ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: ENERGETYKA z. 39 Nr kol. 310

STEFAN POSTRZEDNIK
Instytut Techniki Cieplnej

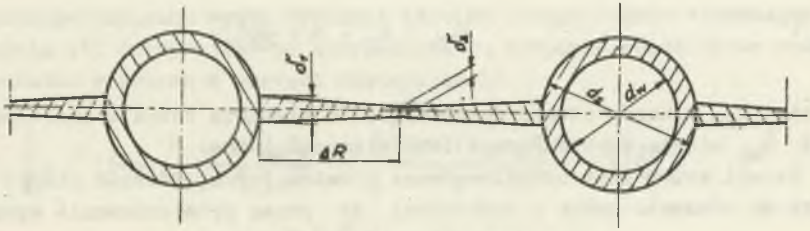
TERMODYNAMICZNA OPTYMALIZACJA GEOMETRII ŻEBRA OPROMIENIOWEGO

Streszczenie. W artykule tym wyznaczono rozkład temperatur w żebrze kołowym, wymieniającym ciepło głównie na drodze promieniowania z otaczającym ośrodkiem. Uzyskane pole temperatur umożliwiło następnie optymalizację geometrii przekroju poprzecznego żebra ze względu na nakłady materiałowe.

1. Wstęp

Celem zwiększenia ilości wymienianego ciepła z otoczeniem stosuje się powierzchnie ożebrowane. W zależności od potrzeb i celu stosowane bywają żebra o różnych kształtach przekroju poprzecznego. Konieczność stosowania żeber (jak to zostanie niżej pokazane) wynika czasem ze względów konstrukcyjnych. Najefektywniejsze żebra posiadają skomplikowany kształt przekroju poprzecznego. Ze względów technologicznych jednakże, żebra wykonywane bywają o przekroju poprzecznym w kształcie klina o określonej zbieżności. Od kształtu żebra, jak i sposobu wymiany ciepła między żebrem a otoczeniem zależy rozkład temperatur w żebrze i intensywność przekazywania ciepła.

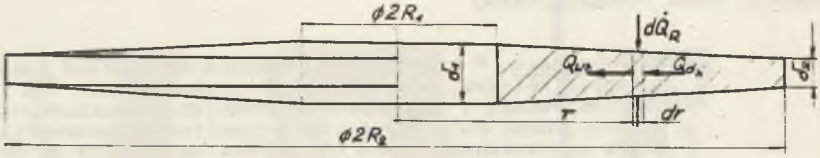
W literaturze można znaleźć wiele rozważań termodynamicznych nad efektywnością żeber dla przypadku, kiedy dominującym sposobem wymiany energii jest konwekcja. W praktyce spotyka się przypadki, gdzie dominującym sposobem przekazywania energii jest nie konwekcja lecz promieniowanie. Przykładem może być komora spalania kotła parowego. W komorze takiej rury odparownika - w przypadku potrzeby uzyskania szczelności komory, a także dla zwiększenia intensywności przekazywania ciepła - łączy się żebrami, w pełny ekran. Żebra te biegną wzdłuż rury, na przedłużeniu jej średnicy (rys. 1).



Rys. 1. Model żebra prostoliniowego

Mamy więc do czynienia z żebrem prostoliniowym, o przekroju poprzecznym w kształcie klina, który wymienia ciepło głównie na drodze promieniowania z otaczającym ośrodkiem (spalinami).

Na rys. 2 przedstawiono żebro kołowe, o przekroju poprzecznym w kształcie klina. Model pokazany na rys. 1 jest szczególnym przypadkiem modelu żebra kołowego. Przejście do tego szczególnego przypadku odbywa się za pomocą przejścia do granicy $R_1 \to \infty$, przy zachowaniu skończonej wartości szerokości żebra $\Delta R = R_2 - R_1$.



Rys. 2. Model żebra kołowego

2. Pole temperatur w żebrze

2.1. Równanie różniczkowe rozkładu temperatur

Niżej zostanie wyprowadzone równanie różniczkowe rozkładu temperatur w żebrze opromieniowanym, przy założeniu jednowymiarowego, o symetrii środkowej, pola temperatur w żebrze (w zależności od promienia bieżącego r - rys. 2).

Stosując I zasadę termodynamiki do elementu kołowego żebra o szerokości dr i grubości δ_r (w miejscu r od geometrycznego środka żebra) - można napisać:

$$\dot{Q}_{d\lambda} + d\dot{Q}_R = \dot{Q}_{w\lambda} \tag{1}$$

Ciepło przekazywane wskutek przewodzenia wynosi

$$Q_{d\lambda} = A_{r+dr} \cdot \lambda \cdot \left.\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr} \tag{a}$$

$$Q_{w\lambda} = A_r \cdot \lambda \cdot \left.\frac{dT}{dr}\right)_r$$

gdzie $\dot{Q}_{d\lambda}$ oznacza ciepło dopływające do elementu żebra o szerokości dr, zaś $\dot{Q}_{w\lambda}$ ciepło odpływające z tego elementu żebra.

Jeżeli żebro jest opromieniowane z dwóch stron, wówczas ciepło dopływające do elementu żebra o szerokości dr przez promieniowanie wynosi:

$$d\dot{Q}_R = C\left[T_P^4 - T^4\right] . 4\pi . r . dr \tag{c}$$

Grubość żebra w miejscu r można określić z równania:

$$\delta_r = \delta_1\left[a + \frac{1-a}{\Delta R}(R_2 - r)\right] \tag{d}$$

gdzie: $\Delta R = R_2 - R_1$; $a = \frac{\delta_2}{\delta_1}$. Przekrój żebra wzdłuż okręgu o promieniu r wynosi

$$A_r = 2\pi r\,\delta_r$$

a po uwzględnieniu równania (d)

$$A_r = 2\pi\delta_1\, r\left[a + (1-a)\frac{R_2 - r}{\Delta R}\right] \tag{e}$$

Celem obliczenia wyrazów: A_{r+dr} i $\left.\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$ w równaniu (a), rozwijamy je w szereg Taylora wokół punktu r (szereg ten urywamy po drugim wyrazie) - wtedy:

$$A_{r+dr} = A_r + \left.\frac{dA_r}{dr}\right)_r dr \tag{f}$$

$$\left.\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr} = \left.\frac{dT}{dr}\right)_r + \left.\frac{d^2T}{dr^2}\right)_r dr \tag{g}$$

Z równania (e) otrzymujemy, że przekrój żebra wzdłuż promienia zmienia się według równania:

$$\frac{dA_r}{dr} = 2\pi\delta_1\frac{R_2 - 2r + a(2r - R_1)}{\Delta R} \tag{h}$$

Wykorzystując napisane wyżej równania (a)÷(h) i odpowiednio wstawiając je do równania (1) otrzymujemy po uporządkowaniu równanie różniczkowe rozkładu temperatur w żebrze w postaci następującej:

$$\left[a + (1-a)\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right]\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\left[\frac{(1-a)(R_2 - 2r)}{R_2 - R_1} + a\right]\frac{dT}{dr} +$$

$$+ \frac{2C}{\lambda\delta_1}\left[T_P^4 - T^4\right] = 0 \tag{2}$$

Warunki brzegowe:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right)_{r=R_2} = 0; \quad T\Big)_{r=R_1} = T_1 \tag{3}$$

2.2. Rozkład temperatur w żebrze

Równanie różniczkowe (2) wraz z warunkami brzegowymi (3) jest równaniem nieliniowym; jego rozwiązanie nie da się przedstawić w formie skończonej.

Ponieważ dla rozpatrywanego przypadku temperatura płynu otaczającego żebro T_F jest znacznie wyższa od temperatury żebra T, dlatego też z dobrym przybliżeniem można założyć, że
dla

$$T_F \gg T; \quad T_F^4 - T^4 = \xi T_F^4 \tag{4}$$

gdzie:

ξ - liczba bliska jedności.

Przy założeniu upraszczającym (4), warunkach brzegowych (3) oraz dla λ= idem, rozwiązanie równania różniczkowego (2) przedstawia się następująco:

$$T = T_1 + B\, f(a, w, \varrho) \tag{5}$$

gdzie

$$B = \frac{C\,\xi\,(\Delta R)^2}{\lambda\delta_1}\, T_F^4 \tag{i}$$

$$f(a,w,\varrho) \frac{1}{(1-a)^2}\left\{(1-a)\varrho + \frac{a\left[(1-a)(2w+1)+1\right]}{1+w(1-a)}\left[\ln 1-(1-a)\varrho\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(1+w)^2\,(1-a)^2}{1+w(1-a)} \ln\left[\frac{\varrho}{w}+1\right]\right\} \tag{6}$$

a,w - są bezwymiarowymi wielkościami związanymi z geometrią układu:

$$a = \frac{\delta_2}{\delta_1}; \quad 0 \leqslant a \leqslant 1; \quad w = \frac{R_1}{\Delta R}; \quad w \in (0,\infty); \quad \Delta R = R_2 - R_1;$$

ϱ - jest bezwymiarową współrzędną żebra

$$\varrho = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}; \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 1;$$

Jak widać z równania (5), rozkład bezwzględnych temperatur w żebrze zależy od bezwymiarowych wielkości a, w, ϱ. Całkowity spadek temperatury $\Delta T = T_2 - T_1$ na żebrze można wyznaczyć z równania (5) po podstawieniu w nim $\varrho = 1$, wtedy otrzymujemy:

$$\Delta T = B\, f_1(a, w) \tag{7}$$

gdzie

$$f_1(a,w) = \frac{1}{(1-a)^2}\left\{(1-a) + \frac{a\left[(1-a)(2w+1)+1\right]}{1+w(1-a)} \ln a + \right.$$

$$\left. + \frac{(1+w)^2\,(1-a)^2}{1+w(1-a)} \ln\left(\frac{1+w}{w}\right)\right\} \tag{8}$$

Celem otrzymania równań rozkładu temperatur w żebrze pokazanym na rys. 1 należy przejść do granic przy $w \to \infty$. Dla przypadków granicznych funkcje $f(a,w,\varrho)$ i $f_1(a,w)$ sprowadzają się do następujących postaci:

$$f(0,w,\varrho) = \varrho + (1+w)\ln\left(\frac{\varrho}{w} + 1\right) \tag{6a}$$

$$f(0,\infty,\varrho) = 2\varrho \tag{6b}$$

$$f(a,w,0) = 0 \tag{6c}$$

$$f(a,\infty,\varrho) = \frac{2}{(1-a)^2}\left\{(1-a)\varrho + a\ln\left[1-(1-a)\varrho\right]\right\} \tag{6d}$$

$$f(1,w,\varrho) = -\frac{\varrho^2}{2} - \varrho w + (1+w)^2 \ln\left(\frac{\varrho}{w} + 1\right) \tag{6e}$$

$$f(1,\infty,\varrho) = -\varrho^2 + 2\varrho \tag{6f}$$

$$f_1(0,\infty) = 2 \tag{8a}$$

$$f_1(a,\infty) = \frac{2}{(1-a)^2}\left\{(1-a) + a\ln a\right\} \tag{8b}$$

$$f_1(1,w) = (1+w)^2 \ln\left(\frac{1+w}{w}\right) - w - \frac{1}{2} \tag{8c}$$

$$f_1(1,\infty) = 1 \tag{8d}$$

$$f_1(0,w) = 1 + (1+w)\ln\left(\frac{1+w}{w}\right) \tag{8e}$$

Na podstawie równania (7) i (i) możemy dla każdego opromieniowanego żebra określić pewien parametr (wymiar) charakterystyczny p

$$p = \frac{(\Delta R)^2}{\delta_1}; \qquad p = \frac{\lambda \Delta T}{C \xi f_1(a,w)\, T_F^4} \tag{9}$$

Z równania (9) wynika, iż dla określonej szerokości żebra ΔR i jego grubości u nasady δ_1 wartość parametru p nie ulega zmianie. Parametr p jest wielkością stałą dla danego żebra w zmiennych warunkach wymiany ciepła przez promieniowanie.

Wykorzystując równania (5) i (7) rozkład temperatur w żebrze możemy ująć za pomocą bezwymiarowej temperatury Θ, przyjmującej wartości od $\Theta = 0$ do $\Theta = 1$ odpowiednio dla $\varrho = 0$ do $\varrho = 1$.
Oznaczając:

$$\Theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \tag{10}$$

otrzymujemy:

$$\Theta = F(a,w,\varrho) \tag{11}$$

gdzie:

$$F(a,w,\varrho) = \frac{f(a,w,\varrho)}{f_1(a,w)} \tag{12}$$

Postaci funkcji $F(a,w,\varrho)$ dla przypadków szczególnych łatwo wyznaczyć w oparciu o podane wcześniej szczególne postacie funkdji $f(a,w,\varrho)$ i $f_1(a,w)$.

3. Nakłady materiałowe na żebro

3.1. Geometryczna funkcja nakładów materiałowych na żebro

Masa materiału m [kg] zużyta na wykonanie żebra wynosi

$$m = V\, d \tag{j}$$

gdzie:

d - gęstość materiału kg/m^3,
V - objętość żebra m^3.

Dla określonego materiału, z którego wykonuje się żebro (określonej jego gęstości d), nakłady materiałowe są proporcjonalne do objętości żebra V. Przedmiotem dalszej analizy będzie objętość żebra V.

Objętość żebra V można wyznaczyć z równania:

$$V = \pi (R_2^2 - R_1^2) \frac{\delta_1}{2} (1+a) \tag{k}$$

Miarodajną do określenia efektywnych nakładów materiałowych będzie objętość V_1, tj. objętość żebra odniesiona do jednostki długości obwodu okręgu, którego promień równy jest średniemu promieniowi żebra $R_{śr}$ (przy danej szerokości żebra ΔR). Ponieważ

$$R_{śr} = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad \text{i} \quad V_1 = \frac{V}{2\pi R_{śr}} \tag{1}$$

wobec tego z równań (k) i (1) otrzymujemy:

$$V_1 = (\Delta R) \frac{\delta_1}{2} (1+a)$$

Korzystając z równania (13) i (9) możemy napisać, że:

$$V_1 = K \psi(a,w) \tag{14}$$

gdzie:

$$K = \frac{1}{2} \frac{C \xi T_F^4 (\Delta R)^3}{\lambda (\Delta T)} \tag{15}$$

$$\psi(a,w) = (1+a) f_1(a,w) \tag{16}$$

Jak widać z powyższych równań, nakłady materiałowe na żebro zależą między innymi od bezwymiarowych wielkości a, w związanych z geometrią układu. Funkcja $\psi(a,w)$ jest geometryczną funkcją nakładów materiałowych na żebro.

3.2. Optymalne związki geometryczne żebra opromieniowanego

Geometryczna funkcja nakładów materiałowych na żebro $\psi(a,w)$, dla określonej wartości parametru w, posiada minimum ze względu na wielkości a.

Optymalnej wartości parametru $a = a_w$ (dla zadanego parametru w) odpowiadają z punktu widzenia termodynamicznego minimalne nakłady materiałowe na żebro.

Celem znalezienia zbioru par liczb (a_w, w) należy rozwiązać równanie:

$$\left.\frac{\partial \psi(a,w)}{\partial a}\right)_w = 0 \tag{17}$$

Korzystając z równań (16) i (8) równanie (17) po uporządkowaniu sprowadza się do równania:

$$a^5D_1 + a^4D_2 + a^3D_3 + a^2D_4 + aD_5 + D_6 =$$

$$= \ln(a)\left[a^4D_7 + a^3D_8 + a^2D_9 + aD_{10} + D_{11}\right] \qquad (18)$$

gdzie:

$$D_1 = 2w^2 + w$$

$$D_2 = -4w^2 - 6w + (2w+1)(1+w)^2 \ln(\frac{1+w}{w}) - 1$$

$$D_3 = -4w^2 + 4w - 4(2w+1)(1+w^2 \ln(\frac{1+w}{w}) + 3$$

$$D_4 = 16w^2 + 14w + 6(2w+1)(1+w)^2 \ln(\frac{1+w}{w}) + 1$$

$$D_5 = -14w^2 - 21w - 4(2w+1)(1+w)^2 \ln(\frac{1+w}{w}) - 7$$

$$D_6 = 4w^2 + 8w + (2w+1)(1+w)^2 \ln(\frac{1+w}{w}) + 4$$

$$D_7 = 6w^2 + 4w + 1$$

$$D_8 = -16w^2 - 18w - 4$$

$$D_9 = 12w^2 + 20w + 7$$

$$D_{10} = -2w - 2$$

$$D_{11} = -2w^2 - 4w - 2$$

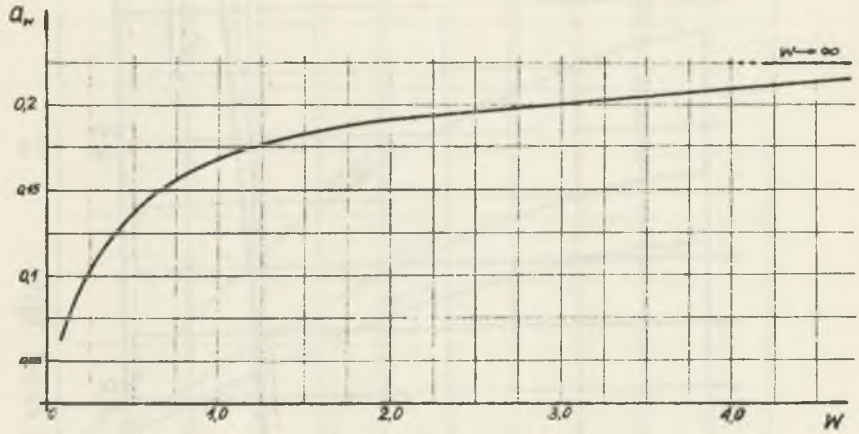
Ze względu na wielkość w, funkcja $\psi(a,w)$ osiąga minimum dla $w \to \infty$.

Równanie (18) spełniają następujące przykładowe pary liczb (a_w, w) - zestawione w tablicy 1.

Tablica 1

w	0,1	1,0	10,0	100,0	1000,0	∞
a_w	0,06454	0,16826	0,21634	0,22293	0,22361	0,22452

Zależność (w, a_w) pokazana jest również na rysunku 3.



Rys. 3. Optymalny parametr żebra a_w

Dalsze rozważania należy prowadzić w połączeniu z równaniem (18) - czyli dla wyznaczanych według równania (18) par liczb (a_w, w).

Wykorzystując równanie (18) - funkcje $f(a,w,\varrho)$, $f_1(a,w)$, $F(a,w,\varrho)$ sprowadzają się do następujących postaci:

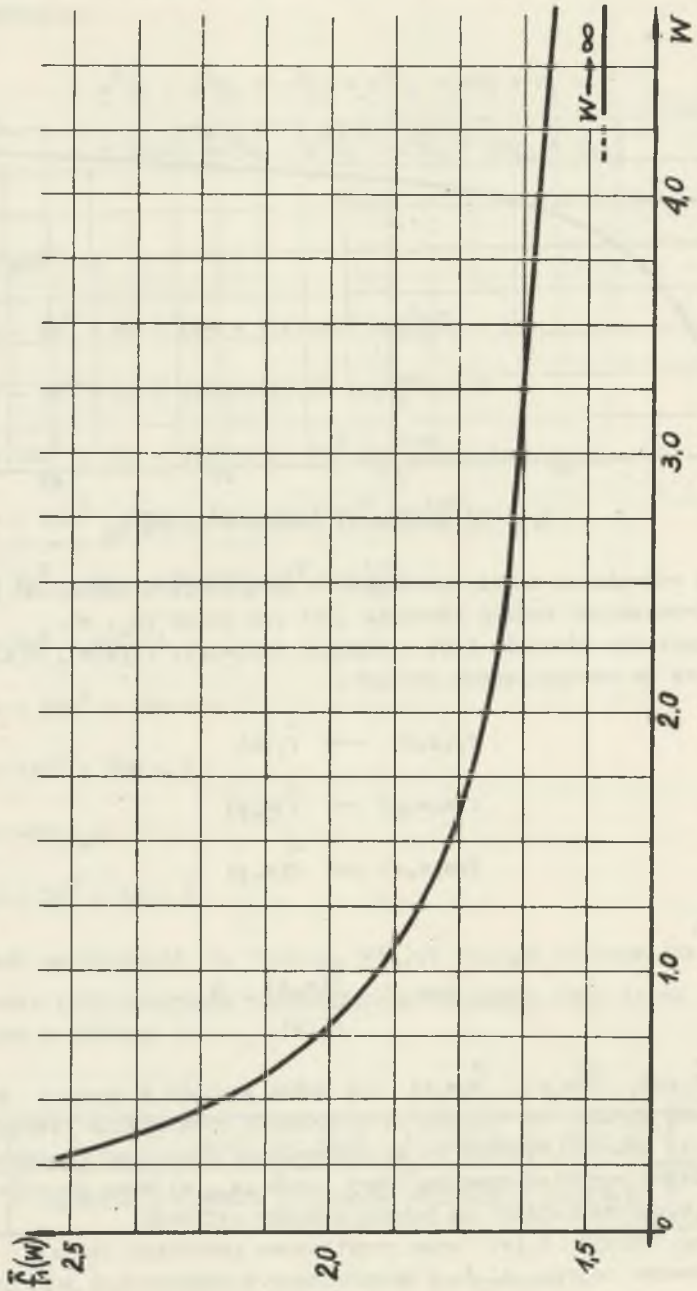
$$
\begin{aligned}
f_1(a,w) &\longrightarrow \bar{f}_1(w) \\
f(a,w,\varrho) &\longrightarrow \bar{f}(w,\varrho) \\
F(a,w,\varrho) &\longrightarrow \bar{F}(w,\varrho)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

przy czym:

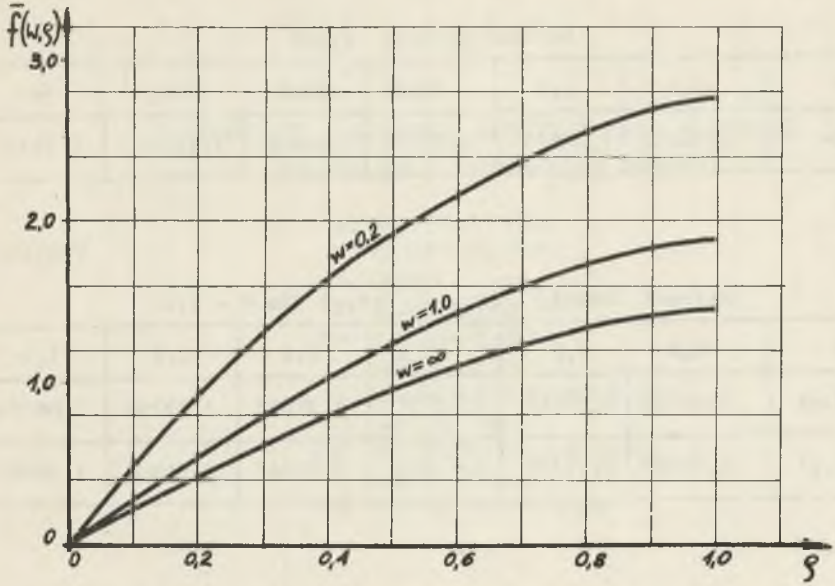
$$\bar{F}(w,\varrho) = \frac{\bar{f}(w,\varrho)}{\bar{f}_1(w)} = \bar{\Theta}$$

Funkcji $\bar{f}_1(w)$, $\bar{f}(w,\varrho)$, $\bar{F}(w,\varrho)$ nie można napisać w postaci analitycznej w sposób wyraźny ze względu na niemożność rozwikłania równania (18) względem a lub w. Funkcje te są optymalnymi funkcjami charakterystycznymi dla żebra opromieniowanego. Pary liczb (a_w, w) oraz funkcje $\bar{f}_1(w)$, $\bar{f}(w,\varrho)$, $\bar{F}(w,\varrho)$ wyznaczono za pomocą maszyny cyfrowej.

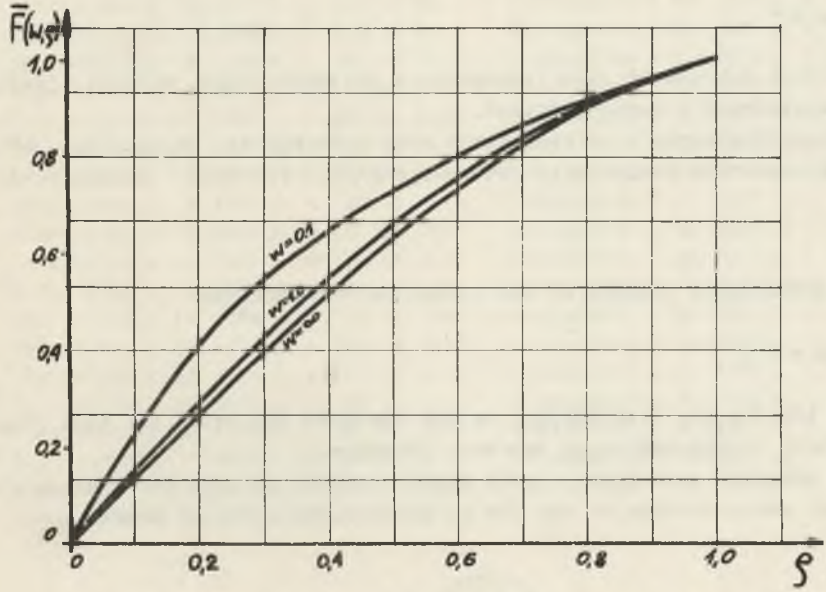
Przebieg funkcji $\bar{f}_1(w)$ oraz przykładowe przebiegi funkcji $\bar{f}(w,\varrho)$ i $\bar{F}(w,\varrho)$ pokazano na rys. 4, 5, 6 oraz podano w tablicach 2 i 3.



Rys. 4. Funkcja charakterystyczna żebra $\bar{f}_1(w)$



Rys. 5. Funkcja rozkładu temperatur w żebrze $\bar{f}(w, \ )$



Rys. 6. Zredukowany profil temperatury w żebrze $\bar{F}(w,\varrho)$

Tablica 2

Wartość funkcji $\bar{f}_1(w)$

W	0,1	1,0	10,0	100,0	1000,0	∞
$\bar{f}_1(w)$	3,32992	1,88879	1,51576	1,46986	1,46516	1,46485

Tablica 3

Wartości funkcji $\bar{f}(w,\varrho)$ i $\bar{F}(w,\varrho)$ dla w = 1,0

ϱ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\bar{f}(w,\varrho)$	0,00000	0,55416	1,02795	1,42693	1,73730	1,88879
$F(w,\varrho)$	0,00000	0,29339	0,54423	0,75547	0,91980	1,00000

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ РЕБРА, ОБМЕНИВАЮЩЕГО ТЕПЛО ИЗЛУЧЕНИЕМ

Р е з ю м е

В статье определено поле температур в дисковом ребре, который обменяет тепло излучением с газовой средой.

Полученое решение поля температур дало возможность определения оптимальной геометрии поперечного сечения ребра по отношению материаловложения.

THE THERMODYNAMIC OPTIMUM OF THE RADIATION FIN GEOMETRY

S u m m a r y

The temperature distribution in the circular fin, with the heat transfer mainly trough radiation has been determined.

The obtained temperature field makes possible to find the optimum geometrical cross-section of the fin on account the material input.