zaś jak w punkcie 1.

W przypadku równania (2) lub (3) możliwy jest rozkład postaci

$$\psi(r, x_{m+1}, \dots x_n, \tau) = f_1(r)\, f_2(x_{m+1}, \dots x_n, \tau) \tag{75}$$

lub

$$\psi(r, x_{m+1}, \dots x_n, \tau) = f_1(r, \tau)\, f_2(x_{m+1}, \dots x_n). \tag{76}$$

Na wyznaczenie funkcji niezależnych od czasu otrzymuje się równanie różniczkowe typu eliptycznego postaci

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{m-1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \tag{77}$$

lub

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{m+1}^2} + \dots + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2} = 0 \tag{78}$$

Rozwiązaniem pierwszego równania jest funkcja

$$f(r) = r^{-(m-2)}. \tag{79}$$

Rozwiązaniem drugiego równania

$$f(x_{m+1}, \dots x_n) = \frac{1}{\varrho} \tag{80}$$

gdzie:

$$\varrho^2 = (x_{m+1} - x_{m+1,0})^2 + \dots + (x_n - x_{n,0})^2. \tag{81}$$

4. Współrzędne sferyczne (hipersferyczne) (rozwiązania kierunrunkowe)

4.1. Uwagi ogólne

Współrzędne hipersferyczne $(r, \Theta_1, \dots \Theta_{n-1})$ wprowadzamy za Stjeltjesem [11] przy pomocy następujących związków, łączących je z współrzędnymi prostokątnymi Kartezjusza

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \Theta_1 \\
x_2 &= r \sin \Theta_1 \cos \Theta_2 \\
&\text{----------} \\
&\text{----------} \\
x_{n-1} &= r \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \dots \sin \Theta_{n-2} \cos \Theta_{n-1} \\
x_n &= r \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \dots \sin \Theta_{n-2} \sin \Theta_{n-1}.
\end{aligned} \tag{82}$$

Spełniają one relację

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2. \tag{83}$$

Jeżeli zmniejszamy liczbę zmiennych, wtedy począwszy od końca należy przyjąć pewną liczbę współrzędnych Θ_i równą zeru.

Stosując wzór na transformację Laplacianu do współrzędnych krzywoliniowych otrzymujemy

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \xi_k}\right)\left(h_1 \dots h_n \frac{\partial \psi}{\partial \xi_k}\right)}{h_k^2} \tag{84}$$

przy czym

$$\xi_1 = r, \quad \xi_2 = \Theta_1, \dots \xi_n = \Theta_{n-1} \tag{85}$$

$$h_1^2 = 1, \quad h_2^2 = r^2, \quad h_3^2 = r^2 \sin^2\Theta_1, \; h_4^2 = r^2 \sin^2 \Theta_1 \sin^2 \Theta_2$$

itd. (86)

$$h_1 \dots h_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \Theta_1 \sin^{n-3} \Theta_2 \dots \sin \Theta_{n-2}$$

$$\frac{h_1 \dots h_n}{h_1^2} = h_1 \dots h_n$$

$$\frac{h_1 \dots h_n}{h_2^2} = r^{n-3} \sin^{n-2} \Theta_1 \dots \sin \Theta_{n-2} \tag{87}$$

$$\frac{h_1 \dots h_n}{h_3^2} = r^{n-3} \sin^{n-4} \Theta_1 \sin^{n-3} \Theta_2 \dots \sin \Theta_{n-2}$$

itd.

Laplacian można napisać w następującej postaci

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r^{n-1} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^{n-2} \Theta_1} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_1}\right)\left(\sin^{n-2}\Theta_1 \frac{\partial \psi}{\partial \Theta_1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \partial_1 \sin^{n-3} \Theta_2} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta_2}\right)\left(\sin^{n-3} \Theta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \Theta_2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta_1 \sin^2\Theta_2 \sin^{n-4}\Theta_3} \left(\frac{\partial}{\partial\Theta_3}\right) \left(\sin^{n-4}\Theta_3 \frac{\partial\psi}{\partial\Theta_3}\right) +$$

$$\ldots + \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta_1 \ldots \sin^2\Theta_{n-3} \sin\Theta_{n-2}} \left(\frac{\partial}{\partial\Theta_{n-2}}\right)\left(\sin\Theta_{n-2} \frac{\partial\psi}{\partial\Theta_{n-2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\Theta_1 \ldots \sin^2\Theta_{n-2}} \frac{\partial^2}{\partial\Theta_{n-1}^2}; \tag{88}$$

4.2. Rozwiązanie postawionego problemu

Wyrażenie na $(r \pm r_o)^2$ z przypadku rozpatrzonego w poprzednim rozdziale należy w tym przypadku zastąpić wyrażeniem

$$r^2 + r_o^2 \pm 2r\, r_o \sum_{i=1}^{n-1} \cos\varphi_i \cos\varphi_{i,o}, \tag{89}$$

Jeśli oznaczymy współczynniki kierunkowe wektora r w układzie prostokątnym przez $\cos\varphi_i$ oraz dla wektora r_o przez $\cos\varphi_{i,o}$. Oznaczając kąt między wektorami r i r_o przez φ, mamy

$$\sum_{i=1}^{n-1} \cos\varphi_i \cos\varphi_{i,o} = \cos\varphi. \tag{90}$$

Wprowadzony w ten sposób kąt upraszcza dyskusję, gdyż przy dowolnej liczbie współrzędnych układ charakteryzowany jest jednym kątem. Oczywiście kąty φ_i i $\varphi_{i,o}$ są funkcjami kątów Θ_i transformacji (82).

W przypadku równania różniczkowego (1) mamy ogólne wyrażenie na n wymiarowe źródło kierunkowe

$$\psi(r,r_o,\tau-\tau_o)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi a(\tau-\tau_o)}\right)^n \exp\left(-\frac{r^2+r_o^2\pm 2r\,r_o\cos\varphi}{4a(\tau-\tau_o)}\right) \quad (91)$$

Ponieważ efekt bezkierunkowy przedyskutowano w rozdziale 2, wystarczy oznaczając

$$\bar{\psi}(r,r_o,\tau-\tau_o)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi a\,(\tau-\tau_o)}\right)^n \exp\left(-\frac{(r\pm r_o)^2}{4a(\tau-\tau_o)}\right) \quad (92)$$

przedyskutować wyrażenie

$$\psi=\frac{\psi(r,r_o,\tau-\tau_o)}{\psi(r,r_o,\tau-\tau_o)}=\exp\left(\mp\frac{2r\,r_o(\cos\varphi-1)}{4a(\tau-\tau_o)}\right)=\exp\left[\mp 2\lambda^2\sigma(\cos\varphi-1)\right] \quad (93)$$

jeśli oznaczymy

$$r=r_o\sigma$$
$$\lambda=\frac{r_o}{2a(\tau-\tau_o)\pi} \quad (94)$$

Jest to funkcja trzech zmiennych: λ, σ, φ.
Przy stałej wartości r_o jest λ tylko funkcją $\tau-\tau_o$. Gdy $\tau-\tau_o \to 0$, wtedy $\lambda\to\infty$, funkcja zaś (93) dąży do jedności, gdy $\cos\varphi-1>0$ i do $+\infty$, jeśli $\cos\varphi<0$. Występującą w ostatnim przypadku nieoznaczoność można usunąć, biorąc pod uwagę pełne wyrażenie (91) czyli

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}\lambda}{r_o}\right)^{-n}\exp\left[-\lambda^2(\sigma^2+1\pm 2\sigma(\cos\varphi-1))\right] \quad (95)$$

Funkcja w tym przypadku przybiera wartość równą zeru i nie ma efektu kierunkowego.

Przy stałym r_o zależność od σ jest prosta. dla $\sigma = 0$ jest $\psi = 1$, dla $\sigma \to \infty$ jest $\psi = 0$ lub ∞ zależnie od znaku wyrażenia $\cos\varphi - 1$. W ostatnim przypadku jest więc osobliwość dla $r = \infty$.

Dla stałych λ, σ zależność od kąta φ, przedstawiająca efekt kierunkowy, przedstawiona jest w postaci kilku wartości podanych w tablicy 1.

Tablica 1

φ	$\cos\varphi - 1$	ψ
$2\pi k$, $k = 0,1,2,\ldots$	0	1
$\frac{2k+1}{2}\pi$, $k = 0,1,2,\ldots$	-1	$\exp(\pm 2\lambda^2\sigma)$
$(2k+1)\pi$, $k = 0,1,2,\ldots$	-2	$\exp(\pm 4\lambda^2\sigma)$

Wprowadzenie w miejsce kątów φ_i i $\varphi_{i,o}$ kątów zdefiniowanych równaniem (82) daje wyrażenia ze względu na każdy z kątów Θ_i podobnej postaci

$$\cos(\Theta_i - \Theta_{i,o}) - 1.$$

Jeśli więc kąty te są stałe, rozkład temperatur odpowiada źródłu kierunkowemu skręconemu o kąt $\Theta_{i,o}$.

W przypadku równania (2) dla $n \geqslant 4$, wprowadzamy w miejsce $r \pm r_o$ wyrażenie (89) i oznaczając

$$\frac{(r \pm r_o)^2}{c^2} = r_o^2 \frac{(\sigma \pm 1)^2}{c^2} = k_1^2$$

$$\frac{(r^2 + r_o^2 \pm 2r\, r_o \cos\varphi)}{c^2} = r_o^2 \frac{\sigma^2 + 1 \pm 2\sigma\cos\varphi}{c^2} = k_2^2 \qquad (96)$$

otrzymujemy wyrażenie przedstawiające efekt kierunkowy

$$\frac{\sqrt{1 \pm \frac{2rr_o(\cos\varphi - 1)}{(r \pm r_o)^2}}^{\,(n-2)/2}}{\sqrt{1 \mp \frac{2rr_o(\cos\varphi - 1)}{\tau^2 - (r \pm r_o)^2}}^{\,(k-3)/2}} \cdot \frac{I_{(n-3)/2}\left[\left(\frac{c^2}{2a}\right)\sqrt{\tau^2 - k_1^2}\,\right]}{I_{(n-3)/2}\left(\frac{c^2}{2a}\sqrt{\tau^2 - k_1^2 \pm 2rr_o\frac{(\cos\varphi - 1)}{c^2}}\right)} \qquad (97)$$

Jako funkcja kąta φ jest wyrażenie (97) periodyczne, przy czym dla $\varphi = 0, 2\pi, \ldots$ przybiera wartość 1, dla $\varphi = \pi, 3\pi, \ldots$ wartość

$$\sqrt{\frac{(r \mp r_o)}{r \pm r_o}}^{\,(n-2)/2} \qquad \text{oraz dla} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$$

$$\frac{\sqrt{1 \mp \frac{2rr_o}{(r \pm r_o)^2}}^{\,(n-2)/2}}{\sqrt{1 \pm \frac{2rr_o}{\tau^2 - (r \pm r_o)^2}}^{\,(n-3)/2}} \cdot \frac{I_{(n-3)/2}\left(\frac{c^2}{2a}\sqrt{\tau^2 - k_1^2}\right)}{I_{(n-3)/2}\left(\sqrt{\tau^2 - k_1^2 \mp \frac{2rr_o}{c^2}}\,\frac{c^2}{2a}\right)}$$

Pierwszy czynnik wyrażenia (97) jest niezależny od r_o jeśli wyrazimy r przez r_o, drugi zaś jest monotoniczną funkcją r_o.

W przypadku równania (3) stosunek analogicznie zbudowanych funkcji może być przedstawiony następująco:

$$\left(\frac{1 \pm 2\sigma(\cos\varphi - 1)}{\sigma^2 + 1 \pm 2\sigma}\right)^{1-n/2} \sqrt{1 \mp \frac{\frac{2\sigma(\cos\varphi - 1)}{c^2}}{\tau^2 - \frac{\sigma^2 + 1 \pm 2\sigma}{c^2}}}^{\,n-3} \tag{98}$$

dla $\tau > \frac{r \pm r_o}{c}$ i $\tau > \frac{\sqrt{r_o^2 + r^2 \pm 2rr_o \cos\varphi}}{c}$.

Jest to funkcja periodyczna kąta φ, przy czym przebieg jej jest złożony, gdyż ze zmianą kąta pierwszy czynnik rośnie i równocześnie drugi maleje.

Przybliżenie można się w przebiegu zorientować na podstawie kilku wyliczonych wartości.

Dla $\varphi = 0$ lub 2π otrzymujemy wartość 1,

dla $\varphi =$, 3π, ... wartość $\left(1 \mp \frac{4\sigma}{\sigma^2 + 1 \pm 2\sigma}\right)^{1-n/2}$.

$$\cdot \sqrt{1 \pm \frac{\frac{4\sigma}{c^2}}{\tau^2 - \frac{\sigma^2 + 1 \pm 2\sigma}{c^2}}},$$

dla $\varphi = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, \ldots$ $\left(1 \mp \frac{2\sigma}{\sigma^2 + 1 \pm 2\sigma}\right)^{1-n/2}$.

$$\cdot \sqrt{1 \pm \frac{\frac{2\sigma}{c^2}}{\tau^2 - \frac{\sigma^2 + 1 \pm 2\sigma}{c^2}}}^{\,n-3}$$

5. Współrzędne cylindryczne (źródło kierunkowe).

W przypadku równania (1) otrzymujemy

$$\frac{\exp\left(-\dfrac{r_o^2(\sigma^2+1\pm 2\sigma\cos(\vartheta-\vartheta_o))}{4a\tau}\right)}{\exp\left(-\dfrac{r_o^2(\sigma^2+1-2\sigma)}{4a\tau}\right)} \tag{99}$$

Jest to funkcja periodyczna, której niektóre wartości orientacyjne można otrzymać obierając podobnie jak wyżej wartości kąta $\vartheta-\vartheta_o$. W przypadku równania (2) wprowadzając

$$a_\vartheta=\sqrt{\left(\tau-\frac{r_o\cos\vartheta_o}{c}\right)^2-\left(\frac{r\cos\vartheta}{c}\right)^2}$$

$$a=\sqrt{\left(\tau-\frac{r_o}{c}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2}, \tag{100}$$

otrzymujemy

$$\frac{\dfrac{1}{a_\vartheta}+\dfrac{r\cos\vartheta}{c}\displaystyle\int_0^{\pi/2} I_1(a_\vartheta\sin\varphi)\,d\varphi}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{r}{c}\displaystyle\int_0^{\pi/2} I_1(a\sin\vartheta_1)\,d\vartheta_1} \tag{101}$$

dla $\left|\tau-\dfrac{r_o\cos\vartheta_o}{c}\right|>\dfrac{r\cos\vartheta}{c}$, $\left|\tau-\dfrac{r_o}{c}\right|>\dfrac{r}{c}$.

Wyrażenie a_ϑ powoduje zależność od kąta ϑ lub ϑ_o. Jest to funkcja periodyczna każdego z tych argumentów. Funkcje a_ϑ i

$I_1(a_\vartheta \sin\varphi)$ dla stałego φ posiadają tam maksima, gdzie funkcja $\cos\varphi$ minima i odwrotnie.

W przypadku równania (3) o kierunkowości decyduje wyrażenie

$$\frac{a}{a_\vartheta}. \tag{102}$$

LITERATURA

[1] MORSE P.M., FESHBACH H., Methods of theoretical Physics I. Mc Graw Hill, N.York 1953.

[2] SZPILECKI J. Zesz. Nauk. Pol. Śląsk., Energetyka, nr 16, 133, 1964.

[3] SZPILECKI J. Zesz. Nauk. Pol. Śląsk., Energetyka, nr 28, 135, 1968.

[4] Goldfarb, Żurn. Techn. Fiz. 12, nr 10, 1606, 1952.

[5] KRZYŻAŃSKI M., Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, I, PWN Warszawa, 1957.

[6] SCHÄFER Cl., Einf. i.d. theor. Phys. II_1, Vieweg Berlin, 1929.

[7] ERDELYI A., Tables of integral tranforms I. Mc Graw Hill N. York, 1954.

[8] OBERHETTINGER F., MAGNUS W., Formeln u. Sätze f.d. speziellen Funktionen d. math. Physik, Berlin Springer, 1942.

[9] Tablicy znaczenij funkcji Bessela ot mnimowo argumienta, Izd. A.N. SSSR Moskva 1950.

[10] RIŻYK J.M., GRADSZTEIN S.S., Tablicy integrałow, summ,riadow i proizwiedienij, Gos. Izd., T.T. Lit. Moskva 1951.

[11] BATEMAN H., The mathematical analysis of electrical and optical wave motion, Cambr. Univ. Press 1915.

[12] ŁYKOW A.W., Teoria tjepłoprowodnosti, Gos. Izd. T.T. Lit. M. 1952.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(n - мерные координаты Картезия)
(n - мерные сферические и цилиндрические координаты),
(направленные решения) (ненаправленные решения)

Р е з ю м е

В работе рассматриваются и сравнивают между собой функции Грина для уравнения теплопроводности в случае конечной и бесконечной скорости движения теплоты и для уравнения волнового движения.

Функции Грина были получены как частные случаи при использовании операторного выражения (преобразование Лапласа) для уравнения теплопроводности в случае конечной скорости движения теплоты.

CONNEXIONS BETWEEN GREENE'S FUNCTIONS OF WAVE MOTION AND HEAT CONDUCTION DIFFERENTIAL EQUATIONS

S u m m a r y

The paper discusses in the case of n-dimensional rectangular Cartesius coordinates, n-dimensional spherical and cylindrical coordinates (directional and nondirectional solutions) for the sake of comparison Greene's functions, the solutions of heat conduction equations for finite and infinite heat motion

velocities and for the wave motion equation. Greene's functions were accepted as particular cases from the operator expression (Laplace's transform) for the heat conduction equation in the case of finite heat motion velocity.