

Jerzy JAKUBIEC
Hamid AL_RAIMI

NIEPEWNOŚĆ POMIARU A/C WARTOŚCI CHWILOWYCH PRZEBIEGÓW SINUSOIDALNIE ZMIENNYCH

Streszczenie. W artykule opisano wyniki symulacyjnej analizy błędów powstających w trakcie próbkowania przebiegów sinusoidalnie zmiennych, po którym następuje proces kwantowania próbek. Przedstawiono przykładowe histogramy błędów kwantowania i próbkowania oraz błędu wypadkowego, a także poddano analizie nakładanie się tych błędów. Porównano wyniki oceny wypadkowej niepewności przetwarzania wyznaczonej w sposób analityczny z wynikami badań symulacyjnych. Wykorzystano regułę geometrycznego składania niepewności przy założeniu, że definiowane są one jako skrajne.

A/D CONVERSION UNCERTAINTY OF INSTANTANEOUS VALUES OF SINUSOIDAL SIGNAL

Summary. Measuring results of instantaneous values are loaded both by sampling and quantization errors. The paper describes some results of error analysis carried out for sinusoidal input signal sampled in random moments. Comparison of uncertainty evaluation results obtained in simulation and analytical ways are presented, too. Addition of uncertainties is based on geometrical procedure.

1. WSTĘP

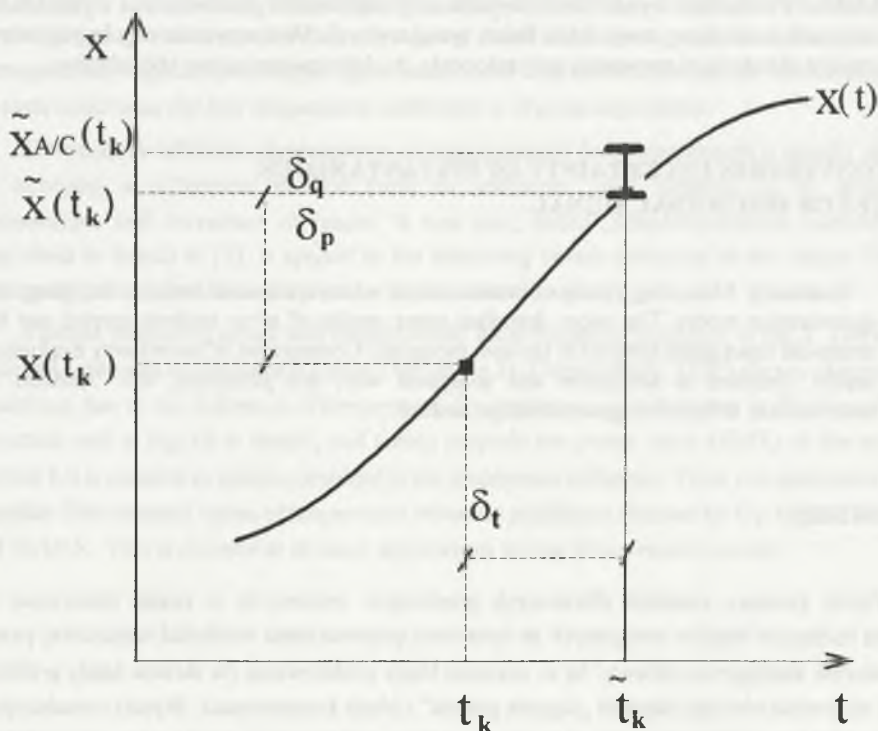
Wyniki pomiaru wartości chwilowych przebiegów zmiennych w czasie obarczone są dwoma rodzajami błędów związanych ze sposobem przetwarzania wielkości wejściowej przez przetwornik analogowo-cyfrowy: Są to czasowe błędy próbkowania (w skrócie błędy próbkowania nazywane również błędami „drgania próbek” i błędy kwantowania. Wyniki symulacyjnej analizy błędów próbkowania dla różnych sposobów próbkowania przebiegów sinusoidalnie zmiennych przedstawiono w pracy [1]. W niniejszym artykule rozważana jest sytuacja, gdy błędy próbkowania i kwantowania nakładają się na siebie.

Ilustrację procesu nakładania się czasowego błędu próbkowania i błędu kwantowania przedstawia rys. 1. Zakłada się, że wielkość mierzona $x(t)$ jest nominalnie próbkowana w chwilach t_k , $k = 0, 1, \dots$. Rzeczywisty moment próbkowania \tilde{t}_k różni się od momentu nominalnego na skutek zjawisk zachodzących podczas taktowania układów próbkująco-pamiętających. Moment ten można zapisać jako

$$\tilde{t}_k = t_k + \delta_t, \quad (1)$$

gdzie δ_t jest błędem chwili próbkowania równym odległości nominalnej i rzeczywistej chwili próbkowania. Błąd chwili próbkowania przejawia się w wartości wielkości mierzonej jako błąd próbkowania δ_p równy różnicy między nominalną wartością $x(t_k)$ tej wielkości w chwili t_k a wartością $x(\tilde{t}_k)$ uzyskaną w rzeczywistej chwili próbkowania. Stąd błąd próbkowania w chwili t_k można przedstawić w postaci wyrażenia

$$\delta_p = x(\tilde{t}_k) - x(t_k) = \tilde{x}(t_k) - x(t_k). \quad (2)$$



Rys. 1. Graficzna interpretacja czasowego błędu próbkowania δ_p i kwantownia δ_q
 Fig. 1. Graphical interpretation of arising sampling error δ_p and quantization error δ_q

Każda z wartości $x(t_k)$ obciążona błędem próbkowania poddawana jest następnie procesowi kwantowania. Oznaczając przez q wartość kwantu n -bitowego binarnego przetwornika A/C zachodzi

$$q = \frac{U_z}{2^n}, \quad (3)$$

gdzie U_z jest zakresem napięciowym przetwornika. Wynik przetwarzania A/C jest zatem liczbą całkowitą określoną wyrażeniem

$$N = \text{SIGN} [x(t_k)] \int \left[\frac{|x(t_k)|}{q} + 0.5 \right], \quad (4)$$

gdzie składnik o wartości 0.5 jest dodawany w celu symetryzacji rozkładu błędu kwantowania. Liczbie N odpowiada wynik przetwarzania o wartości

$$x_{A/C}(t_k) = Nq. \quad (5)$$

Wynik ten jest obciążony błędem kwantowania określonym jako różnica

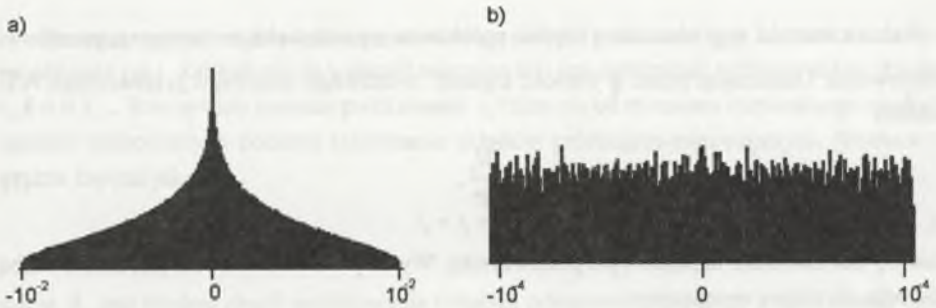
$$\delta_q = x_{A/C}(t_k) - x(t_k), \quad (6)$$

mieszczącym się w przedziale $\left(-\frac{1}{2}q, \dots, +\frac{1}{2}q\right)$.

Wartość uzyskiwana na wyjściu przetwornika A/C zawiera oprócz błędu kwantowania δ_q także błąd próbkowania δ_p . Zatem wynik przetwarzania A/C wartości wielkości $x(t)$ w chwili t_k można zgodnie z wyrażeniami (2) i (6) przedstawić w postaci równania

$$x_{A/C}(t_k) = x(t_k) + \delta_q = x(t_k) + \delta_q + \delta_p. \quad (7)$$

Na rys.2 przedstawiono przykładowe histogramy błędów pomiaru wartości chwilowych przebiegu sinusoidalnie zmiennego w sytuacji, gdy wynik pomiaru jest obciążony tylko jednym z błędów: próbkowania lub kwantowania. Można przyjąć, że histogramy te mogą być wizualnie traktowane jako obraz funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu. Są one wyznaczone przy założeniu, że ogólna liczba próbek wynosi 10^6 , a wartości błędów są zliczane w 200 przedziałach.



Rys.2. Histogramy błędów dla przebiegu sinusoidalnego próbkowanego losowo przy jednostajnym rozkładzie chwil próbkowania, a) błędów próbkowania przy założeniu, że względna niepewność czasu próbkowania wynosi $\frac{\Delta t}{T}=10^{-2}$, gdy Δt jest niepewnością graniczną chwil próbkowania, T okresem sinusoidy, b) błędów kwantowania 12 bitowego binarnego przetwornika A/C

Fig.2. Histograms of errors of sinusoidal signal sampled at random moments with rectangular distribution a) sampling error when relative sampling time ratio $\frac{\Delta t}{T}=10^{-2}$, where Δt is sampling uncertainty, T is period of the signal, b) quantization error of 12 bit A/D binary converter

W dalszej części artykułu przedstawiono wyniki symulacyjnego wyznaczania rozkładu błędów na wyjściu przetwornika A/C dla sinusoidalnego przebiegu wejściowego próbkowanego losowo. Momenty próbkowania mają rozkład jednostajny. Wyznaczono niepewności cząstkowe błędów kwantowania i próbkowania, następnie na tej podstawie określono niepewność wyniku przetwarzania A/C korzystając z reguły geometrycznego składania niepewności.

2. GEOMETRYCZNE SKŁADANIE NIEPEWNOŚCI

Jak to wynika z przedstawionego opisu, przetwarzanie analogowo-cyfrowe wartości chwilowych przebiegu jest ciągiem dwóch działań. Najpierw następuje próbkowanie będące fizycznym pobieraniem wartości chwilowej przebiegu, a następnie kwantowanie uzyskanej próbki. Zatem błąd przetwarzania A/C jest wypadkową błędów obu tych działań. Miarą ogólnej dokładności pomiaru wartości chwilowych jest wypadkowa niepewność przetwarzania A/C. Możliwe jest oszacowanie obu składowych tej niepewności. Dla określonego przebiegu wejściowego i znajomości maksymalnych opóźnień procesu próbkowania możliwe jest oszacowanie niepewności próbkowania [1]. Znajomość liczby bitów i kodu przetwornika A/C pozwala na określenie

rozkładu błędów kwantowania, a tym samym i ich niepewności. Pozostaje do rozstrzygnięcia problem, w jaki sposób można oszacować niepewność wypadkową przetwarzania A/C dla znanych niepewności cząstkowych próbkowania i kwantowania.

Jak to wynika z histogramów przedstawionych na rys.3, rozkład prawdopodobieństwa występowania błędu przetwarzania A/C zależy od wzajemnych proporcji błędów próbkowania i kwantowania, zależy także od kształtu przebiegu mierzonego. Nie można zatem stosować definicji niepewności tzw. standardowej proponowanej w [4], gdyż jest ona budowana na podstawie wariancji rozkładu błędów, a ta jest różna w odmiennych warunkach pomiaru. Do wyznaczania niepewności wypadkowej przyjęto tutaj regułę geometrycznego składania niepewności [2] bazującą na definiowaniu niepewności jako granicznej. Definicja ta określa niepewność jako połowę szerokości przedziału, w którym „prawie na pewno” mieszczą się wszystkie wartości błędów pomiaru. Wyrażeniem liczbowym tego określenia jest poziom ufności 99,73% dla rozkładu normalnego, co oznacza, że przedział niepewności ma szerokość 3σ , gdzie σ jest odchyleniem standardowym. Dla każdego typu rozkładu możliwe jest wyznaczenie odpowiedniej szerokości przedziału niepewności, jest to również proste działanie w przypadku badań symulacyjnych. Dla tego rodzaju definicji przy założeniu niezależności źródeł błędów można stosować regułę geometrycznego składania niepewności cząstkowych charakteryzujących błędy o różnych rozkładach. W rozpatrywanej sytuacji równanie składania niepewności przyjmuje postać

$$\Delta_{A/C} = \sqrt{\Delta_p^2 + \Delta_q^2}, \quad (8)$$

gdzie Δ_p jest niepewnością próbkowania, a Δ_q — kwantowania. Poniżej zestawiono wyniki wyznaczenia niepewności zgodnie z równaniem (8) oraz porównano je z wynikami uzyskanymi w sposób symulacyjny.

3. WYNIKI ANALIZY NIEPEWNOŚCI PRZETWARZANIA A/C

W tablicach 1, 2 i 3 zestawiono wyniki obliczeń niepewności przetwarzania A/C, oznaczanej symbolem $\Delta_{A/C}$ uzyskane w dwojaki sposób. Symbolem $\Delta_{A/Ca}$ oznaczono niepewność uzyskaną na podstawie równania (8), przy założeniu, że znane są wartości cząstkowych niepewności próbkowania Δ_p i kwantowania Δ_q . Symbolem $\Delta_{A/Cs}$ oznaczono niepewność wyznaczoną w sposób symulacyjny w takich samych warunkach, dla których zastosowano zależność (8).

Warunki badań można określić następująco. Przyjęto, że przebieg wejściowy jest sinusoidą o okresie próbkowania T i amplitudzie równej 1. Przebieg ten jest próbkowany w chwilach t_b przy czym rozkład tych chwil jest jednostajny w zakresie $0, \dots, T$. Wynik próbkowania opisuje zatem zależność

$$x(t_k) = \sin\omega(t_k + \delta_k), \quad (9)$$

gdzie δ_k jest losowym błędem chwili próbkowania o rozkładzie jednostajnym w obszarze od $+\Delta_p$ do $-\Delta_p$. Istotnym parametrem jest stosunek niepewności chwil próbkowania do okresu sinusoidy $\frac{\Delta_p}{T}$. Z zależności przedstawionych w [1] wynika, że zachodzi

$$\frac{\Delta_p}{T} = \frac{\Delta_p}{U_m}, \quad (10)$$

gdzie U_m jest amplitudą przebiegu sinusoidalnego. Dla celów analizy przyjęto, że zachodzi $T = 1$ i $U_m = 1$, co powoduje, że wyrażenie (10) uzyskuje prostą postać

$$\Delta_p = \Delta_r. \quad (11)$$

Wynik próbkowania jest następnie poddawany kwantowaniu zgodnie z zależnościami (4), (5) i (7). Wypadkowy błąd wyniku przetwarzania A/C jest określony jako

$$\delta_{AC} = \delta_q + \delta_p = Nq - \sin\omega t_k, \quad (12)$$

gdzie $q = \frac{1}{2^n}$, n jest liczbą bitów przetwornika A/C.

Tabela 1

Wartości niepewności wyników 8-bitowego przetwarzania A/C, Δ_p — niepewność próbkowania, Δ_q — niepewność kwantowania, Δ_{ACs} — niepewność wypadkowa wyznaczona w sposób symulacyjny, Δ_{ACa} - niepewność wypadkowa wyznaczona w sposób analityczny

Δ_p	0,001	0,0005	0,0001	0,00005	0,00001
Δ_q	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019
Δ_{ACs}	0,0026	0,0022	0,0020	0,0020	0,0020
Δ_{ACa}	0,0023	0,0020	0,0020	0,0020	0,0019

Tabela 2

Wartości niepewności wyników 10-bitowego przetwarzania A/C

Δ_p	0,001	0,0005	0,0001	0,00005	0,00001
Δ_q	0,00049	0,00049	0,00049	0,00049	0,00049
Δ_{ACs}	0,0013	0,00088	0,00053	0,00050	0,00048
Δ_{ACa}	0,0011	0,00069	0,00049	0,00049	0,00049

Tabela 3

Wartości niepewności wyników 12-bitowego przetwarzania A/C

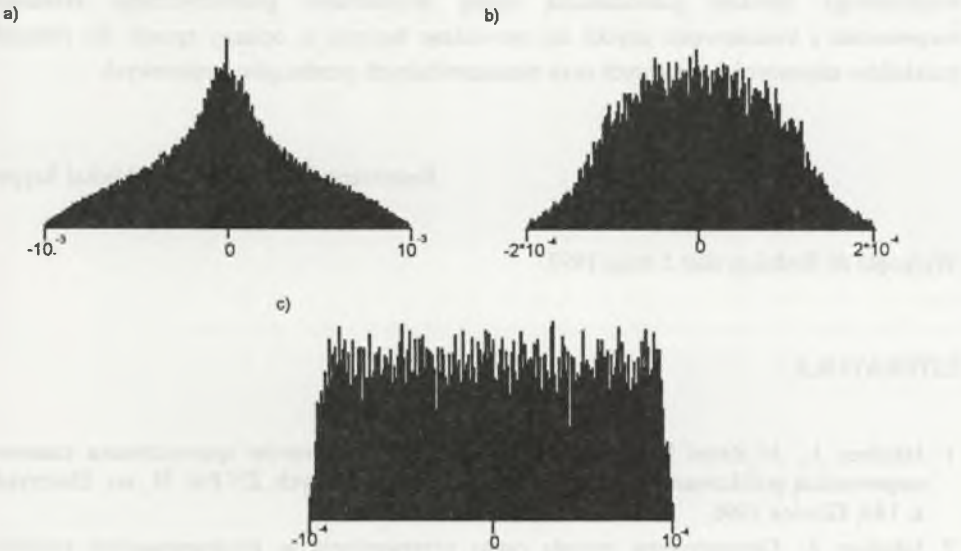
Δ_n	0,001	0,0005	0,0001	0,00005	0,00001
Δ_a	0,00012	0,00012	0,00012	0,00012	0,00012
Δ_{ACs}	0,0010	0,00054	0,00019	0,00015	0,00012
Δ_{ACa}	0,0010	0,00051	0,00016	0,00013	0,00012

Na podstawie zbioru wartości błędów uzyskanych za pomocą wyrażenia (12) określa się graniczną niepewność przetwarzania A/C oznaczoną w tablicach 1, 2 i 3 symbolem Δ_{ACs} .

Niepewność kwantowania określana jest zależnością

$$\Delta_z = \frac{1}{2} q. \quad (13)$$

W celu uproszczenia interpretacji wyników przyjęto, że bit znaku jest dodatkowym bitem $n + 1$.



Rys.3. Histogramy błędów przetwarzania A/C wartości chwilowych dla przebiegu sinusoidalnego próbkowanego losowo. Przetwornik 12-bitowy. Rozkład błędów chwil próbkowania jest jednostajny przy założeniu, że niepewność względna $\frac{\Delta_z}{T}$ wynosi: a) 10^{-3} , b) 10^{-4} , c) 10^{-2}

Fig.3. Histograms of errors of sinusoidal signal sampled at random moments with rectangular distribution and converted by 12 bit binary A/D converter for relative sampling time ratio

a) $\frac{\Delta_z}{T} = 10^{-3}$, b) $\frac{\Delta_z}{T} = 10^{-4}$, c) $\frac{\Delta_z}{T} = 10^{-2}$

3. WNIOSKI

Z przytoczonych danych można wstępnie wnioskować, że geometryczna reguła składania granicznych niepewności cząstkowych może być stosowana do uzyskiwania w sposób analityczny wypadkowej niepewności przetwarzania A/C obejmującej zarówno błędy próbkowania, jak i kwantowania. Występujące różnice między wartościami obliczonymi analitycznie i symulacyjnie nie mają istotnego znaczenia. Wynikają one ze skorelowania błędów kwantowania i próbkowania, co przede wszystkim związane jest z faktem, że kwantowaniu poddawane są wyniki obarczone błędami próbkowania, zatem kwantowaniu podlega zarówno wartość dokładna próbki, jak i błąd próbkowania. Korelacja ta jest największa dla zbliżonych wartości niepewności charakteryzujących oba rodzaje błędów.

Należy jednak zauważyć, że przytoczone wyniki uzyskano dla określonego sposobu próbkowania, jednostajnego rozkładu błędów chwil próbkowania i sinusoidalnego przebiegu wejściowego. Bardziej jednoznaczną ocenę przydatności geometrycznego składania niepewności i kwantowania uzyska się prowadząc badania w opisany sposób dla różnych rozkładów niepewności czasowych oraz niesinusoidalnych przebiegów wejściowych.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Michał Szyper

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 maja 1997

LITERATURA

1. Jakubiec J., Al Raimi H.: Niedokładność wyników pomiarów spowodowana czasową niepewnością próbkowania przebiegów sinusoidalnie zmiennych. ZN Pol. Śl., ser. Elektryka, z. 144, Gliwice 1996.
2. Jakubiec J.: Geometryczna metoda opisu przetwarzania w programowanym czujniku pomiarowym. Metrologia i Systemy Pomiarowe. 1997, z. 3-4 (w druku).
3. Marcyniuk A.: Teoria pomiaru. Podstawy metrologicznej interpretacji wyniku pomiaru. Skrypty Uczelniane Pol. Śl. nr 687, Gliwice 1977.
4. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO, Geneva 1992.

Abstract

Measuring instantaneous values of quantities varying in time is carried out in two steps. The first one is sampling, the second one is quantization performed by A/D converter. Therefore, the measured results are loaded by two kinds of error - sampling and quantization errors. When the sampling is a random process both errors are of stochastic character. To evaluate resultant uncertainty of the measured results, when the partial sampling and quantization uncertainties are known, one may use geometrical procedure of adding uncertainties. Some results of analysis of such procedure in situation where the input signal is sinusoidal has been described in the paper. A comparison of final uncertainty evaluation results obtained both in the analytical and simulation ways has been presented, too.