ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1970

Seria: ENERGETYKA z. 34 Nr kol. 279

JERZY TOMECZEK

Katedra Teorii Maszyn Cieplnych

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE KRZEPNIĘCIA PŁASKIEJ WARSTWY

Streszczenie. W pracy zastosowano iloraz różnicowy wsteczny do rozwiązania przewodzenia ciepła w płaskiej warstwie z równoczesną zmianą stanu skupienia (krzepnięcie). Początkowa temperatura układu jest równa temperaturze zmiany fazy. Na zewnętrznej powierzchni warstwy przyjęto istnienie konwekcji przy niezmiennym współczynniku α wnikania ciepła. Otrzymany układ równań rozwiązano metodą iteracji.

1. Wstęp

Problem przekazywania ciepła w przypadku równoczesnej zmiany stanu skupienia jest bardzo skomplikowany. Zasadniczą trudnością przy wyznaczaniu pola temperatury w takim przypadku jest zjawisko przemieszczania się granicy rozdziału faz. Szybkość przesuwania się tej granicy jest zmienna w sposób wynikający z równań bilansu energii.

Ze względu na trudności zagadnienie rozwiązano w sposób ścisły [8] jedynie dla półprzestrzeni przy warunkach brzegowych pierwszego rodzaju. Istnieją również rozwiązania przybliżone dla innych geometrii i warunków brzegowych [2, 3, 6, 7]. Madejski [4, 5] opracował zagadnienie krzepnięcia płaskiej warstwy cieczy na grubej płycie. Zakładał przy tym, że temperatu-

ra w zakrzepłej fazie stałej i w płycie opisana jest linią prostą.

W niniejszej pracy przedstawiono metodę numeryczną. Rozwiązany został problem krzepnięcia płaskiej warstwy przy warunkach brzegowych trzeciego rodzaju.

2. Metoda rozwiązania

Dla wyznaczenia pola temperatury w rozważanym układzie należy rozwiązać równania bilansu energii:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}$$

dla fazy ciekłej oraz (1)

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}$$

dla fazy stałej.

Na granicy rozdziału faz ($x = \xi$) spełniony jest warunek

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial t_1}{\partial x}\right|_{x=\xi} = q\varrho \frac{d\xi}{d\tau} - \lambda_2 \left.\frac{\partial t_2}{\partial x}\right|_{x=\xi} \tag{2}$$

Przyjęte zostanie, że faza ciekła posiada temperaturę równą temperaturze t_o, w której zachodzi zmiana fazy. W chwili $\tau=0$ spełnione są warunki $\xi(0) = 0$, $t_2(x,0) = t_o=0$.

Na zewnętrznej powierzchni warstwy ciepło przepływa do otoczenia na drodze konwekcji przy niezmiennym współczynniku α wnikania ciepła

$$\lambda_2 \left.\frac{\partial t_2}{\partial x}\right|_{x=0} = \alpha(t_2|_{x=0} - t_f) \tag{3}$$

W dalszych rozważaniach indeks 2 będzie pomijany $t = t_2$. Celem rozwiązania zagadnienia warstwa zostanie podzielona na n stref o grubości Δx każda $(\Delta x = \frac{R}{n})$. Równania bilansu energii oraz warunki brzegowe zostaną przedstawione w postaci różnicowej. Druga pochodna względem współrzędnej x zastąpiona zostanie ilorazem różnicowym centralnym. Istnieją dwa sposoby zastąpienia pierwszej pochodnej względem czasu ilorazem różnicowym: iloraz przedni lub iloraz wsteczny. W zagadnieniach nie związanych ze zmianą fazy przyjmowany jest z reguły iloraz różnicowy przedni. Otrzymuje się wówczas rozwiązanie stabilne o bardzo wygodnym algorytmie. Proponuje się w niniejszej pracy zastąpić pochodną względem czasu τ przez iloraz różnicowy wsteczny.

Dla stref nie sąsiadujących z brzegiem warstwy oraz z granicą rozdziału faz otrzymuje się zależność

$$t_{l,k} - t_{l,k-1} = a \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left[t_{l-1,k} - 2t_{l,k} + t_{l+1,k}\right] \tag{4}$$

Dla strefy sąsiadującej z granicą rozdziału faz równanie(4) należy zastąpić równaniem

$$t_{n,k} - t_{n,k-1} = a \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \left[t_{n-1,k} - 3\, t_{n,k}\right] \tag{5}$$

Warunek brzegowy (3) przyjmie postać następującą

$$t_{1,k} - t_{z,k} = \frac{\alpha\Delta x}{2\lambda} \left[t_{z,k} - t_f\right] \tag{6}$$

gdzie t_z oznacza temperaturę fazy stałej na zewnętrznej powierzchni warstwy.

Analizowane zagadnienie zostało zatem sprowadzone do rozwiązania następującego układu równań

$$[t][W] = [K] \tag{7}$$

gdzie macierze

$$[t] = \begin{bmatrix} t_{z,k} \\ t_{1,k} \\ t_{2,k} \\ \cdots \\ t_{n,k} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$[W] = \begin{bmatrix} -\left[1+\frac{(\Delta x)\alpha}{2\lambda}\right] & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 2 & -\left[3+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta\tau a}\right] & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\left[2+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta\tau a}\right] & 1 & . & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 1 & -\left[3+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta\tau a}\right] \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} -t_f\,\frac{(\Delta x)\alpha}{2\lambda} \\ -t_{1,k-1}\,\frac{(\Delta x)^2}{\Delta\tau a} \\ -t_{2,k-1}\,\frac{(\Delta x)^2}{\Delta\tau a} \\ \vdots \\ -t_{n,k-1}\,\frac{(\Delta x)^2}{\Delta\tau a} \end{bmatrix} \tag{10}$$

W przypadku, gdy n=1 macierz [W] jest opisana wyrażeniem

$$[W] = \begin{bmatrix} -1+\frac{(\Delta x)\alpha}{2\lambda} & 1 \\ 2 & -\left[4+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta\tau a}\right] \end{bmatrix} \tag{11}$$

Ponieważ wielkość $\Delta\tau$ może przyjmować dowolne wartości, zatem dobierana jest w taki sposób, by w czasie $\Delta\tau$ zakrzepła cała kolejna strefa warstwy ($\xi_k - \xi_{k-1} = (\Delta x)$). Oznacza to, że $\Delta\tau$ jest wielkością zmienną wynikającą z warunku brzegowego(2) Umożliwia to znaczne uproszczenie schematu rozwiązania. Nie jest bowiem możliwe zaistnienie takiej sytuacji, aby tylko część strefy uległa zakrzepnięciu. Wówczas różnicowe równania bilansu energii przyjęłyby bardziej skomplikowaną postać.

Warunek brzegowy (2) przyjmie zatem następującą postać

$$-2\lambda\frac{t_{n-1,k-1}}{(\Delta x)} = q \cdot \varrho\,\frac{(\Delta x)}{\Delta\tau} \tag{12}$$

w przypadku ilorazu różnicowego przedniego oraz

$$-2\lambda\,\frac{t_{n,k}}{\Delta x} = q\,\varrho\,\frac{(\Delta x)}{\Delta\tau} \tag{13}$$

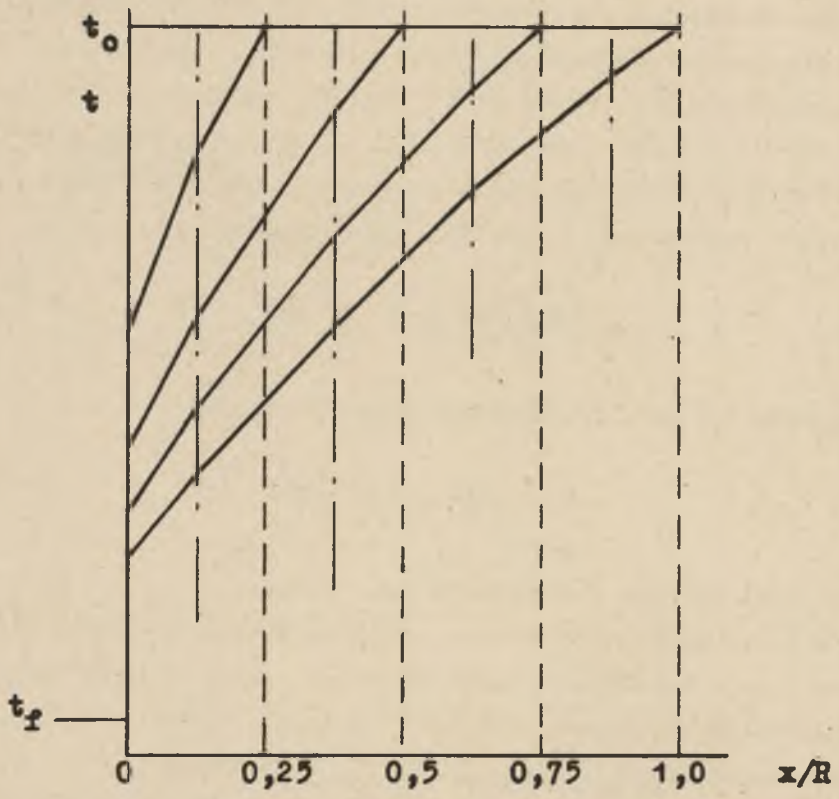
w przypadku ilorazu różnicowego wstecznego.

Jeżeli za podstawę rozważań przyjęte zostanie wyrażenie(13) wówczas nieuniknione jest rozwiązywanie zagadnienia metodą iteracji. Przyjmując iloraz różnicowy przedni (równ. (12)) można uniknąć niezbędnego procesu iteracji, a obliczenia w wielu przypadkach można wykonać ręcznie z pominięciem maszyn cyfrowych.

3. Przykład obliczeń

Obliczenia wykonano dla następujących wartości: $\alpha = 200 \frac{W}{m^2 K}$, $t_f = -20^oC$, $\lambda = 2 \frac{W}{m K}$, $\varrho = 10^3 \frac{kg}{m^3}$, $c = 2.10^3 \frac{J}{kg K}$, $q=40 \frac{kJ}{kg}$, $R = 4.10^{-2}$ m.

Warstwa podzielona została na n=4 części. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 1 i 2.



Rys. 1. Rozkład temperatury w warstwie dla przypadku "d"

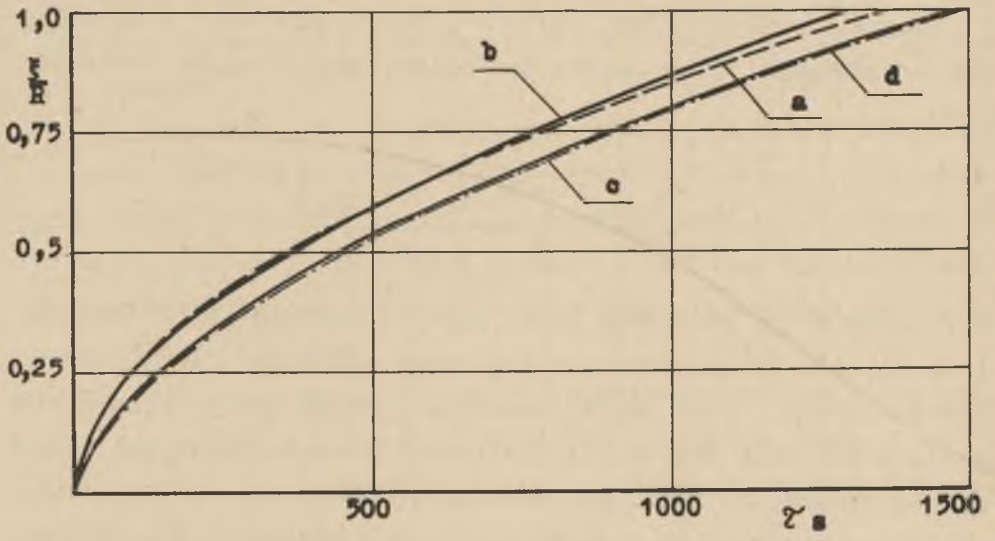
Krzywa a na rysunku 2 przedstawia rezultat uzyskany po zastosowaniu metody zaproponowanej przez Madejskiego [4, 5].

W metodzie tej dla wyznaczenia zależności $\xi(\tau)$ uzyskuje się układ równań

$$\frac{d\xi}{d\tau}\left[q\varrho + \frac{c\varrho}{2}(t_o - t_z)\right] - \frac{c\varrho}{2}\xi\frac{dt_z}{d\tau} = \alpha(t_z - t_f)$$

$$\xi = \frac{\lambda(t_o - t_z)}{\alpha(t_z - t_f)} \tag{14}$$

Równania (14) zostały rozwiązane numerycznie przy czym starano się zachować dokładność zbliżoną do dokładności przedstawionej metody numerycznej.



Rys. 2. Zależność położenia granicy ξ rozdziału faz od czasu τ

a - metoda Madejskiego, b - metoda numeryczna (warunek brzegowy (13)), c - metoda Goodmanna, d - metoda numeryczna (warunek brzegowy (15))

Krzywą c na rysunku 2 uzyskano w wyniku zastosowania metody Goodmana [2]. W metodzie tej wykorzystano pojęcie tzw. warstwy termicznej oraz założono rozkład temperatury w postaci wielomianu drugiego stopnia.

W pobliżu brzegu warstwy (małe ξ) występują duże różnice nachylenia krzywych a i b oraz c (rys. 2) co spowodowane jest przez różne opisanie warunków na granicy rozdziału faz. Zastosowanie ilorazu różnicowego przedniego (równ. (12)) daje początkowo zbyt szybkie przesuwanie się granicy rozdziału faz. Wpływ warunków zewnętrznych przy dużych wartościach ξ jest mniejszy w związku z czym nachylenia krzywych są zbliżone do siebie.

Znacznie dokładniejsze rezultaty można uzyskać, jeżeli warunek brzegowy (12) zostanie zastąpiony następującym wyrażeniem

$$q\varrho \frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{\Delta\tau} = \lambda \frac{\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{\xi_k} + \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{\xi_{k-1}}}{2} \tag{15}$$

W przypadku tym niezbędne jest jednak przeprowadzenie procesu iteracji dla wyznaczenia każdorazowego rozkładu temperatury. Proces iteracji jest szybko zbieżny. Na ogół już po trzech iteracjach uzyskuje się wyniki dokładne. Rezultaty obliczeń przedstawia krzywa d (rys. 2). Rozkład temperatury w warstwie przedstawiony jest na rysunku 1. W miarę oddalania się powierzchni rozdziału faz od brzegu warstwy rozkład ten zbliża się coraz bardziej do linii prostej czyli do rozkładu jaki zaistniałby w stanie ustalonym. Zależność położenia współrzędnej ξ od czasu przedstawia krzywa d na rysunku 2. Zgodność z metodą Goodmana jest bardzo dobra.

4. Wnioski

Przedstawiona metoda zilustrowana została na przykładzie płaskiej warstwy jednak może być zastosowana z powodzeniem również dla innych geometrii i warunków brzegowych. Zaletą metody jest jej prostota i ogólność. W pewnych przypadkach, szczególnie po dokonaniu podziału analizowanego obszaru na dużą ilość części, zachodzić może konieczność rozwiązywania układu wielu równań. Wówczas niezbędne jest wykorzystanie maszyny cyfrowej. Jednakże nawet w takim przypadku czas obliczeń nie jest zbyt długi ze względu na postać macierzy (9).

Przedstawione rozwiązanie po odpowiedniej modyfikacji może być zastosowane również w zagadnieniach przestrzennych, przy czym ilość równań do każdorazowego rozwiązania byłaby odpowiednio większa.

Zastąpienie pochodnej względem czasu przez iloraz różnicowy wsteczny posiada również tę korzystną właściwość, że nie stwarza ograniczenia odstępu $\Delta\tau$ czasu. Układ równań (7) posiada bowiem rozwiązanie dla każdej wartości $\Delta\tau$. Wielkości $\Delta\tau$ nie można jednak zwiększać nieograniczenie ponieważ posiada ona wpływ na dokładność obliczeń.

Wykorzystanie wyrażenia (15) dla warunku brzegowego na granicy rozdziału faz okazało się bardzo korzystne. Nawet w pobliżu brzegu obszaru uzyskuje się wyniki niewiele różniące się od metody Goodmanna.

LITERATURA

[1] BEAUBOUEF R.T., CHAPMAN A.J.: Int. J. Heat Mass Transfer, 10(1967), 1581.

[2] GOODMAN T.R.: Transaction of the ASME, (1958), 335.

[3] LEJBENZON L.S.: Rukowodstwo po nieftopromysłowoj mechanikie, Moskwa, 1931.

[4] MADEJSKI J.: Biuletyn nr 111 Instytutu Maszyn Przepływowych PAN, 1961.

[5] MADEJSKI J.: Arch. Mech. Stosowanej, 4(1962), 733.

[6] POOTS G.: Int. J. Heat Mass Transfer, 5(1962), 339.

[7] POOTS G.: Int. J. Heat Mass Transfer, 5(1962), 525.

[8] STEFAN J.: Monatschriften für Mathematik und Physik,(1890), 1.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

a - współczynnik wyrównywania temperatury,

c - ciepło właściwe,

q - ciepło zmiany stanu skupienia (krzepnięcia),

R - pół grubości płyty,

t_f - temperatura ośrodka otaczającego warstwę,

α - współczynnik wnikania ciepła,

ϱ - gęstość,

λ - współczynnik przewodzenia ciepła,

ξ - współrzędna powierzchni rozdziału faz,

τ - czas,

$)_1$ - dotyczy fazy ciekłej,

$)_2$ - dotyczy fazy stałej.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ

Р е з ю м е

В работе применено регрессивное разностное частное для решения проводимости тепла в плоском слое с одновременным изменением агрегатного состояния (затвердевания). Начальная температура системы равна температуре изменения состояния. На внешней поверхности слоя принято конвекцию при постоянном коэффициенте α теплоотдача. Полученную систему уравнений решено итерационным методом.

THE NUMERICAL SOLUTION OF THE FREEZING
OF A FLAT SLAB

S u m m a r y

In this paper the regresive difference quotient to the solution of the heat conduction in a flat slab with the contemporanceous state of aggregation change (freezing) was applied. The initial temperature of the slab is equal to the temperature of the state of aggregation change. At the outside surfaces of the slab the convection with the constant convection coefficient α of heat transfer is asumpt. The system of equations obtained has been solved by the iteration method.