ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: ENERGETYKA z. 39 Nr kol. 310

BOHDAN MOCHNACKI
Instytut Matematyki

ZASTOSOWANIE METODY MONTE CARLO DO ZAGADNIEŃ BRZEGOWYCH USTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA W OŚRODKACH O LINIOWEJ ZALEŻNOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA PRZEWODZENIA CIEPŁA OD TEMPERATURY

Streszczenie. W artykule przedstawiono sposób uogólnienia metody Monte Carlo do obliczeń stacjonarnego pola temperatur w ośrodkach charakteryzujących się liniową zmiennością współczynnika przewodzenia ciepła. W oparciu o schemat różnic skończonych wyprowadzono odpowiednie równania dla wnętrza rozpatrywanego obszaru. Przedstawiono sposoby umożliwiające wykorzystanie metody, jeżeli na brzegu obszaru zadane są warunki brzegowe 1 lub 3 rodzaju.

1. Wstęp

Zagadnienia brzegowe oraz zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych stanowią istotną i silnie rozwijającą się dziedzinę zastosowań metody Monte Carlo. Rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej pozwolił bowiem na praktyczne wykorzystanie znanych od kilkudziesięciu lat zależności między rozwiązaniem zadań dla pewnych klas równań różniczkowych a procesami losowymi typu "błądzenia". Szczególną zaletą omawianej metody jest możliwość znajdowania rozwiązania w wybranych punktach, wówczas gdy znajomość wartości funkcji w całym obszarze nie jest potrzebna. Czas uzyskania rozwiązania w punkcie jest funkcją średnicy, kształtu brzegu i różnorodności warunków brzegowych. Zwiększenie rozmiarów geometrycznych przy zachowaniu podobieństwa nie zmienia rozwiązania.

W opublikowanych do tej pory pracach, dotyczących omawianej dziedziny zastosowań metody M-C do obliczeń stacjonarnego pola temperatur w obszarze ciała stałego, zajmowano się najczęściej ośrodkiem izotropowym o niezmiennej wartości współczynnika przewodzenia ciepła. Innymi słowy poszukiwano wartości funkcji spełniającej równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 t = 0 \tag{1}$$

w obszarze Ω oraz spełniającej warunki brzegowe na brzegu Γ obszaru

Rozwiązanie problemów zarówno dla zagadnienia Dirichleta, jak i dla warunków brzegowych 2 i 3 rodzaju przedstawiono wyczerpująco w pracach [1][3][4].

Modele probabilistyczne związane z uogólnionym równaniem przewodzenia w postaci:

$$\nabla(\lambda \nabla t) = 0 \tag{2}$$

omawiane między innymi w pracy [3] i opisane w monografii [1], obejmują jedynie bardzo wąską grupę zagadnień, w których współczynnik przewodzenia jest jawną funkcją współrzędnych punktów obszaru, a nie temperatury (np. ośrodki ortotropowe $\lambda_x \neq \lambda_y$).

W pracy niniejszej przedstawiono możliwości rozszerzenia zastosowań metody M-C do problemów ustalonego przewodzenia ciepła w ośrodku izotropowym charakteryzującym się liniową zmiennością współczynnika przewodzenia ciepła w funkcji temperatury. Taka aproksymacja rzeczywistej zmienności jest dla niezbyt dużych przedziałów temperatur prawie zawsze wystarczająco dokładna i w praktyce często stosowana.

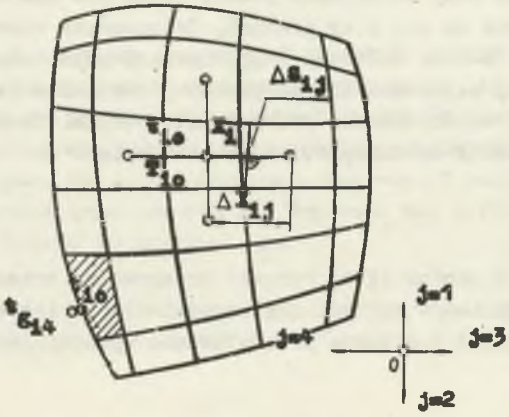
2. Model probabilistyczny zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła przy pierwszym warunku brzegowym

Problem ten sprowadza się do znalezienia rozkładu temperatury w postaci funkcji $t(X)$, $X \in \Omega$ spełniającej równanie (2) oraz warunek brzegowy:

$$t_\Gamma = f(X_\Gamma) \tag{3}$$

Do stworzenia modelu probabilistycznego wykorzystamy znany schemat różnic skończonych.

Obszar Ω dzielimy na skończoną ilość podobszarów otaczających punkty centralne (węzły) podziału różnicowego. Oznaczając indeksem i kolejny nu-



Rys. 1. Podział siatkowy obszaru Ω

mer elementu różnicowego, zaś indeksem j kierunek; $j \in [0,4]$[x] - równanie bilansu dla podobszaru ΔP_i nie leżącego na brzegu, można zapisać w postaci (rys. 1):

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_m(t) \frac{t_{ij} - t_{io}}{\Delta X_{ij}} \Delta S_{ij} = 0 \tag{4}$$

gdzie:

$$\lambda_m(t) = \frac{1}{2}\left[\lambda(t_{ij}) + \lambda(t_{io})\right] \tag{5}$$

jest średnią wartością współczynnika przewodzenia dla przedziału temperatur $t \in [t_{io}, t_{ij}]$,

ΔX_{ij} - odległość między węzłami siatki w kierunku j,

ΔS_{ij} - rzut pola ograniczającego element ΔP_i w kierunku j, na kierunek prostopadły do odcinka łączącego węzły i,j,

t_{io}, t_{ij} - temperatury w węzłach X_{io} i X_{ij}.

Równanie bilansu zapiszmy w postaci:

$$\sum_{j=1}^{4} (\lambda_{io} + \lambda_{ij})(t_{ij} - t_{io})\, \xi_{ij} = 0 \tag{6}$$

gdzie:

$$\lambda_{io} = \lambda(t_{io})$$

$$\xi_{ij} = \frac{\Delta S_{ij}}{\Delta X_{ij}}$$

Po przekształceniach:

$$\lambda_{io} \sum_{j=1}^{4} t_{ij}\, \xi_{ij} - \lambda_{io} t_{io} \sum_{j=1}^{4} \xi_{ij} + \sum_{j=1}^{4} \lambda_{ij} t_{ij}\, \xi_{ij} - t_{io} \sum_{j=1}^{4} \lambda_{ij}\, \xi_{ij} = 0$$

---

x) W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy zagadnienie dwuwymiarowe. Rozszerzeniem metody na zadania przestrzenne nie nastręcza trudności merytorycznych.

Do równania (7) wprowadzimy założoną zależność funkcyjną:

$$\lambda = At + B \tag{8}$$

oraz nowy poziom odniesienia dla temperatury

$$\bar{t} = t + \frac{B}{A} \tag{9}$$

Otrzymamy:

$$A\,\bar{t}_{io} \sum_{j=1}^{4} (\bar{t}_{ij} - \frac{B}{A})\,\xi_{ij} - A\,\bar{t}_{io}(\bar{t}_{io} - \frac{B}{A}) \sum_{j=1}^{4} \xi_{ij} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{4} A\,\bar{t}_{ij}(\bar{t}_{ij} - \frac{B}{A})\,\xi_{ij} - (t_{io} - \frac{B}{A}) \sum_{j=1}^{4} A\,t_{ij}\,\xi_{ij} = 0 \tag{10}$$

Skąd:

$$\bar{t}_{io}^2 = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\,\bar{t}_{ij}^2 \tag{11}$$

gdzie:

$$a_{ij} = \frac{\xi_{ij}}{\sum_{j=1}^{4} \xi_{ij}} \tag{12}$$

Zauważmy, że:

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} = 1 \tag{13}$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$\bar{t}_{ij}^2 = T_{ij} \tag{14}$$

równanie (11) można zapisać w postaci:

$$T_{io} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij}\, T_{ij} = \begin{bmatrix} & a_{i1} & \\ a_{i4} & 0 & a_{i2} \\ & a_{i3} & \end{bmatrix} T_{ij} \tag{15}$$

W równaniu (15) zastosowano zapis symboliczny wprowadzony przez Kunza. Dla węzłów brzegowych bezpośrednio z warunku (3) mamy:

$$T_{io}\Big|_{\Gamma} = \left(t_{io}\Big|_{\Gamma} - \frac{B}{A}\right)^2 = F(X_{\Gamma})_i \tag{16}$$

Tak więc otrzymano model probabilistyczny analogiczny do modelu Yowella. W celu znalezienia wartości oczekiwanej funkcji T_{io} w punkcie X_{io} należy realizować ruch błędny cząstki na płaszczyźnie. Cząsteczka znajdująca się chwilowo w węźle X_{io} przechodzi w elementarnym ruchu do węzła sąsiedniego z prawdopodobieństwem a_{ij} określonym tablicą (15), aby po serii ruchów z prawdopodobieństwem równym jedności znaleźć się na brzegu obszaru Ω, w jednym z punktów $(X_{\Gamma})_i$. Po osiągnięciu brzegu cząstka zostaje pochłonięta. Jeżeli punktowi X_{io} przyporządkowana jest funkcja T_{io} to oczekiwana wartość tej funkcji w węźle X_{io} wynosi:

$$T_{io} = \frac{\sum_{j=1}^{k} m_i\, F(X_{\Gamma})_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i} \tag{17}$$

gdzie:

m_i - ilość trajektorii cząsteczki kończących się w węźle $(X_{\Gamma})_i$,

k - ilość węzłów brzegowych.

Znajomość wartości funkcji T_{io} w węźle X_{io} pozwala bezpośrednio obliczyć rzeczywistą temperaturę w rozpatrywanym punkcie.

3. Trzecie zagadnienie brzegowe

Pomijając w niniejszym artykule model probabilistyczny dla zagadnienia Neumana (II warunek brzegowy), który w istocie swej będzie analogiczny z modelem klasycznym zarówno dla warunków adiabatycznych jak i dla warunku w ogólnej postaci, przejdziemy do omówienia modelu zadania z warun-

kiem brzegowym trzeciego rodzaju. Zagadnienie to sprowadza się do znalezienia wartości funkcji T_{io} w węzłach X_{io} przy warunku na brzegu:

$$-\lambda\frac{\partial t}{\partial n} = \alpha(t - tg) \tag{18}$$

gdzie:

α - współczynnik wnikania ciepła,

tg - temperatura płynu stykającego się z powierzchnią ciała stałego.

Dla elementów różnicowych leżących na brzegu obszaru, równanie bilansu można zapisać w postaci:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_\Gamma}}^{4} \frac{1}{2}(\lambda_{io} + \lambda_{ij})(t_{ij} - t_{io})\,\xi_{ij} + \alpha\sum_{j_\Gamma}(t_{g_{ij}} - t_{io})\,\Delta S_{ij} = 0 \tag{19}$$

Zakładając, dla uproszczenia zapisu, że rozpatrywany element ΔP_i graniczy z otoczeniem powierzchnią ΔS_{i4} (rys. 1) mamy:

$$\sum_{j=1}^{3}(\lambda_{io} + \lambda_{ij})(t_{ij} - t_{io})\,\xi_{ij} + 2\alpha(t_{g_{i4}} - t_{io})\,\Delta S_{i4} = 0 \tag{20}$$

Przekształcając drugi wyraz w równaniu (20) do postaci:

$$2\alpha(t_{g_{i4}} - t_{io})\,\Delta S_{i4} = 2\alpha(\bar{t}_{g_{i4}} - \bar{t}_{io})\,\Delta S_{i4} = \frac{\alpha\,\Delta S_{i4}}{\frac{1}{2}(\bar{t}_{g_{i4}} + \bar{t}_{io})}(\bar{t}^2_{g_{i4}} - \bar{t}^2_{io}) \tag{21}$$

oraz uwzględniając równanie (8) dochodzimy do zależności:

$$\sum_{j=1}^{3}\bar{t}^2_{ij}\xi_{ij} - \bar{t}^2_{io}\sum_{j=1}^{3}\xi_{ij} + \frac{\alpha\,\Delta S_{i4}}{\frac{1}{2}A(\bar{t}_{g_{i4}} + \bar{t}_{io})}(\bar{t}^2_{g_{i4}} - \bar{t}^2_{io}) = 0 \tag{22}$$

Zauważmy, że:

$$\frac{1}{2}A(\bar{t}_{g_{i4}} + \bar{t}_{io}) = \lambda_m(\bar{t}) \tag{23}$$

jest średnią wartością współczynnika przewodzenia ciepła w przedziale temperatur $\bar{t} \in \left[\bar{t}_{io}, \bar{t}_{g_{i4}}\right]$ (temperatury płynu i temperatury powierzchni ciała).

Wartości funkcji T_{io} dla węzłów brzegowych określona jest zależnością

$$T_{io} = \begin{pmatrix} & b_{i1} & \\ b_{i4} & 0 & b_{i2} \\ & b_{i3} & \end{pmatrix} T_{ij} \tag{24}$$

gdzie:

$$b_{ij} = \frac{\xi_{ij}}{\beta_{i4} + \sum_{j=1}^{3} \xi_{ij}} \; ; \quad j < 4 \tag{25}$$

$$b_{i4} = \frac{\beta_{i4}}{g_{i4} + \sum_{j=1}^{3} g_{ij}} \tag{26}$$

gdzie:

$$\beta_{i4} = \frac{\alpha \Delta S_{i4}}{\lambda_m(\bar{t})} \tag{27}$$

Oczywiście:

$$\sum_{j=1}^{4} b_{ij} = 1 \tag{28}$$

Tak więc dla podobszarów graniczących z otoczeniem zmienia się tabela prawdopodobieństw dla kierunków ruchów cząstki, przy czym ich wartości nie są jednoznacznie określone (nie znamy wartości $\lambda_m(\bar{t})$). Zadanie można rozwiązać zakładając:

$$\lambda_m(\bar{t}) = \lambda(\bar{t}_{g_{ij}}) \tag{29}$$

czyli w miejsce wartości średniej przyjąć w równaniu (27) graniczną wartość funkcji w przedziale,
Błąd wynikający z takiego uproszczenia jest znikomy.
Ostatnie stwierdzenie można zilustrować następującym przykładem.
Jeżeli temperatura płynu $t_{g_{ij}}$ wynosi 50°C, zaś temperatura t_{io} powierzchni ciała 200°C, to dla stali węglowej 0,44% $\lambda_m(t) = 45,5 \frac{W}{m\ deg}$, zaś $\lambda(t_{g_{ij}}) = 48,0 \frac{W}{m\ deg}$.

Jeżeli na brzegu obszaru (lub na jego części) występuje warunek brzegowy 3 rodzaju, to do obliczenia wartości oczekiwanej funkcji T_{io} w węźle X_i stosujemy procedurę identyczną jak w przypadku 1 warunku brzegowego. Dla węzłów wewnętrznych rozkład prawdopodobieństw przejść określony jest tablicą (15), zaś dla węzłów brzegowych tablicą (24). W przypadku pochłonięcia cząstki na brzegu w miejsce $F(X_\Gamma)_i$ (równanie (17)) należy kłaść $T_{g_{ij}}$,

czyli

$$F(X_{\Gamma_3})_i = T_{g_{ij}} \tag{30}$$

gdzie:

Γ_3 - brzeg, na którym przepływ ciepła określony jest III warunkiem brzegowym.

Ostatnie równanie należy rozumieć w ten sposób, że zbiorowi węzłowych punktów granicznych przyporządkowujemy zbiór punktów stykających się z węzłami, zaś elementom nowego zbioru odpowiadają wartości temperatur płynu otaczającego brzeg obszaru [3].

LITERATURA

[1] Buslenko N.P., Golenko D.I. - Metoda Monte-Carlo P.B.M. Warszawa 1967.
[2] Hahn G.J., Shapiro S.S. - Statistical Models in Engineering J.W. and S. INC 1967.
[3] Szargut J., Rozewicz J. - Zastosowanie metody M-C... Zeszyty Nauk. Pol. Śl. Energet. Z. 22 1966.
[4] Rozewicz J. - Zastosowanie M-C... Rozprawa habilitacyjna, Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej 180 1967.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ С ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Р е з ю м е

Представлен способ использования метода Монте-Карло для вычисления стационарного температурного поля в телах отличающихся линейной зависимостью коэффициента λ от температуры. При помощи схемы конечных разностей выведены уравнения для рассматриваемого пространства и представлен способ решения задач для граничного условия I и III рода.

UTILIZATION OF MONTE-CARLO METHOD TO BOUNDARY PROBLEMS OF STEADY HEAT CONDUCTION IN THE MEDIUMS WITH THE LINEAR CHANGE OF CONDUCTION COEFFICIENT

S u m m a r y

The paper presents the way of generalization of Monte-Carlo method for calculation of the steady temperature field in the mediums characterized by linear change of heat conduction coeffi - cient. On the base of the scheme of the finite differents there are derived the correspondent equations for the interior of considered area. There are presented the ways enabling an utilization of the method if, at the area border, are given the boundary conditions of the first and third kind.