ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: ENERGETYKA z. 39 Nr kol. 310

JAN SZARGUT
Instytut Techniki Cieplnej

BOHDAN MOCHNACKI
Instytut Matematyki

ZASTOSOWANIE METODY RÓŻNICOWEJ DO OBLICZEŃ NIESTACJONARNEGO POLA TEMPERATUR W CIEKŁYM OŚRODKU

Streszczenie. Przy obliczaniu niestacjonarnego pola temperatur w ciekłym ośrodku charakteryzującym się dużą lepkością i dużą wartością współczynnika skurczu objętościowego (np. w ciekłych metalach) zastosowanie metody różnicowej w klasycznej postaci jest niemożliwe, gdyż nie można pominąć ruchu rozpatrywanej substancji wywołanego zmianą objętości właściwej. W pracy omówiono sposób obliczania odpowiednich poprawek temperatury oraz przedstawiono model różnicowy potencjalnego przepływu cieczy w badanym obszarze.

1. Metoda bilansów różnicowych dla fazy stałej

Metoda bilansów różnicowych polega na zastąpieniu procesu ciągłego procesem zmian skokowych. W klasycznej postaci [1] metoda ta, nazywana też od nazwiska jej twórcy metodą Waniczewa, służy do obliczeń niestacjonarnego pola temperatur w objętości ciała stałego, przy zadanych warunkach początkowych i brzegowych przepływu ciepła. Badany obszar dzieli się na pod obszary (elementy objętości) za pomocą skończonej ilości powierzchni lub w przypadku zadania dwuwymiarowego za pomocą krzywych regularnych. Dla każdego z wyodrębnionych w ten sposób n elementów układa się bilans energii, otrzymując bezpośredni związek charakteryzujący nowy stan na podstawie wartości uprzednio określonych.

Wymiary liniowe elementów oraz wielkości interwału czasu $\Delta\tau$ powinny być takie, aby dopuszczały przyjęcie następujących założeń:

1. Powierzchnie izotermiczne w granicach danego elementu są równoległe i równo oddalone.
2. Wielkość średniego strumienia cieplnego przepływającego w interwale czasu $\Delta\tau$ przez powierzchnię ograniczającą jest proporcjonalna do początkowego lub końcowego gradientu temperatury w tym interwale.
3. Przyrost entalpii elementu jest proporcjonalny do przyrostu temperatury w centralnym punkcie - węźle.
4. Parametry termofizyczne pozostają w interwale $\Delta\tau$ niezmienne i równe wartościom początkowym.

Przy powyższych założeniach bilans energii dla elementu ΔV_i, otaczającego węzeł P_i jest określony związkiem (rys. 1):

$$\Delta I_i = \sum_{j=1}^{6} Q_{ij} \tag{1}$$

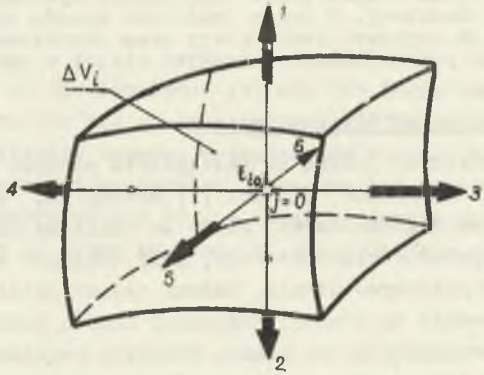
gdzie:

ΔI_i - przyrost entalpii elementu przestrzennego w czasie $\Delta\tau$

Q_{ij} - ilość ciepła dopływającego przez powierzchnię boczną elementu z kierunku j w czasie $\Delta\tau$

i - indeks elementu objętości, $i = 0,1 \ldots n$,

j - oznacza kierunek, $j = 0,1 \ldots 6$.



Rys. 1. Element różnicowy przy obliczaniu przepływu ciepła

Ilość doprowadzonego ciepła określa równanie:

$$Q_{ij} = \frac{t_{ij} - t_{i0}}{R_{ij}(t)} \Delta\tau \tag{2}$$

Przyrost zaś entalpii wynosi:

$$\Delta I_i = c_p(t_{i0})\,\gamma(t_{i0})\;\Delta V_i(\bar{t}_{i0} - t_{i0}) \tag{3}$$

gdzie:

c_p, γ - rzeczywista właściwa pojemność cieplna i gęstość masy,

R_{ij} - opór cieplny w kierunku j, dotyczący strumienia ciepła przepływającego przez pole ΔS_{ij} powierzchni ograniczającej element ΔV_i w kierunku j, symbol t oznacza, że argumentami funkcji R_{ij} są temperatury t_{i0} oraz t_{ij},

t_{i0}, $\bar{t}_{i0}$ - temperatura w rozpatrywanym węźle na początku interwału czasu $\Delta\tau$ i na jego końcu,

t_{ij} - temperatury węzłów sąsiednich na początku rozpatrywanego interwału czasu $\Delta\tau$

Do równania (3) wprowadzono rzeczywistą pojemność cieplną w temperaturze t_{i0} w miejsce pojemności cieplnej średniej dla zakresu t_{i0}, $\bar{t}_{i0}$. Przyrost bowiem temperatury $\bar{t}_{i0}-t_{i0}$ jest mały i wywołuje małą zmianę właściwej pojemności cieplnej.

Temperaturę $\bar{t}_{i0}$ określa więc związek:

$$\bar{t}_{i0} = \sum_{j=0}^{6} a_{ij}\, t_{ij}\Delta\tau \tag{4}$$

W zależności (4) współczynniki a_{ij} wynoszą:

$$a_{ij} = \left[c_p(t_{i0})\,\gamma(t_{i0})\,\Delta V_i\, R_{ij}(t)\right]^{-1}; \quad j > 0 \tag{5}$$

$$a_{i0} = \frac{1}{\Delta\tau} - \sum_{j=1}^{6} a_{ij} \tag{6}$$

Wielkość krytycznego interwału czasowego dla danej klatki określa zależność:

$$\Delta\tau_k = \frac{1}{\sum_{j=1}^{6} a_{ij}} \tag{7}$$

Przyjęcie większej wartości $\Delta\tau$ daje rozwiązanie niestabilne.

2. Metoda bilansów różnicowych dla fazy ciekłej

W wielu zagadnieniach z dziedziny nieustalonego przepływu ciepła, wyłania się problem obliczenia pola temperatur w przestrzeni wypełnionej cieczą o dużej lepkości [2]. Zastosowanie klasycznej metody bilansów dla takiego przypadku nie jest możliwe, gdyż metoda Waniczewa nie uwzględnia

skurczu wynikającego ze zmian temperatury ciekłego ośrodka. Zmiana objętości właściwej cieczy wywołuje przepływ substancji przez powierzchnie ograniczające element, gdyż ciecz dąży do zapełnienia nieciągłości powstałej w wyniku spadku temperatury.

Proponowany przez autorów sposób postępowania polega na zastosowaniu metody superpozycji, czyli rozdzieleniu procesu zachodzącego w interwale czasu $\Delta\tau$ w elementach ΔV_i na etap przepływu ciepła przez przewodzenie i etap przepływu energii ze strumieniem substancji. Przy powyższych założeniach temperatura w węźle P_i po pierwszym etapie procesu określona jest zależnością (4).

Gdyby znane były ilości cieczy przepływające w wyniku skurczu objętościowego przez powierzchnie ograniczające element ΔV_i, to wielkości entalpii przenoszonej przez ciecz można by obliczyć z następujących równań:

$$\delta I_{ij} = c_{pm}\left(\frac{\bar{t}_{ij} + \bar{t}_{i0}}{2}\right) \delta \dot{m}_{ij} \Delta\tau \left(\frac{\bar{t}_{ij} + \bar{t}_{i0}}{2} - \bar{t}_{i0}\right) \tag{8}$$

czyli

$$\delta I_{ij} = c_{pm}(t_j^m) \delta \dot{m}_{ij} \Delta\tau \frac{\bar{t}_{ij} - \bar{t}_{i0}}{2} \tag{9}$$

gdzie:

$\delta \dot{m}_{ij}$ - strumień substancji dopływający do elementu ΔV_i przez powierzchnię ΔS_{ij},

c_{pm} - średnia właściwa pojemność cieplna dla zakresu od $\bar{t}_{i0}$ do t,

t_j^m - średnia arytmetyczna tempeatur $\bar{t}_{i0}$ i $\bar{t}_{ij}$.

Zmiana entalpii elementu ΔV_i wynosi:

$$\Delta I_i' = c_{pm}(\bar{\bar{t}}_{i0})\gamma(\bar{\bar{t}}_{i0})\,(\bar{\bar{t}}_{i0} - \bar{t}_{i0})\,\Delta V_i \tag{10}$$

gdzie $\bar{\bar{t}}_{i0}$ oznacza temperaturę w rozpatrywanym węźle poprawioną przez uwzględnienie przepływu substancji.

Stąd

$$\bar{\bar{t}}_{i0} = \sum_{j=0}^{6} \Delta a_{ij}\, \bar{t}_{ij}\, \Delta\tau \tag{11}$$

gdzie:

$$\Delta a_{ij} = \frac{c_{pm}(t_j^m)\ \delta \dot{m}_{ij}}{2\ c_{pm}(\bar{\bar{t}}_{i0})\ \gamma\ (\bar{\bar{t}}_{i0})\ \Delta V_i} \approx \frac{c_{pm}(t_m^j)\ \delta \dot{m}_{ij}}{2\ c_{pm}(\bar{t}_{i0})\ \bar{\gamma}\ (\bar{t}_{i0})\ \Delta V_i};\ j > 0 \qquad (12)$$

$$\Delta a_{i0} = \frac{1}{\Delta \tau} - \sum_{j=1}^{6} \Delta a_{ij} \qquad (13)$$

Zastosowanie metody superpozycji wymagałoby w zasadzie operacji iteracyjnych, gdyż skurcz inicjujący przepływ substancji jest proporcjonalny do różnicy temperatur $\bar{\bar{t}}_{i0} - t_{i0}$, a nie jak przyjęto do $\bar{t}_{i0} - t_{i0}$. Błąd wynikający z tego uproszczenia jest jednak znikomy.

Kryterium, które ogranicza interwał czasu dla obliczeń poprawek dotyczących przepływu cieczy jest dużo słabsze od zależności określonej równaniem (7). Przyjęcie stałej wartości pojemności cieplnej cieczy w rozpatrywanym przedziale temperatur prowadzi do prostej zależności określającej interwał krytyczny jako iloraz masy początkowej elementu różnicowego przez sumę strumieni substancji dopływających do tego elementu.

3. Model różnicowy przepływu cieczy

Równanie ciągłości dla potencjalnego przepływu cieczy

$$-\frac{1}{\gamma}\ \frac{d\gamma}{d\tau} = \nabla^2 \varphi \qquad (14)$$

jest analogiczne z równaniem Fouriera opisującym niestacjonarne pole temperatur w obszarze Ω, przy czym rolę temperatury przejmuje potencjał pola prędkości φ. Wynika stąd, że równania różnicowe bilansów substancji można tworzyć podobnie jak równania bilansów energii. Podobnie jak różnica temperatur determinuję przepływ ciepła między węzłami siatki, tak różnica potencjałów reguluje przepływ substancji między sąsiednimi klatkami. Równanie (14) można zastosować, jeżeli w cieczy nie występują prądy konwekcyjne. Dlatego przyjęto, że rozpatrywaną ciecz cechuje duża lepkość.

Dla elementu ΔV_i równanie bilansu substancji przyjmie postać:

$$\Delta m_i = \sum_{i=1}^{6} \delta \dot{m}_{ij}\ \Delta \tau \qquad (15)$$

gdzie

$$\Delta m_i = \Delta V_i(\bar{\gamma}_{i0} - \gamma_{i0}) \tag{16}$$

jest przyrostem masy cieczy w elementcie V_i
zaś

$$\delta \dot{m}_{ij} = \delta \dot{V}_{ij} \frac{\gamma_{i0} + \gamma_{ij}}{2} = \delta \dot{V}_{ij} \gamma^m_{ij} \tag{17}$$

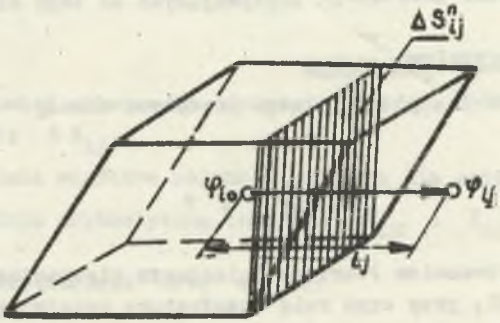
Strumienie objętościowe cieczy $\delta \dot{V}_{ij}$ dopływające do elementu ΔV_i wynoszą:

$$\delta \dot{V}_{ij} = \frac{\varphi_{ij} - \varphi_{i0}}{L_j} \Delta S^n_{ij} \tag{18}$$

gdzie:

L_j - odległość między węzłami siatki w kierunku j,

ΔS^n_{ij} - rzut pola ΔS_{ij} na płaszczyznę prostopadłą do kierunku L_j.



Rys. 2. Element różnicowy przy obliczaniu przepływu cieczy

Ponieważ $\frac{\Delta \varphi}{L_j}$ jest średnią prędkością strumienia cieczy w danym kierunku, więc ostatnie równanie jest wyrazem znanego prawa o strumieniu substancji przepływającym przez powierzchnię normalną do kierunku strugi.

Dla elementów objętości, których powierzchnie ΔS_{i1} tworzą górną granicę obszaru w równaniu bilansu (15), wystąpi dodatkowo składnik

$$\Delta m'_i = \Delta S^n_{i1} \gamma_{i0} \Delta h \tag{19}$$

gdzie:

Δh - obniżenie poziomu cieczy spowodowane sumarycznym skurczem substancji.

Składnik ten jest wyrazem prawa zachowania ilości substancji. Ze spadkiem temperatury masa elementów wnętrza obszaru rośnie, czego wynikiem jest ubytek cieczy w klatkach górnych w takiej ilości, aby łączna masa we wszystkich elementach była stała

$$\sum_{i=0}^{n} \Delta m_i = 0 \tag{20}$$

Obliczenie pola potencjałów, a w dalszej kolejności strumieni $\delta \dot{V}_{ij}$, wymaga więc rozwiązania układu równań:

$$\begin{aligned} \Delta m_i &= \sum_{j=0}^{6} b_{ij} \Delta \tau \varphi_{ij}; \quad i = 0,1 \ldots n_1 \\ \Delta m_i &= \sum_{j=0}^{6} b_{ij} \Delta \tau \varphi_{ij} + \Delta m_i'; \quad i = n_1 \ldots n \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie

$n_1 \ldots n$ - indeksy elementów tworzących górne ograniczenie obszaru.

W równaniach (21):

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \frac{\Delta S_{ij}^{n}}{L_j} \gamma_{ij}^{m} \qquad \text{dla } j > 0 \\ b_{i0} &= - \sum_{j=1}^{6} b_{ij} \end{aligned} \tag{22}$$

Liniowy układ równań (21), jest jak łatwo wykazać układem nieoznaczonym. Nieskończona ilość rozwiązań tego układu jest ilustracją faktu dowolności przyjęcia poziomu odniesienia dla potencjału.

Przyjęcie wartości potencjału w dowolnie wybranej klatce ΔV_i pozwala obliczyć wartości pozostałych potencjałów (oraz Δh), z kolei obliczyć wielkości $\delta \dot{V}_{ij}$ i współczynniki Δa_{ij} określone wzorami (12) i (13).

LITERATURA

[1] Waniczew A.P. - Priblizennyj mietod rieszenija zadacz tiepłoprowodnosti pri pieriemiennych konstantach. IZW AN SSSR Nr 12 1946.

[2] Mochnacki B. - Model różnicowy stygnięcia wlewka i powstawania jamy skurczowej. Praca doktorska. Gliwice 1969.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ
ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
В ЖИДКОЙ СРЕДЕ ОБЛАДАЮЩЕЙ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Р е з ю м е

При расчетах нестационарного температурного поля в жидкой среде обладающей большой вязкостью и большим коэффициентом теплового расширения(напр. в жидких металлах) необходимо учесть течение жидкости, вызванное изменением удельного объёма. В статье представлен метод расчета поправочных изменений температур, вызванных рассматриваемым явлением и разработан метод конечных разностей для расчета потенциального течения жидкости в рассматриваемом пространстве.

APPLICATION OF THE DIFFERENTIAL METHOD FOR CALCULATION
OF UNSTEADY TEMPERATURE FIELD IN LIQUID
OF A HIGH VISCOSITY

S u m m a r y

At calculation of unsteady temperature field in liquid of a high viscosity and high value of volume shrinkage ratio (e.g. in liquid metals), there is impossible to use the differential method in clasical form, because one cannot neglect the motion of considered substance caused by change of specific volume. The paper discusses the way of calculation of correspondent temperature improvements and presents the differential model of potential flow of liquid in examined space.