ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971
Seria: ENERGETYKA z. 39 Nr kol. 310

STANISŁAW JERZY GDULA
Instytut Techniki Cieplnej

O STOSOWANIU RÓWNAŃ GAZU DOSKONAŁEGO DO PRZEPŁYWU IZENTROPOWEGO PARY WODNEJ

Streszczenie. Na podstawie równań (1) i (6) wyznaczono wykładniki izentropy dla przegrzanej pary wodnej. Wykładnik (rys. 1) stosuje się dla związku pomiędzy ciśnieniem i objętością, a wykładnik k (rys. 2) dla związku pomiędzy ciśnieniem i temperaturą. Pokazano jak należy stosować te wykładniki przy opisie przepływu izentropowego pary wodnej za pomocą równań gazu doskonałego.

Przy opisie przybliżonym przemiany adiabatycznej odwracalnej (izentropowej) gazu rzeczywistego za pomocą równań gazu doskonałego stosowany jest powszechnie wykładnik adiabaty określony równaniem [2]

$$\varkappa = -\frac{c_p}{c_v}\frac{v}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T. \tag{1}$$

Jest on współczynnikiem w równaniu różniczkowym adiabaty gazu rzeczywistego

$$\frac{dp}{p} + \varkappa\frac{dv}{v} = 0 \tag{2}$$

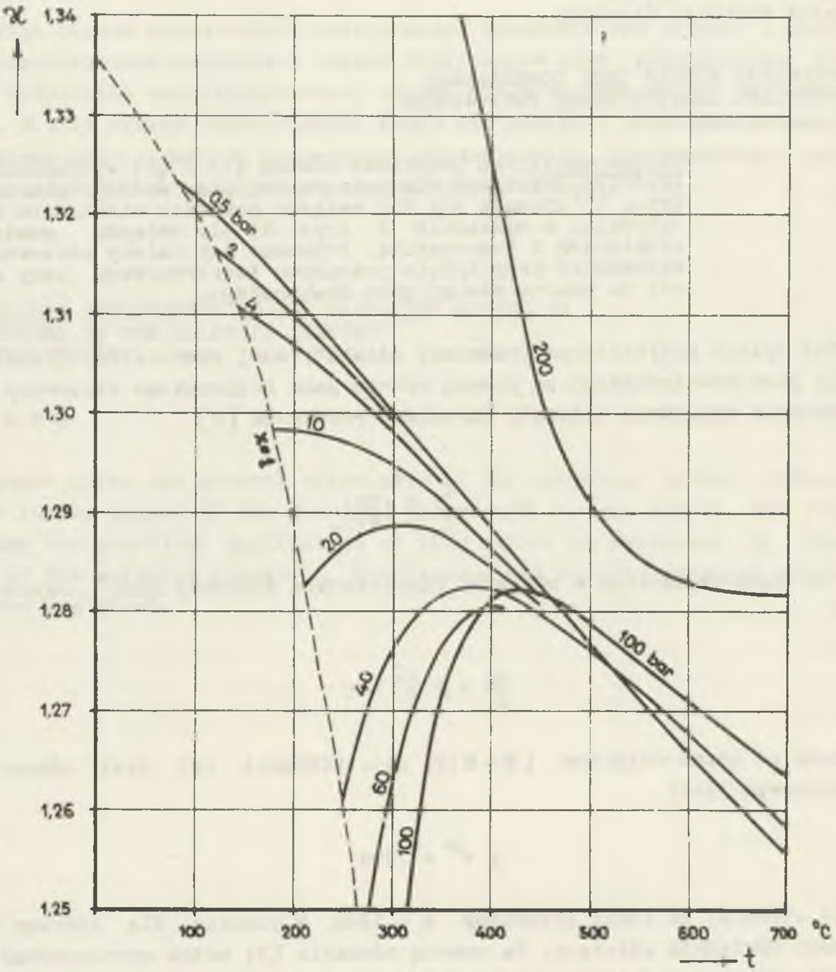
i zależy od stanu czynnika ($\varkappa = \varkappa(T, p)$). Równanie (2) jest równaniem różniczkowym linii

$$p\,v^{\varkappa} = \text{idem}$$

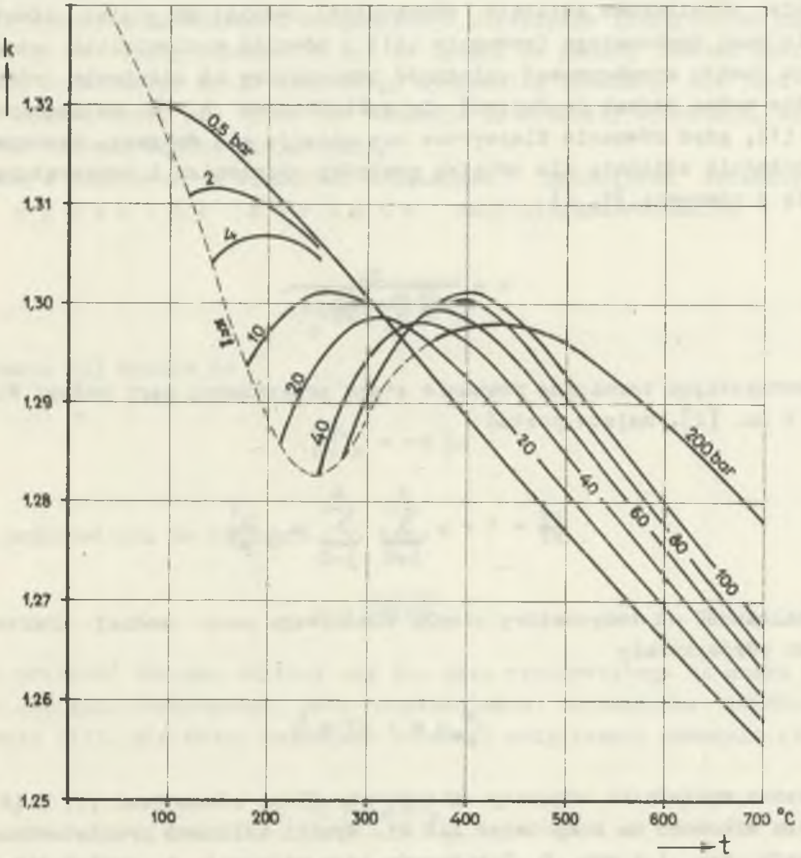
ściśle stycznej do linii przemiany s = idem w punkcie, dla którego wyznaczono wykładnik adiabaty. Za pomocą równania (3) można aproksymować zależność pomiędzy ciśnieniem i objętością właściwą dla przemiany izentropowej gazu rzeczywistego, w niewielkim otoczeniu punktu, dla którego wyznaczono wykładnik $\varkappa$.

W celu znalezienia związku pomiędzy ciśnieniem i temperaturą dla izentropy gazu doskonałego kojarzy się równanie (3) z równaniem stanu Clapeyrona, uzyskując

$$T\,p^{\frac{1-k}{k}} = \text{idem},$$



Rys. 1. Wykładnik adiabaty przegrzanej pary wodnej, dla związku pomiędzy ciśnieniem i objętością



Rys. 2. Wykładnik adiabaty przegrzanej pary wodnej, dla związku pomiędzy ciśnieniem i temperaturą

lub w postaci różniczkowej

$$\frac{dT}{T} - \frac{k-1}{k}\frac{dp}{p} = 0, \tag{5}$$

przy czym oczywiście $k = \varkappa$.

Dla gazu rzeczywistego można również przedstawić we współrzędnych p-T równanie różniczkowe adiabaty odwracalnej nadając mu postać identyczną jak dla gazu doskonałego (równanie (5)) i również w niewielkim otoczeniu pewnego punktu aproksymować zależność temperatury od ciśnienia równaniem (4). Nie można jednak posługiwać się wykładnikiem $k = \varkappa$ obliczonym z równania (1), gdyż równanie Clapeyrona nie stosuje się do gazu rzeczywistego. Wykładnik adiabaty dla związku pomiędzy ciśnieniem i temperaturą oblicza się z równania [1, 4]

$$k = \frac{1}{1 - \frac{p}{c_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p}. \tag{6}$$

Wykorzystując termiczne równanie stanu przegrzanej pary wodnej Wukałowicza i in. [2], mające postać

$$\frac{pv}{RT} = 1 + p\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{8} a_{ij}\frac{p^i}{T^j} \tag{7}$$

oraz zależność od temperatury ciepła właściwego pary wodnej traktowanej jak gaz półdoskonały

$$c_p^* = a + bT + \frac{c}{T} \tag{8}$$

wyznaczono wykładniki adiabaty $\varkappa$ i k określone równaniami (1) i (6). Obliczenia wykonano na komputerze ZAM 41. Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach, rys. 1 i rys. 2. Z wykresów jest widoczne, że wykładniki te różnią się od siebie. Różnice są szczególnie duże w pobliżu linii granicznej $x = 1$ i dla wysokich ciśnień. Należy również zauważyć, że w równaniu (4) operuje się nie wykładnikiem k, lecz wykładnikiem $(k-1)/k$. Wykładnik ten jest o jeden rząd mniejszy, a więc względny błąd jego wyznaczenia jest o jeden rząd większy.

Wybór odpowiedniego wykładnika adiabaty w przypadku znajdywania związków pomiędzy parametrami początkowymi i końcowymi przemiany izentropowej gazu rzeczywistego za pomocą równań gazu doskonałego, nie budzi żadnych wątpliwości. Ponieważ wykładnik zależy od stanu czynnika, pozostaje kwestia wyboru stanu. Narzuca się tu następujące rozwiązanie: obliczenia wykonuje się za pomocą wykładnika wyznaczonego dla znanego stanu początkowego,a po obliczeniu brakującego parametru końcowego obliczenia powtarza się przy użyciu średniego wykładnika dla stanu początkowego i końcowego,wyznaczonego jako średnia arytmetyczna wykładników lub jako wykładnik obliczony dla średnich parametrów.

Przy wykonywaniu obliczeń związanych z przepływem izentropowym gazu rzeczywistego w dyszy Bendemanna lub de Lavala za pomocą równań słusznych dla gazu doskonałego wybór właściwego wykładnika adiabaty nie jest oczywisty. Budowa wzoru nie tylko nie wskazuje na właściwy wykładnik, ale może nawet nasuwać błędne skojarzenia.

Jedną z podstawowych wielkości związanych z przepływem adiabatycznym jest p r ę d k o ś ć d ź w i ę k u zdefiniowana równaniem

$$a = \sqrt{-v^2\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s}. \tag{9}$$

Z równania (2) wynika że

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = -\varkappa \frac{p}{v},$$

co po podstawieniu do równania (9) daje

$$a = \sqrt{\varkappa p v}. \tag{10}$$

A więc prędkość dźwięku oblicza się dla gazu rzeczywistego ze wzoru takiego jak dla gazu doskonałego, przy uwzględnieniu wykładnika adiabaty $\varkappa$ (równanie (1)). Nie wolno natomiast stosować modyfikacji równania (10)

$$a \neq \sqrt{\varkappa R T},$$

gdyż dla gazu rzeczywistego nie obowiązuje równanie Clapeyrona.

Przy wyznaczaniu k r y t y c z n e g o s t o s u n k u c i ś n i e ń β, będącego stosunkiem ciśnienia w przekroju minimalnym dyszy p_m do ciśnienia spoczynkowego p_o, przy maksymalnym przepływie izentropowym, oblicza się strumień masy w przekroju minimalnym A_m z równania ciągłości

$$\dot{m} = \frac{A_m w_m}{v_m},$$

a następnie przyrównuje się do zera jego pochodną względem stosunku ciśnień p_m/p_o. Prędkość w_m oblicza się z całkowania równania

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = - v\, dp$$

przy wykorzystaniu związku pomiędzy p i v takiego, jak dla gazu doskonałego (równanie (3))

$$p\, v^{\varkappa} = p_o v_o^{\varkappa}, \tag{3a}$$

otrzymując

$$w_m = \sqrt{2\, \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, p_o v_o \left[1 - \left(\frac{p_m}{p_o}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}. \tag{11}$$

Z równania (3a) otrzymuje się również objętość właściwą v_m w przekroju minimalnym. Ostatecznie

$$\dot{m} = A_m\, \psi_s \sqrt{\frac{p_o}{v_o}}, \tag{12}$$

gdzie l i c z b a p r z e p ł y w u jest określona równaniem

$$\psi_s = \sqrt{2\, \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{p_m}{p_o}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p_m}{p_o}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}. \tag{13}$$

A więc do obliczenia liczby przepływu ψ_s należy stosować wykładnik $\varkappa$. Pobieżna analiza wzoru (11) mogłaby nasuwać błędne skojarzenie, że w wyrażeniu stojącym w nawiasie, odpowiadającym stosunkowi temperatur, należy stosować wykładnik k dla związku pomiędzy ciśnieniem i temperaturą.

Użycie wykładnika $\varkappa$ w równaniu (13) narzuca również użycie go we wzorze na krytyczny stosunek ciśnień

$$\beta = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

K r y t y c z n y s t o s u n e k t e m p e r a t u r znajduje się z równań (14) i (4)

$$\tau = \frac{T_m}{T_o} = \beta^{\frac{k-1}{k}}.$$

Ostatecznie

$$\chi = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa(k-1)}{k(\varkappa-1)}} . \qquad (15)$$

Nie należy natomiast stosować wzoru $\chi = 2/(\varkappa+1)$ lub $\chi = 2/(k+1)$.

Przy projektowaniu dyszy de Lavala przydatny jest również wzór służący do obliczania stopnia rozwarcia dyszy, czyli stosunku przekrojów A_m/A_2 minimalnego i wylotowego) w zależności od stosunku ciśnień p_2/p_o [2]

$$\frac{A_m}{A_2} = \left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \left(\frac{p_2}{p_o}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right)\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_o}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]} . \qquad (16)$$

Wzór ten pozostaje niezmieniony przy stosowaniu go dla gazu rzeczywistego, a wykładnik adiabaty, którego należy w nim używać, jest wykładnikiem dla związku pomiędzy ciśnieniem i objętością.

LITERATURA

[1] Barenbojm A.B., Stiepanowa L.A. - Opredelenije raboty i temperatury końca szatia realnogo gaza. Chołodilnaja technika, 1967 nr 4.

[2] Ochęduszko S. - Termodynamika stosowana, WNT 1970 r.

[3] Wukałowicz M.P. i inni - Urawnienije sostojanija pieregretogo wodianogo para. Tiepłoenergetika, 1967 nr 5.

[4] Wukałowicz M.P. i inni - Pokazatiel adiabaty dla pieregretogo wodianogo para. Tiepłoenergetika, 1968 nr 10.

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ДЛЯ ИЗОНТРОПИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВОДЯНОГО ПАРА

Р е з ю м е

На основании уравнении (1) и (6) определено показатели изонтропы для перегретого водяного пара. Показатель $\varkappa$ (рис. 1) применяется для отношения между давлением и ёмкостью а показатель к (рис. 2) для отношения между давлением и температурой. Указывается, как следует применять эти показатели при описании изонтропического течения водяного пара с помощью уравнений идеального газа.

ABOUT USING THE EQUATIONS OF PERFECT GAS FOR THE ISENTROPIC FLOW OF STEAM

S u m m a r y

On the base of the equations (1) and (6) there were determined the isentropic exponents for the superheated steam. The $\varkappa$ exponent (figure 1) is used for the relation between preasure and volume, and the k exponent (figure 2) for the relation between preasure and temperature.

It was demonstrated how to use these exponents with description of the isentropic flow of steam by means of the equations of perfect gas.