

JANUSZ WANDRASZ

Katedra Podstaw Techniki Ciepłej

MODELOWANIE USTALONEGO POLA TEMPERATUR  
ZA POMOCĄ WANNY ELEKTROLITYCZNEJ

Streszczenie. W artykule omówiono teorię modelowania ustalonego pola temperatur za pomocą wanny elektrolitycznej. Przedstawiono nową metodę modelowania trzeciego warunku brzegowego w wymianie ciepła. Podano rezultaty uzyskane przy badaniu wpływu materiału elektrody rodzaju elektrolitu i częstotliwości prądu. W końcowej części pracy przedstawiono wyniki modelowania kilku konkretnych układów (płyta grzejna, naroże budynku).

1. Wstęp

Ustalone pole temperatur przy nieobecności wewnętrznych źródeł ciepła można opisać równaniem Laplace'a

$$\nabla (\lambda \nabla \vartheta) = 0 \quad (1)$$

Jeżeli współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  nie zależy od temperatury  $\vartheta$  to równanie (1) sprowadza się do postaci

$$\nabla^2 \vartheta = 0 \quad (2)$$

Rozwiązanie powyższego równania metodą analityczną przy znajomości warunków brzegowych jest możliwe tylko w najprostszycch przypadkach. Najczęściej stosuje się metody przybliżone oparte na analogii fizycznej lub przybliżone metody różnicowe wymagające użycia matematycznych maszyn cyfrowych.

Analogie fizyczne można podzielić na dwie grupy. W pierwszej z nich modeluje się badany obszar przez dyskretyzację układu i wykorzystanie siatek rezystorowych. Opierając się na analogii przepływu ciepła i prądu elektrycznego można ustalić rozkład temperatur w węzłach siatki dyskretyzującej. Do drugiej grupy należą układy w których zostaje zachowana ciągłość badanego obszaru. Do grupy tej można zaliczyć analogi z papierem przewodzącym oraz analogi elektrolityczne.

W badaniach prowadzonych w Katedrze Energetyki Ciepłej pod kierunkiem prof. dr inż. Jana Szarguta wykorzystano analogię przepływu prądu elektrycznego w elektrolitach do przepływu ciepła. Zajmowano się zagadnieniem dwuwymiarowego pola temperatur opisanego równaniem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Analogiczne równanie opisuje ustalone pole potencjału w wannie elektrolitycznej, przy stałej grubości warstwy elektrolitu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Badany obiekt modeluje się w wannie elektrolitycznej z zachowaniem pełnego podobieństwa geometrycznego oraz podobieństwa warunków brzegowych. Najczęściej występuje trzeci warunek brzegowy ujęty równaniem

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t - \psi_{śc}) \quad (5)$$

gdzie:

$\alpha$  - współczynnik wnikania ciepła,  $W/(m^2 \text{ deg})$ ,

$\lambda$  - współczynnik przewodzenia ciepła,  $W/(m \text{ deg})$ ,

$t$  - temperatura ośrodka,  $^{\circ}\text{C}$ ,

$t_{\text{śc}}$  - temperatura ścianki,  $^{\circ}\text{C}$ .

W wielu pracach badawczych z tej dziedziny modelowano pierwszy warunek brzegowy (znany rozkład temperatur na powierzchni) Rozkład temperatur na powierzchni był określany doświadczalnie, a odpowiednie wartości napięcia zadawano poprzez układ rezystorów [6], [9].

Trzeci warunek brzegowy dla elektrody zanurzonej w elektrolicie o konduktywności  $\sigma_e$  jest opisany równaniem

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{1}{\sigma_e} \frac{1}{R_e F_e} (U - U_s) \quad (6)$$

gdzie:

$\sigma_e$  - konduktywność elektrolitu, S/m,

$R_e$  - rezystancja imitująca opór wnikania ciepła,

$F_e$  - powierzchnia elektrody,  $\text{m}^2$ ,

$U$  - potencjał elektryczny imitujący temperaturę ośrodka V

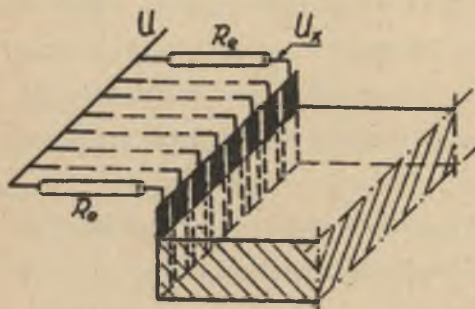
$U_s$  - potencjał elektryczny imitujący temperaturę ścianki V

Dokładność wyników uzyskanych za pomocą modelowania w wannie elektrolitycznej zależy nie tylko od dokładności wykonania modelu (wymiary geometryczne) lecz również od doboru elektrolitu materiału elektrody, oraz częstotliwości prądu.

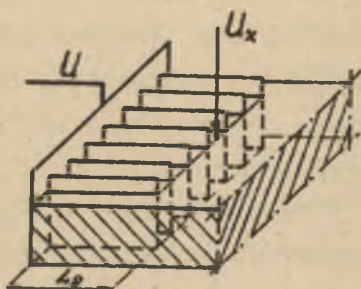
## 2. Modelowanie warunków brzegowych

Trzeci warunek brzegowy można modelować przy użyciu rezystorów (rys. 1). W układzie tym występuje jednak oddziaływanie impedancji w warstwie przyściennej elektrody, [2], bezpośrednio w obszarze modelowanym, powodujące spadek napięcia przy elektrodzie. Przy przeprowadzaniu pomiarów w pobliżu elektrody

występuje dodatkowo wpływ menisku sondy i elektrody oraz siły wzajemnego ich oddziaływania.



Rys. 1. Modelowanie warunków brzegowych za pomocą rezystorów



Rys. 2. Modelowanie warunków brzegowych za pomocą warstwy elektrolitu

Jeśli w miejsce rezystorów wprowadzi się grubość  $L_g$  warstwy elektrolitu (rys. 2) imitującej opór wnikania ciepła to wzór (6) można sprowadzić do postaci

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{1}{L_g} (U - U_s) \quad (7)$$

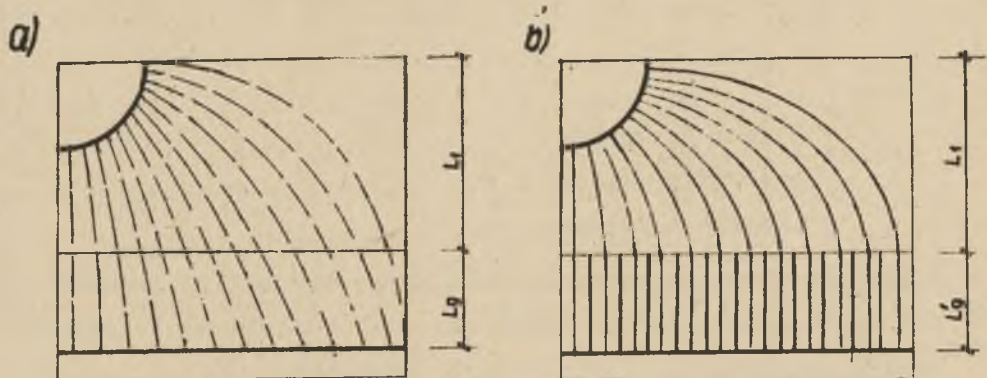
Z porównania równań (5) i (7) wynika grubość warstwy elektrolitu imitującej opór wnikania

$$L_g = a \frac{\lambda}{\alpha} \quad (8)$$

gdzie  $a$  oznacza skalę geometryczną modelu.

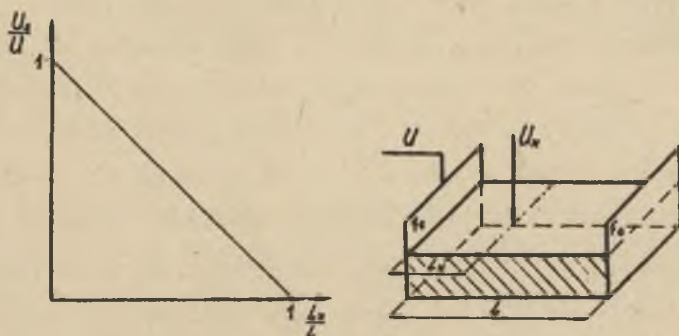
Elektroda imituje w tym przypadku ośrodek o stałej temperaturze. Spadek potencjału spowodowany impedancją powierzchniową przesuwa się w głąb warstwy modelującej opór wnikania, a wyznaczanie napięć na ściance lub w pobliżu ścianki badanego obiektu nie jest obciążone dodatkowymi wpływami.

Modelowanie oporu wnikania za pomocą warstwy elektrolitu powinno być rozwiązane tak, żeby linie prądu były w tej warstwie prostopadłe do modelowanej powierzchni zewnętrznej ciała, gdyż tylko w ten sposób można uzyskać wymaganą wartość lokalnych oporów przewodzenia prądu. Na rysunku 3 pokazano jak przebiegałyby linie prądu w modelu płyty grzejnej, gdyby opór wnikania imitowano warstwą elektrolitu o stałej grubości. Linie prądu nie są w tym przypadku prostopadłe do powierzchni



Rys. 3. Przebieg linii prądu w wannie elektrolitycznej

a - modelowanie warunków brzegowych warstwą elektrolitu o stałej grubości, b - modelowanie warunków brzegowych warstwą elektrolitu z przegrodami



Rys. 4. Teoretyczny rozkład napięć między elektrodami w jednorodnym elektrolicie

płyty i łączna rezystancja warstwy elektrolitu jest za mała. By wyeliminować wynikający stąd błąd można wprowadzić w obszar imitujący opór wnikania dodatkowe przegrody izolujące, prostopadłe do powierzchni ciała (rys. 3b). Równocześnie należy uwzględnić zmianę rezystancji warstwy elektrolitu spowodowaną grubością wprowadzonych przegród. Wzór (8) po skorygowaniu przyjmuje postać

$$L'_g = L_g \left( 1 - \frac{n \cdot g}{L_e} \right) \quad (9)$$

gdzie:

- n - liczba przegród,
- g - grubość przegrody, m,
- $L_e$  - długość elektrody, m.

Sposób powyższy został zastosowany przy badaniach modelowych płyt grzejnych symetrycznych oraz przy badaniu oporu cieplnego naroży. Dotąd metoda ta nie była stosowana.

### 3. Zagadnienie doboru elektrolitu, elektrod oraz częstotliwości prądu

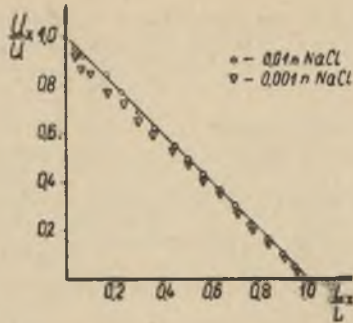
Zagadnienie spadku potencjału elektrycznego przy elektrodzie było badane przez P.A. Einsteina [2]. Wykazał on, że impedancja elektrolitu jest równoległą kombinacją rezystancji  $R$  i reaktancji pojemnościowej  $X$ . Główna bryła elektrolitu posiada tylko rezystancję, a reaktancja pojemnościowa występuje w pobliżu elektrod. Błąd spowodowany spadkiem napięcia przy elektrodach można traktować jako równoważny przesunięciu elektrody w kierunku powiększenia bryły elektrolitu. Przesunięcie to wynosi  $\frac{1}{F}$  [m], gdzie  $F$  oznacza stosunek rezystancji jednego  $\text{cm}^3$  elektrolitu do impedancji powierzchniowej  $Z$  wzdłuż jednego  $\text{cm}^2$  elektrody  $F$  [ $\text{m}^{-1}$ ]. Pomiar przeprowadzone w pracy [2] wskazują na konieczność stosowania wielkości  $F$  rzę-

du  $10^4 - 4 \cdot 10^4$  [1/m]. Wpływ na powyższe zjawisko ma nie tylko rodzaj stosowanych elektrod lecz także stężenie elektrolitu oraz częstotliwość prądu.

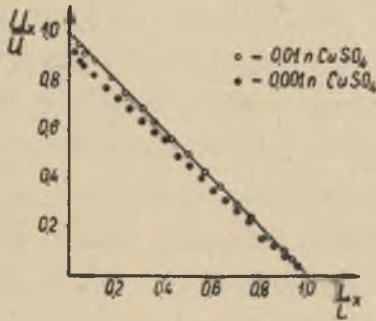
Dla odpowiedniego doboru powyższych wielkości przewodzone zostały w Katedrze Energetyki Ciepłej badania rozkładu napięć pomiędzy dwoma płaskimi elektrodami (rys. 4). Teoretyczny rozkład w układzie współrzędnych zredukowanych ( $U_x/U$ ,  $L_x/L$ ) przedstawia linia prosta, przy założeniu jednorodnej struktury elektrolitu (stała konduktywność elektrolitu  $\sigma_e$ ). Wyniki uzyskanych badań dla zastosowanych elektrolitów (woda destylowana roztwór  $\text{CuSO}_4$ , roztwór  $\text{NaCl}$ ), elektrod (grafit, miedź) oraz dla różnych częstotliwości prądu przedstawiają wykresy (rys. 5, 6, 7). Zamieszczone wykresy nie obejmują wszystkich przebadanych przypadków lecz tylko niektóre wybrane z nich.

Analizując uzyskane wyniki można stwierdzić, że zwiększanie stężenia elektrolitu wpływa na zmniejszenie impedancji powierzchniowej  $Z$  powodując wzrost wartości  $F$ , a tym samym zwiększenie dokładności badań. Wynik ten nie jest zgodny z [2] co wymaga dalszych badań. Wpływ częstotliwości widoczny jest na rysunku 7. Najkorzystniejszy rozkład napięć uzyskano dla częstotliwości 1000 Hz, co potwierdza słuszność badań P.A. Einsteina ustalających wartość częstotliwości w zakresie 1000-2000 Hz (1500 Hz).

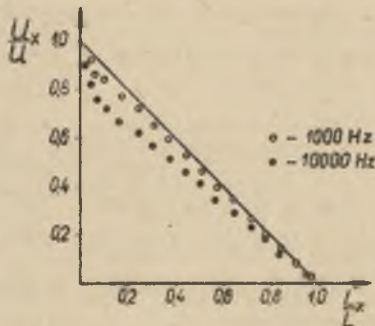
Do dalszych badań stosowano częstotliwości prądu rzędu 1000 Hz oraz napięcie 3 V. Zastosowany układ pomiarowy przedstawia rys. 8. Oscyloskop w układzie mostkowym pozwala osiągnąć dużą dokładność określenia wartości mierzonego napięcia. Przez doprowadzenie do lampy kineskopowej dwu napięć sinusoidalnych przesuniętych fazowo (wpływ pojemności wanny) uzyskuje się na ekranie elipsę zmieniającą swoje położenie w zależności od wartości przyłożonych napięć. Napięcie wzorcowe rejestrowane



Rys. 5. Rozkład napięć między dwiema elektrodami grafitowymi, elektrolit roztwór NaCl, napięcie prądu 3 V, 1000 Hz



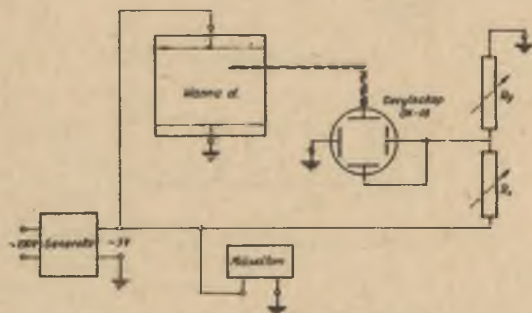
Rys. 6. Rozkład napięć między dwiema elektrodami miedzianymi, elektrolit roztwór  $\text{CuSO}_4$ , napięcie prądu 3 V, 1000 Hz



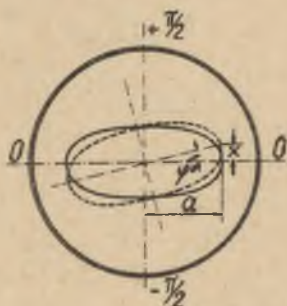
Rys. 7. Rozkład napięć między dwiema elektrodami grafitowymi, elektrolit 0,001 NaCl, napięcie prądu 3 V



jest przez miliwoltomierz lampowy. Równoważenie mostka uzyskuje się przez zmianę rezystancji.  $R_a$  przy stałej wartości rezystancji  $R_b$ . Czułość pomiaru określa wyrażenie podane w pracy [6]



Rys. 8. Układ pomiarowy



Rys. 9. Zmiana położenia elipsy na ekranie oscyloskopowym

$$\frac{U - U_p}{U \text{ arc sin } x/a} \quad (10)$$

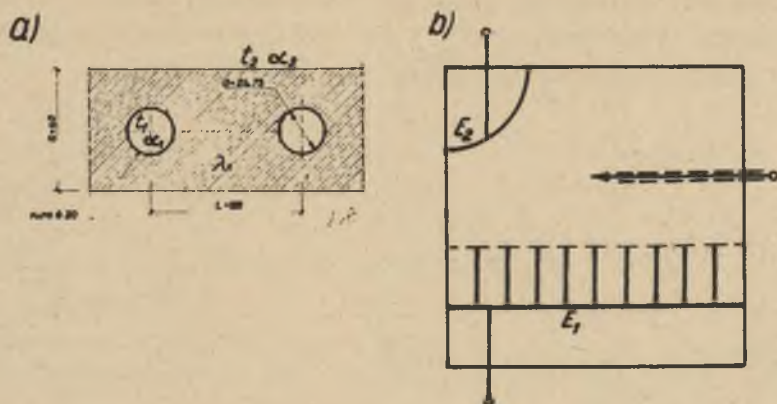
gdzie wartości  $a$  i  $x$  przedstawiono na rys. 9. Wartości  $U$  i  $U_p$  przedstawiają odpowiednio napięcie wzorcowe i porównywane z nim napięcie sondy.

#### 4. Modelowanie w wannie elektrolitycznej

Wanna elektrolityczna została wykorzystana do badań pola temperatur w płytach grzejnych oraz narożach budynków. Celem sprawdzenia dokładności metody zamodelowano przypadek płyty grzejnej symetrycznej rozwiązany metodą obliczeniową przez J. Szarguta [7] [8] (rys. 10a). Przy modelowaniu przyjęto opór wnikania ciepła w rurze jako bliski zera ze względu na dużą wartość  $\alpha$ . Model układu przedstawiony jest na rys. 10b. Napięcie przyłożone między elektrodami jest proporcjonalne do różnicy temperatur ośrodków. Temperatura w danym punkcie obszaru wynika z pomierzonej wartości napięcie wg zależności

$$\frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{U}{U} \quad (11)$$

Wzór (11) jest słuszny przy założeniu, że elektrolit jest idealnym rezystorem bez uwzględnienia powierzchniowej impedancji.

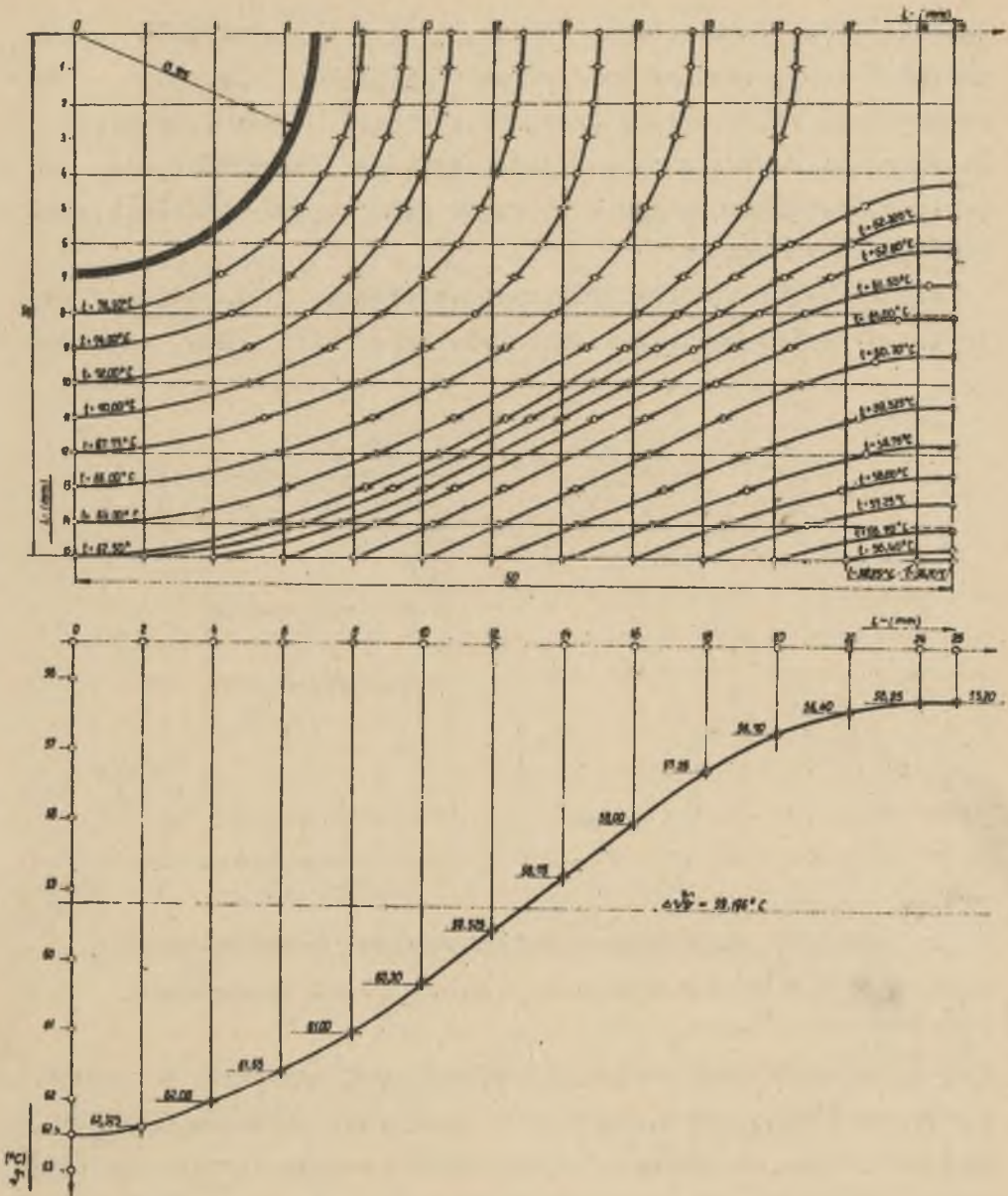


Rys. 10. Modelowanie płyty grzejnej symetrycznej  
 a - przekrój płyty grzejnej, b - model układu pomiarowego

Aby uściślić obliczenia należy prawą stronę powyższego równania pomnożyć przez liczbę  $C$  wyznaczoną doświadczalnie dla zastosowanego zespołu elektroda - elektrolit częstotliwość prądu. W celu wyznaczenia tej poprawki można wykorzystać wykresy na rys. 5, 6, 7. Na rysunkach należy przedłużyć linię rzeczywistego rozkładu napięć do osi  $U_x/U$ , otrzymując w punkcie przecięcia wartość napięcia dla przypadku elektrolitu jako idealnego rezystora. Liczba  $C$  odpowiada odwrotności uzyskanego napięcia zredukowanego i dla zestawu elektroda grafitowa - roztwór 0,01 n NaCl oraz częstotliwości prądu 1000 Hz wynosi  $C = 1,015$ . Temu samemu zestawowi przy zmianie stężenia elektrolitu na 0,001 n NaCl odpowiada liczba  $C = 1,061$ .

Rozkład temperatur uzyskany w omawianym przypadku pokazano na rys. 11. Średnia temperatura ścianki wynikająca z pomiarów różni się od wartości obliczonej w pracy [7] o  $\Delta\vartheta = 0,204$  deg. Odchylenie to jest nieznaczne co świadczy o wystarczającej dokładności badań modelowych.

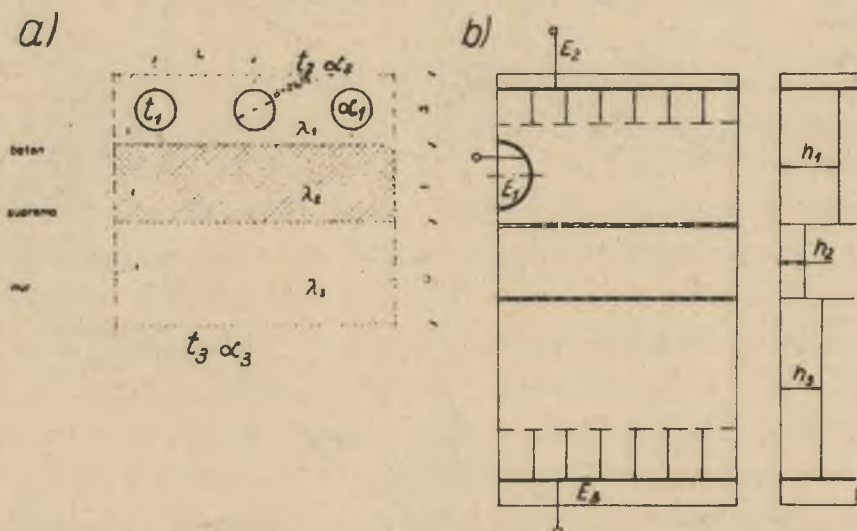
Inną metodę modelowania należy zastosować przy badaniu płyty grzejnej niesymetrycznej (rys. 12a). Ze względu na wystę-



Rys. 11. Rozkład temperatur w płycie grzewczej symetrycznej

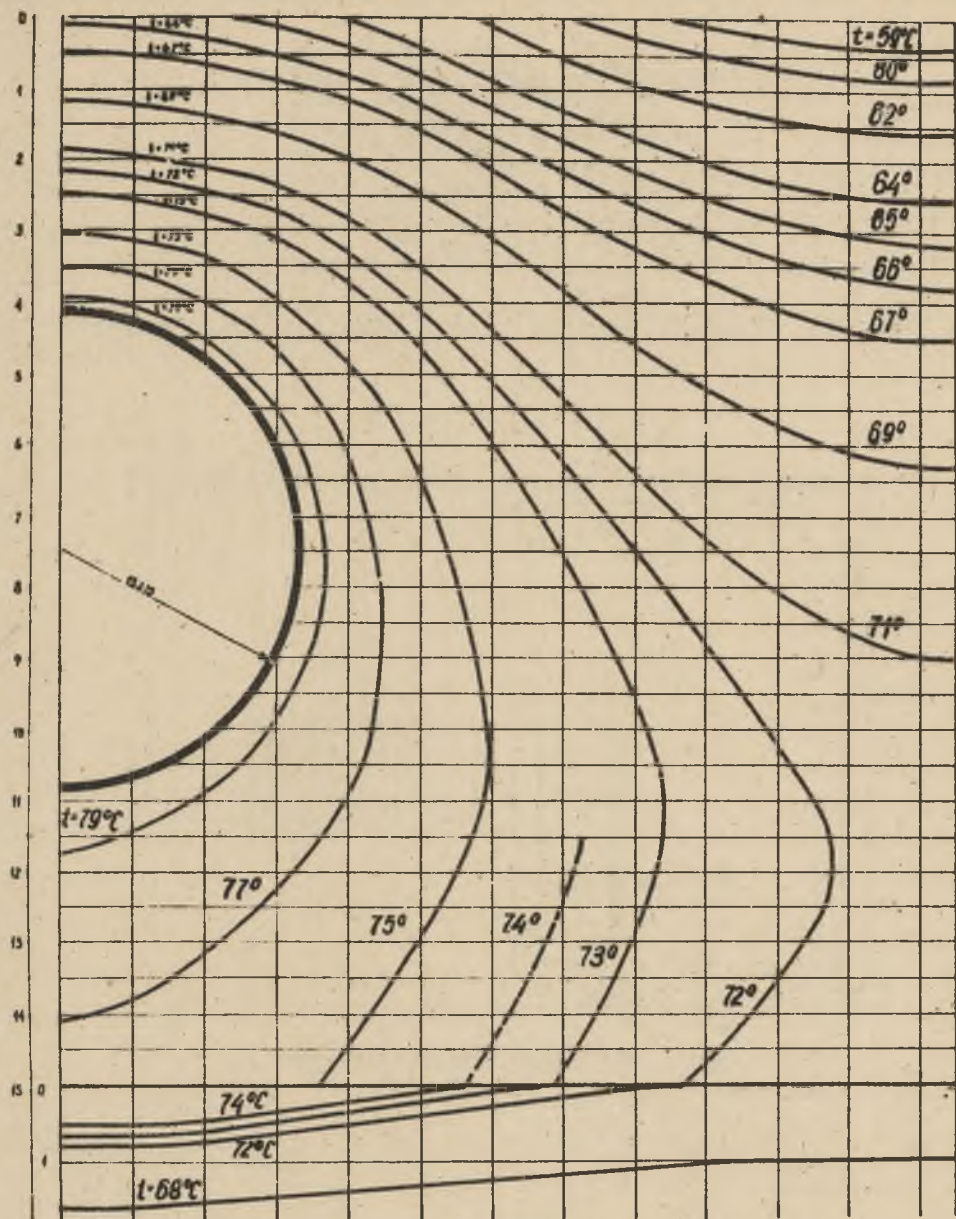
powanie różnych materiałów (beton, tynk itp.) występują różne wartości współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$ . Zachodzi tu konieczność rozdzielania obszarów o stałym współczynniku  $\lambda$  przegrodami przewodzącymi jednokierunkowo. Przegroda taka nie powinna przewodzić prądu w kierunku płaszczyzny oddzielającej rozpatrywane obszary.

Zmiany współczynnika przewodzenia ciepła  $\lambda$  modeluje się zmianą grubości warstwy elektrolitu (rys. 12b). Dla zbadania

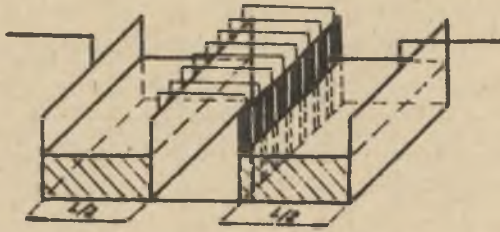


Rys. 12. Modelowanie płyty grzejnej niesymetrycznej  
a - przekrój płyty, b - model układu pomiarowego

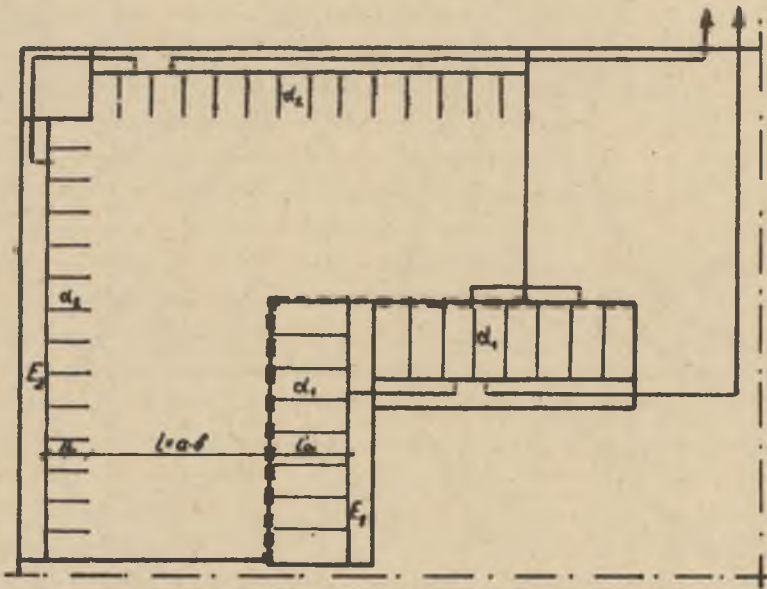
wplywu wprowadzenia przegrody przewodzącej wykonanej z prętów (materiał identyczny z materiałem elektrod) połączonych żywicą epoksydową, zmierzono rozkład napięć w układzie jak na rysunku 4 wprowadzając pomiędzy elektrody badaną przegrodę. Wyniki naniesione na układ współrzędnych zredukowanych nie wykazały większych odchyśleń od rozkładów uzyskiwanych bez przegrody. Rozkład temperatur w płycie grzejnej niesymetrycznej przedstawiono na rys. 13.



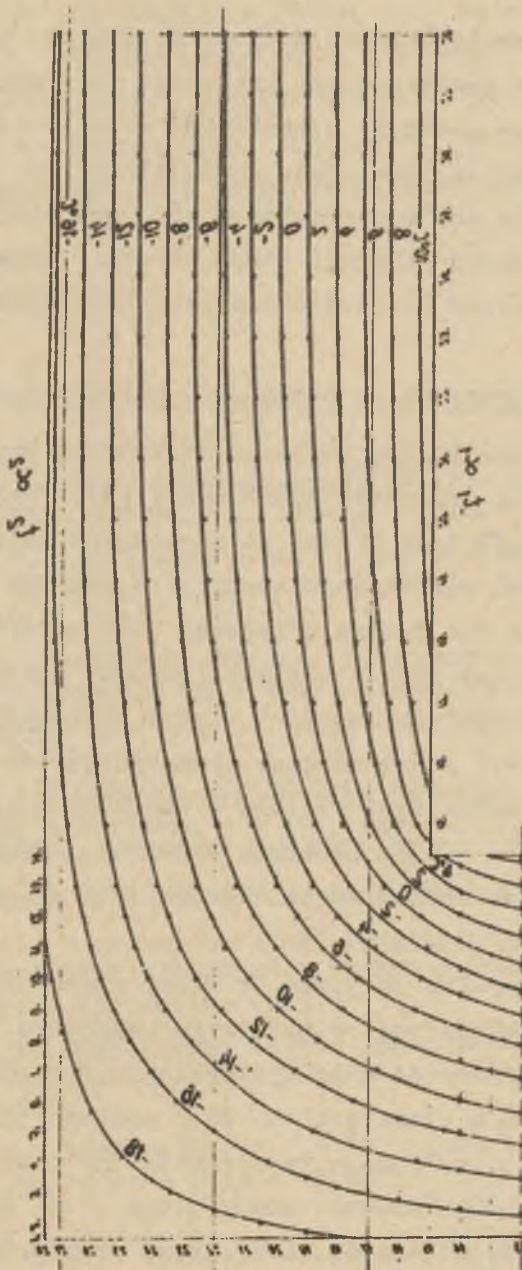
Rys. 13. Rozkład temperatur w płycie grzejnej niesymetrycznej (fragment płyty)



Rys. 14. Podział badanego pola z przeniesieniem napięć



Rys. 15. Model naroża budynku



Rys. 16. Rozkład temperatur w narożu symetrycznym.

Przy modelowaniu układów o skomplikowanych kształtach występuje problem odwzorowania trzeciego warunku brzegowego, Warunki brzegowe można tu zamodelować w oddzielnej części wanny z przeniesieniem potencjału do modelowanego obszaru (rys. 14). Rozwiązanie takie zastosowano np. przy badaniu rozkładu temperatur w narożu budynku. Model układu przedstawiono na rys. 15, a uzyskany rozkład temperatur przedstawia rys. 16.

##### 5. Czynniki wpływające na dokładność uzyskiwanych wyników

Badania czynników wpływających na dokładność analogu elektrolitycznego zostały przedstawione w pracy [2]. Dokładne określenie błędu pomiaru jest trudne ze względu na możliwość wystąpienia znacznych różnic jego wartości w różnych punktach pomiarowych. Powinno się jednak oszacować błąd maksymalny.

Błąd sumaryczny wynika z niedokładności geometrycznych, z niedokładności pomiaru napięć i błędów systematycznych wywołanych przez efekty pojemnościowe oraz występowanie menisku przy elektrodzie. Menisk ten wywołuje stosunkowo duży błąd sięgający dość znacznie w głąb badanego obszaru. Błąd ten można zmniejszyć przez zastosowanie dostatecznie grubej warstwy elektrolitu.

Elektrody używane do pomiarów winny mieć ścianki gładkie i czyste oraz posiadać ostre naroża (w przypadku elektrod zgiętych). Sonda pomiarowa może być wykonana z dowolnego materiału nie reagującego z elektrolitem. Błąd pomiaru napięcia wynika między innymi z zakłócenia rozkładu napięć wywołanego przez wprowadzenie sondy. Grubość sondy winna być jak najmniejsza ze względu na błąd menisku. Cały układ należy dobrze ekranować

Prostota badań modelowych w wannie elektrolitycznej, możliwość dość szybkiego przeprowadzenia pomiaru oraz możliwość wyznaczenia wartości temperatury w danym punkcie obszaru bez u-



ciekania się do rozwiązywania całego pola świadczy o dużych możliwościach zastosowania tej metody badań.

Na zakończenie pragnę podziękować prof. dr inż. Janowi Szargutowi za wiele cennych uwag i wskazówek przy rozwiązywaniu problemów modelowych oraz opracowaniu niniejszego artykułu.

#### LITERATURA

- [1] BIELANOWICZ W., PAWLIK W.: Badania modelowe rozkładu temperatur w narożu niesymetrycznym - praca dyplomowa wykonana w Katedrze Energetyki Ciepłej Pol. Śl. 1967.
- [2] EINSTEIN P.A.: Factors Limiting the accuracy of the electrolytic plotting tanks - Brt. I. Appl. Phisics 1951, str. 49-55.
- [3] FOLTYN T.: Badanie ustalonego pola temperatur w symetrycznej płycie grzejnej za pomocą analogii elektrolitycznej - praca dyplomowa wykonana w Katedrze Energetyki Ciepłej Pol. Śl. 1965.
- [4] KIEBAŁA A., RÓŻYCKI J.: Badania modelowe ustalonego pola temperatur w narożach - praca dyplomowa wykonana w Katedrze Energetyki Ciepłej Pol. Śl. 1968.
- [5] MADEJSKI J.: Teoria wymiany ciepła PWN Warszawa 1963.
- [6] PAKLEZA J.: O pewnej metodzie badania przestrzennego rozkładu temperatur w łopatkach turbin gazowych - praca doktorska, Pol. Warszawska 1965.
- [7] SZARGUT J.: Przybliżona metoda wyznaczania ilości przewodzonego ciepła. Gaz Woda Technika Sanitarna nr 5, 1957, str. 174-177.
- [8] SZARGUT J., MIERZWIŃSKI S., GARWOLIŃSKI E.: Obliczanie wydajności betonowych płyt grzejnych. Gaz Woda Technika Sanitarna nr 6, 1957 str. 218-215.
- [9] Praca zbiorowa - Wyznaczanie rozkładu temperatur w wirnikach turbin gazowych i korpusach za pomocą modelu elektrolitycznego. Brown Boveri Mitteilungen Band Nr 5/6 1953.

- [10] WANDRASZ J.: Badania modelowe ustalonego pola temperatury za pomocą wanny elektrolitycznej - referat wygłoszony na Sympozjone PTMS w Szczyrku 1969 r. Materiały str. 96-101.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР  
ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЫ

Р е з ю м е

В статье представлена теория моделирования стационарного поля температур при помощи электролитической ванны. Описывается новый метод моделирования третьего краевого условия.

Приводятся результаты испытаний влияния материала электрода вида электролита и частоты электрического тока на точность результатов моделирования.

В заключительной части статьи представлены результаты моделирования некоторых конкретных объектов (отопительная плита, угловая часть здания).

MODELING OF THE STATIONARY TEMPERATURE FIELD BY MEANS  
OF THE ELECTROLYTIC TANK

S u m m a r y

Theory of modeling of a stationary temperature field by means of the electrolytic tank has been discussed. The new method of modeling of the third edge condition in heat transfer has been presented. There are given the results gained at examination of an influence of electrode material, kind of electrolyte and current frequency. In the final part of the paper, the modeling results of some systems (heating plate, house corner) has been presented.