

TADEUSZ CHMIELNIAK

Katedra Kotłów i Maszyn Ciepłych

TEMPERATUROWE PROFILE W LAMINARNEJ WARSTWIE
PRZYŚCIENNEJ PRZY ZMIENNEJ PRĘDKOŚCI ODSYSANIA I INIEKCJI^{x)}

Streszczenie. W oparciu o metodę związków całkowych pędu i energii rozpatrzono rozwiązanie równań laminarnej warstwy przyściennej dla opływu nieizotermicznej ściany płaskiej. Założono ośrodek nieściśliwy oraz zmienną prędkość odsysania i iniekcji. Podano rozwiązanie dla dowolnych wartości liczb Prandtla. Szczegółowo rozpatrzono rozwiązania samopodobne problemu, załączając szereg rezultatów w postaci wykresów.

1. Wstęp

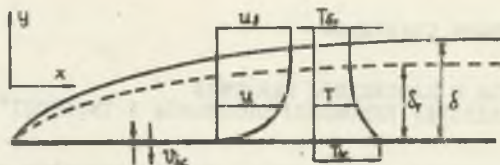
Pierwsze dokładne rozwiązanie laminarnej hydraulicznej warstwy granicznej przy zmiennej prędkości $v_{86}(x)$ dotyczyło przepływu wzdłuż płaskiej ściany i było podane niezależnie przez H. Sohlichtinga i K. Bussmana [7], B. Thwaitesa [8] oraz przez H.W. Emmons i D.C. Leigha [4]. Dokładną dyskusję rozwiązania przybliżonego tego problemu można znaleźć w [6]. Z bardziej interesujących prac dotyczących rozwiązań dla ośrodków nieściśliwych i ściśliwych wymienić należy przede wszystkim [5], [6], [9], Praca [5] podająca najpełniejsze istniejące dotąd dokładne rozwiązanie problemu jak również pozostałe prace dotyczą jedynie wybranej wartości Pr. Wpływ kryterium Prandtla na termiczną warstwę przyścinną w przypadku przepływu wzdłuż ściany izotermicznej przedyskutował w swej pracy [1] Binsel.

W niniejszej pracy podano dyskusję rozwiązania problemu wymiany ciepła dla $v_{86}(x) \neq 0$, $\frac{dp}{dx} = 0$, $\frac{dT_{86}}{dx} \neq 0$ przy użyciu do aproksymacji rozkładu temperatury w warstwie przyściennej wielomianu stopnia szóstego. Jest to pierwsza w dostępnej literaturze próba wykorzystania tego typu rozkładu do otrzymania rezultatów szczegółowych.

^{x)} Artykuł jest streszczeniem jednego z rozdziałów pracy doktorskiej pt.: "Przybliżona analiza przepływu masy i ciepła w laminarnej warstwie przyściennej przy zmiennym gradientie temperatury na ścianie. Promotorem pracy był doc. dr hab. inż. Józef Folwarczny.

2. Określenie hydraulicznej warstwy przyściennej

W punkcie tym będą rozpatrzone jedynie te charakterystyczne wielkości hydraulicznej warstwy przyściennej, które są niezbędne w rozważaniach nad temperaturową warstwą graniczną.



Rys. 1. Laminarny przepływ wzdłuż ściany płaskiej

Po założeniu, że rozpatrywać będziemy nieściśły przepływ wzdłuż ściany płaskiej (rys. 1) równanie pędu w warstwie przyściennej ma postać [3]

$$\frac{d\delta_2}{dx} - \frac{v_{s0}(x)}{u_0} - \frac{\tau_{s0}}{\rho_0 u_0^2} = 0, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$\tau_{s0} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Rozwiązanie (2.1) poszukuje się przyjmując rozkład prędkości w warstwie przyściennej w postaci wielomianu

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{i=0}^m a_i (y/\delta)^i = \sum_{i=0}^m a_i \eta^i \quad (2.3)$$

dla warunków brzegowych:

$$\begin{aligned} \eta=0 & & u/u_0 &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial^2 (u/u_0)}{\partial \eta^2} \right\}_{\eta=0} &= M & \left\{ \frac{\partial u/u_0}{\partial \eta} \right\}_{\eta=0} & \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{array} \quad (2.4)$$

$$\left\{ \frac{\partial^n (u/u_\delta)}{\partial \eta^n} \right\}_{\eta=0} = M \left\{ \frac{\partial^{n-1} (u/u_\delta)}{\partial \eta^{n-1}} \right\}_{\eta=0}$$

$$\eta = 1 \qquad u/u_\delta = 1$$

$$\left\{ \frac{\partial(u/u_\delta)}{\partial \eta} \right\}_{\eta=1} = \left\{ \frac{\partial^2(u/u_\delta)}{\partial \eta^2} \right\}_{\eta=1} \dots = \left\{ \frac{\partial^{m-n}(u/u_\delta)}{\partial \eta^{m-n}} \right\}_{\eta=1} = 0,$$

gdzie parametr M ma sens liczby Reynoldsa zgodnie z równaniem

$$M = \frac{v_{\infty} \delta(x)}{\nu}$$

Warunki (4) tworzą m - równań do określenia niewiadomych współczynników a_1 . Liczba m zależy od wymaganej dokładności obliczeń. W pracy [6] wykazano, że wystarczającym jest przyjęcie $m = 6$. W tym przypadku aproksymacyjne rozwiązanie zagadnienia jest dostatecznie zgodne z rozwiązaniem ścisłym. Przyjmując więc w związkach (2.3) i (2.4) $m = 6$ ($n = 3$) otrzymujemy dla a_1 wyrażenia:

$$\begin{array}{ll} a_0(M) = 0 & a_4(M) = - \frac{15(20+12M + 3M^2)}{A(M)} \\ a_1(M) = \frac{120}{A(M)} & a_5(M) = \frac{12(30+16M+3M^2)}{A(M)} \\ a_2(M) = \frac{60M}{A(M)} & \\ a_3(M) = \frac{20 M^2}{A(M)} & a_6(M) = - \frac{10(12+6M+M^2)}{A(M)}, \end{array} \quad (2.5)$$

$$A(M) = 6P + 12M + M^2. \quad (2.6)$$

Mając określone współczynniki a_1 bez trudu znajduje się wyrażenie dla $\tau_{\delta\delta}$ i δ_2

$$\tau_{\delta\delta} = \mu \left\{ \frac{\partial(u/u_\delta)}{\partial\eta} \right\}_{\eta=0} \frac{u_\delta}{\delta} = \frac{\mu u_\delta}{\delta} a_1(M) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^\delta \frac{u}{u_\delta} \left[1 - \frac{u}{u_\delta} \right] dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_\delta} \left[1 - u/u_\delta \right] d\eta = \\ &= \delta H(M) = \delta \frac{10}{1001 A^2(M)} \left[39400 + 16520 M + \right. \\ &\quad \left. + 2966 M^2 + 250 M^3 + 10 M^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

W dalszych rozważaniach tego punktu zakłada się $M = \text{idem}$. Oznacza to, że przy założeniu $v = \text{idem}$ rozpatrywane będą tylko wartości $v_{\delta\delta}(x) \sim x^{-1}$. Wtedy wielkość $\frac{\delta^2}{\delta} = H(M)$ jest stała (przepływy podobne). Ułatwia to całkowanie równania (2.1). Podstawiając bowiem (2.7) i (2.8) do (2.1) utrzymuje się dla grubości warstwy granicznej $\delta(x)$ proste zwyczajne równanie różniczkowe

$$\frac{d}{dx} \delta^2 = 2 \frac{v(a_1 + M)}{u_\delta H(M)}. \quad (2.9)$$

Skąd po zcałkowaniu otrzymuje się dla $\delta(x)$ wyrażenie

$$\delta(x) = \left[\frac{2v(a_1 + M)}{u_\delta H(M)} x \right]^{1/2}. \quad (2.10)$$

Związek (2.10) został otrzymany przy założeniu stałej wartości parametru M .

Zgodnie z definicją wielkości M , po uwzględnieniu równania (2.10) prędkość $v_{\delta\delta}$ można wyrazić wzorem

$$v_{\delta\delta}(x) = \frac{M v}{\delta(x)} = M v \left[\frac{2v/a_1 + M/x}{u_\delta H(M)} \right]^{-1/2}. \quad (2.11)$$

Wynika stąd abstrakcyjna wielkość $v_{\delta\delta} \rightarrow \infty$ dla $x \rightarrow 0$.

Założenie $M = \text{idem}$ pozwala jednak w stosunkowo prosty sposób otrzymać całą klasę rozwiązań $T/T_0 = f(\text{Pr}, M, \frac{\delta T}{\delta x} \frac{\delta_0}{\delta})$. Rozwiązanie zagadnienia hydraulicznej warstwy przyściennej dla $M = f(x)$ podano i przedyskutowano w [3].

3. Temperaturowa warstwa przyścienna

3.1. Równanie wyjściowe i rozwiązanie ogólne

Równanie całkowe energii całkowitej w warstwie przyściennej [3], które będzie podstawą rozważań w tym punkcie, po uwzględnieniu założeń $\frac{d\rho}{dx} = 0$, $\rho = \text{idem}$, $\mu = \text{idem}$ oraz po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych

$$\Theta = \frac{T - T_{0T}}{T_{s0} - T_{0T}}, \quad \eta_T = y/\delta_T \quad (3.1)$$

zapisać można po elementarnych przekształceniach w postaci:

$$\delta_T \frac{d}{dx} \delta_T \int_0^1 \frac{u}{u_\delta} \Theta \, d\eta_T + \frac{a}{u_\delta} \varepsilon \int_0^1 \frac{u}{u_\delta} \Theta \, d\eta_T - \frac{a}{u_\delta} M_T + \frac{a}{u_\delta} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta_T} \right)_{\eta_T=c} = 0, \quad (3.2)$$

gdzie oznaczają:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

$$\varepsilon = \frac{(T_{s0} - T_{0T})'}{T_{s0} - T} \delta_T^2 \frac{u_\delta}{a} \quad (3.3)$$

$$M_T = \frac{v_{s0} \delta_T}{a} = M \xi(x) \text{Pr} \quad (3.4)$$

$$\xi(x) = \frac{\delta_T(x)}{\delta(x)}. \quad (3.5)$$

Wprowadzenie wyżej oznaczenie M_T jest liczbą Pecleta, będącą funkcją v_{s0} i współrzędnej x . Ze względu na podobną rolę tej liczby do roli liczby Reynoldsa M w rozdziale 2 użyto dla niej analogicznego symbolu.

Rozwiązania równania (13) poszukuje się w podobny sposób jak w przypadku rozwiązywania zagadnienia hydraulicznej warstwy przyściennej, zakładając Θ w postaci paraboli szóstego stopnia

$$\Theta = 1 - \sum_{i=1}^6 b_i \eta_T^i \quad (3.6)$$

Przy wyznaczaniu współczynników b_i rozkładu (3.6) wykorzystuje się warunki [3]:

$$\eta_T = 0 :$$

dla

$$\Theta = 1$$

$$M_T \frac{\partial \Theta}{\partial \eta_T} = \frac{\sigma^2 \Theta}{\eta_T^2}$$

$$\xi \varepsilon \frac{\partial^{11} u_d}{\partial \eta_T} + M_T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta_T^2} = \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \eta_T^3} \quad (3.7)$$

dla $\eta_T = 1$

$$\Theta = 0$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta_T} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta_T^2} = \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \eta_T^3} = 0.$$

Po podstawieniu związków (3.6) do powyższych warunków poszukiwane mnożniki b_i wyraża się za pomocą następujących wzorów:

$$b_1 = \frac{120 + \beta}{\Lambda(M_T)}$$

$$b_2 = \frac{M_T (60 + 1/2\beta)}{\Lambda(M_T)}$$

$$b_3 = \frac{20 M_T^2 - \beta (10 + 2 M_T)}{\Lambda(M_T)}$$

$$\begin{aligned}
 b_4 &= - \frac{15 (20 + 20 M_T + 3 M_T^2) - \beta (20 + 3 M_T)}{A(M_T)} \\
 b_5 &= \frac{12 (30 + 16 M_T + 3 M_T^2) - \beta (15 + 2 M_T)}{A(M_T)} \\
 b_6 &= \frac{10 (12 + 6 M_T + M_T^2) - \beta (4 + 1/2 M_T)}{A(M_T)},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

gdzie:

$$A(M_T) = 60 + 12 M_T + M_T^2$$

$$\beta = \varepsilon \xi a_1(M).$$

Mnożniki b_i , jak to wynika z (3.8) zależne są od parametrów M i ε . M wiąże hydrauliczną i termiczną warstwę przyścienną. Parametr ε określa wpływ zmiennej temperatury ściany na wymianę ciepła. Przyjęty rozkład $\frac{u}{u_\delta}$ w postaci (2.3) może być stosowany z dostateczną dokładnością dla $-4,644 < M < 3$ [1]. Dla tych samych M można stosować więc również rozkład (3.6). Ustalenie przydziału wartości ε , dla którego rozkład (3.6) zapewnia otrzymanie fizycznie uzasadnionych rezultatów jest bardziej utrudnione. Winno się jednak opierać na związkach

$$\theta = 1 - \sum_{i=1}^6 b_i \eta_T^i \leq 1 \tag{I}$$

$$\left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \eta_T} \right\} \neq 0 \quad 0 < \eta_T < 1. \tag{II}$$

Warunek (I) jest oczywisty dla przepływów bez uwzględnienia dyssypacji energii. Warunek (II) uszupełnia (I) i niedopuszcza istnienia ekstremum w nieodmkniętym przedziale $0 < \eta_T < 1$.

Ze względu na postać związku (3.6) ustalenie dopuszczalnych wartości ε dla różnych wartości M jest bardzo czasochłonne. Kilka uwag dotyczących ε_k podano w punkcie zawierającym przykłady obliczeniowe. Wprowadzając do (3.2) oznaczenia

$$K = \int_0^1 \frac{u}{u_\delta} \theta \, d\eta_T \tag{3.9}$$

oraz uwzględniając równość

$$\left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial \eta_T} \right\}_{\eta_T=0} = -b_1$$

utrzymuje się po elementarnych przekształceniach

$$\delta_T^2 K^2 = \frac{2a}{u\delta} \int_0^x K [M_T + b_1 - \varepsilon K] dx. \quad (3.10)$$

Dzieląc (3.10) obustronnie przez (2.10) otrzymuje się wyrażenie

$$\xi^2 K^2 = \frac{H(M)}{\text{Pr}(a_1 + M)x} \int_0^x K [M_T + b_1 - \varepsilon K] dx, \quad (3.11)$$

które może służyć do określenia niewiadomej wielkości $\xi = \delta T / \delta$, jeżeli tylko znana jest zależność funkcji K od ξ . W tym przypadku posługując się metodą kolejnych przybliżeń można dla przyjętej wartości ε dojść do wartości funkcji δ_T . Wielkość $K(x) = \int_0^x \frac{u}{u\delta} \Theta d\eta_T$ poszukuje się dla dwu przypadków:

Przypadek 1: $\xi \leq 1, \delta_T \leq \delta$

Po podstawieniu wzorów (2.2) i (3.6) do (3.9) i wykonaniu wskazanych działań otrzymuje się zależność:

$$K = \sum_{i=1}^6 a_i \xi^i \Phi_i, \quad (3.12)$$

gdzie:

$$\Phi_i = \sum_{m=1}^6 \left(\frac{1}{i+1} - \frac{b_m}{m+1+1} \right). \quad (3.13)$$

Wykorzystując wyrażenie (3.8) współczynniki Φ_i można zapisać w sposób następujący:

$$\Phi_1 = \frac{1}{28A(M_T)} \left[100 + 30 M_T + 3 M_T^2 - \beta (2/3 + 1/20 M_T) \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{1}{126A(M_T)} \left[150 + 48 M_T + 5 M_T^2 - \beta (5/4 + 1/10 M_T) \right] \\ \sigma_3 &= \frac{1}{168A(M_T)} \left[84 + 28 M_T + 3 M_T^2 - \beta (4/5 + 1/15 M_T) \right] \\ \sigma_4 &= \frac{1}{2310A(M_T)} \left[560 + 192 M_T + 21 M_T^2 - \beta (35/6 + 1/2 M_T) \right] \\ \sigma_5 &= \frac{1}{1386A(M_T)} \left[180 + 63 M_T + 7 M_T^2 - \beta (2 + 7/40 M_T) \right] \\ \sigma_6 &= \frac{1}{3003A(M_T)} \left[225 + 20 M_T + 9 M_T^2 - \beta (21/8 + 7/30 M_T) \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Przypadek 2: $\xi \geq 1, \delta_T \geq \delta$

Poszukując w tym przypadku zależności $K(\xi)$ wychodzi się z równości

$$K = \int_0^{1/\xi} \Theta \frac{u}{u_0} d\eta_T + \int_{1/\xi}^1 \Theta d\eta_T. \quad (3.15)$$

Stąd po wykorzystaniu (2.3) i (3.6) oraz scałkowaniu otrzymuje się wzór:

$$K = \varphi_0 - 1/\xi \varphi_1 + \sum_{m=1}^6 \frac{b_m \psi_m}{m+1}, \quad (3.16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1 - \sum_{m=1}^6 \frac{b_m}{m+1} \\ \varphi_1 &= 1 - \sum_{i=1}^6 \frac{a_i}{i+1} \\ \psi_m &= \frac{1}{m+1} - \sum_{i=1}^6 \frac{a_i}{i+1+m}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Liczby φ_0 , φ_1 , ψ_m po wykorzystaniu zależności (2.5) i (3.8) można obliczyć z następujących wzorów:

$$\varphi_0 = 1/7 A (M_T) \left[120 + 32 M_T + 3 M_T^2 - \beta (1/2 + 1/30 M_T) \right]$$

$$\varphi_1 = 1/7 (M) \left[120 + 32 M + 3 M^2 \right]$$

$$\psi_m (M) = \left\{ \varphi_M \right\}_{\beta=0}, M_T = M.$$

3.2. Rozwiązanie równania (3.11) dla $\varepsilon = \text{idem}$

Po założeniu $\varepsilon = \text{idem}$, i $M_T = \text{idem}$ wyrażenie podcałkowe w (3.11) staje się wielkością niezmienną. Po scałkowaniu tego równania i po dalszych przekształceniach otrzymuje się związek

$$\xi K = \frac{M (M_T + b_1 - \varepsilon K)}{M_T (a_1 + M)}. \quad (3.19)$$

Wykorzystując znalezione wcześniej wyrażenia dla b_1 i K związek (3.19) można zastąpić dwoma ekwiwalentnymi równaniami algebraicznymi trzeciego stopnia (dla $\xi \leq 1$ i $\xi \geq 1$), gdy $\xi \leq 1$

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 M_T + \varepsilon_2 M_T^2 + \varepsilon_3 M_T^3 = 0, \quad (3.20)$$

gdzie $\xi \geq 1$

$$x_0 + x_1 M_T + x_2 M_T^2 + x_3 M_T^3 = 0, \quad (3.21)$$

gdzie:

$$\varepsilon_0 = 120 + \varepsilon \xi a_1 - \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 a_1 Z_2,$$

$$\varepsilon_1 = 60 - F \xi (Z_1 - \varepsilon a_1 Z_2) - \varepsilon Z_3 + \varepsilon^2 a_1 Z_4, \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_2 = 12 - F \xi (Z_3 - \varepsilon a_1 Z_4) - \varepsilon Z_5,$$

$$\varepsilon_3 = 1 - F \xi Z_5,$$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \left(\frac{25}{7}\right)a_1 \xi + \left(\frac{25}{21}\right)a_2 \xi^2 + \left(\frac{1}{2}\right)a_3 \xi^3 + \left(\frac{8}{33}\right)a_4 \xi^4 + \\
 &\quad + \left(\frac{10}{77}\right)a_5 \xi^5 + \frac{75}{1001}a_6 \xi^6, \\
 z_2 &= \left(\frac{1}{42}\right)a_1 \xi^2 + \left(\frac{5}{504}\right)a_2 \xi^3 + \left(\frac{1}{210}\right)a_3 \xi^4 + \left(\frac{1}{396}\right)a_4 \xi^5 + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{594}\right)a_5 \xi^6 + \left(\frac{1}{1144}\right)a_6 \xi^7, \\
 z_3 &= \left(\frac{15}{4}\right)a_1 \xi + \left(\frac{8}{21}\right)a_2 \xi^2 + \left(\frac{1}{6}\right)a_3 \xi^3 + \left(\frac{32}{385}\right)a_4 \xi^4 + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{22}\right)a_5 \xi^5 + \left(\frac{20}{3003}\right)a_6 \xi^6, \\
 z_4 &= \left(\frac{1}{560}\right)a_1 \xi^2 + \left(\frac{1}{1260}\right)a_2 \xi^3 + \left(\frac{1}{2520}\right)a_3 \xi^4 + \left(\frac{1}{4620}\right)a_4 \xi^5 + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{7920}\right)a_5 \xi^6 + \left(\frac{1}{12870}\right)a_6 \xi^7, \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_5 &= \left(\frac{3}{28}\right)a_1 \xi + \left(\frac{5}{126}\right)a_2 \xi^2 + \left(\frac{1}{56}\right)a_3 \xi^3 + \left(\frac{1}{110}\right)a_4 \xi^4 + \\
 &\quad + \left(\frac{1}{198}\right)a_5 \xi^5 + \left(\frac{3}{1001}\right)a_6 \xi^6
 \end{aligned}$$

$$r_0 = 120 + \varepsilon \xi a_1 + \varepsilon \beta_1 + a_1 \varepsilon^2 \beta_2$$

$$r_1 = 60 + F \xi (\beta_1 + \varepsilon a_1 \beta_2) + \varepsilon \beta_3 + \varepsilon^2 a_1 \beta_4$$

$$r_2 = 12 + F \xi (\beta_3 + \varepsilon a_1 \beta_4) + \varepsilon \beta_5 \tag{3.24}$$

$$r_3 = 1 + F \xi \beta_5$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= -\frac{120}{7} + 60 \psi_1 \xi^{-1} - 120 \psi_1 \xi^{-2} + 300 \psi_4 \xi^{-5} + \\
 &\quad - 360 \psi_5 \xi^{-6} + 120 \psi_6 \xi^{-7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_2 &= \left(\frac{2}{14}\right) \xi - \psi_1 \xi^{-1} + 10 \psi_3 \xi^{-3} - 20 \psi_4 \xi^{-4} + \\
 &\quad + 15 \psi_5 \xi^{-5} + 4 \psi_6 \xi^{-6} \\
 \beta_3 &= 12 \psi_1 \xi^{-1} - \frac{32}{7} - 60 \psi_2 \xi^{-2} + 180 \psi_4 \xi^{-4} + \\
 &\quad - 192 \psi_5 \xi^{-5} + 60 \psi_6 \xi^{-6} \\
 \beta_4 &= \left(\frac{1}{210}\right) \xi - \left(\frac{1}{2}\right) \psi_2 \xi^{-2} + 2 \psi_3 \xi^{-3} - 3 \psi_4 \xi^{-4} + \\
 &\quad + 2 \psi_5 \xi^{-5} - \left(\frac{1}{2}\right) \psi_6 \xi^{-6} \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_5 &= \psi_1 \xi^{-1} - \frac{3}{7} - 20 \psi_3 \xi^{-3} + 45 \psi_4 \xi^{-4} - 36 \psi_5 \xi^{-5} + \\
 &\quad + 10 \psi_6 \xi^{-6}
 \end{aligned}$$

$$F = \frac{a_1 + M}{M H(M)}. \tag{3.26}$$

Równanie (3.20) posiada jedno rzeczywiste rozwiązanie określone jedną z formuł Cardana [9], jeżeli spełniony jest warunek

$$q^3 + p^3 > 0. \tag{3.27}$$

Rozwiązanie to ma postać

$$Pr = \frac{1}{\xi M} \left[U + V - \frac{\xi_2}{3\xi_3} \right], \tag{3.28}$$

gdzie oznaczono:

$$q = \frac{\xi_2^3}{27 \xi_3} - \frac{\xi_1 \xi_2}{6 \xi_3} + \frac{\xi_0}{2 \xi_3}, \quad p = \frac{3\xi_1 \xi_3 - \xi_2^2}{9 \xi_3} \tag{3.30}$$

$$U = \left[-q + (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.31)$$

$$V = \left[-q - (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3.32)$$

Podobnie zapisać można rozwiązanie równania (3.21)

$$Pr = \frac{1}{8M} \left[Z + t - \frac{x_2}{3x_2} \right] \quad (3.33)$$

Rozwiązanie to jest jedynym rozwiązaniem rzeczywistym przy spełnieniu warunku (3.27). Wielkości q i p w tym przypadku oblicza się odpowiednio z równań (3.29) i (3.30) używając liczb v_1 zamiast liczb g_1 . Tak uzyskane liczby q i p służą do obliczenia wielkości Z i t z równań (3.31) i (3.32).

Do uzyskania konkretnego rozwiązania równania (3.11) dla przypadku, gdy g jest funkcją współrzędnej x najwygodniej jest wykorzystać metodę kolejnych iteracji w małych przedziałach Δx .

Polega ona na założeniu, że w pewnym małym przedziale Δx wszystkie składniki wyrażenia podcałkowego formuły (3.11) można uważać za stałe i równe ich średniej arytmetycznej w przedziale Δx . Np. średnia wartość K w przedziale $x_1 - x_{1-1} = \Delta x_1$ będzie wynosiła

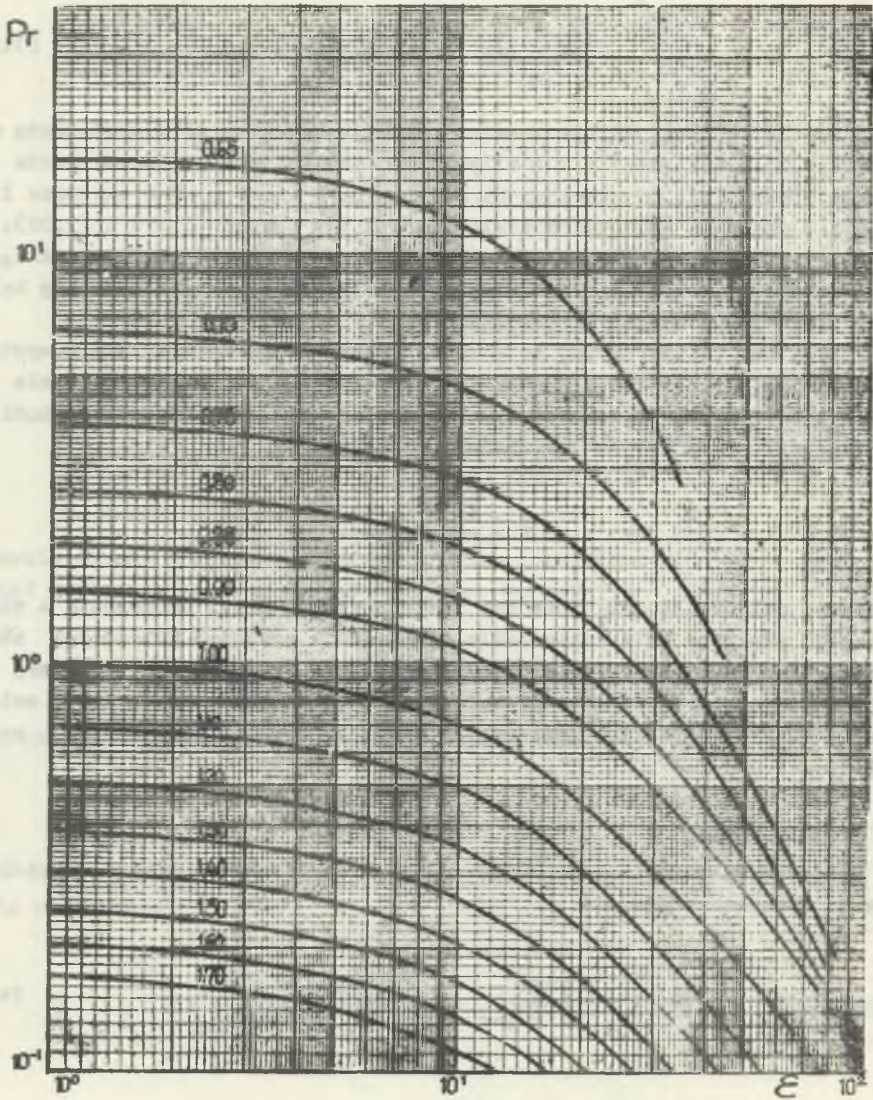
$$\bar{K} = \frac{K_1 + K_{1-1}}{2} \quad .$$

Wielkość przedziału Δx_1 może być zmienna wzdłuż drogi całkowania i winna być taka przyjęta (dla zapewnienia odpowiednio szybkiej zbieżności obliczeń), by różnica badanych w nim wielkości nie przekraczała ustalonej ze względu na wymaganą dokładność wartości. Schemat obliczeń wg tej metody oraz wartości wszystkich koniecznych funkcji pomocniczych zawiera praca [3].

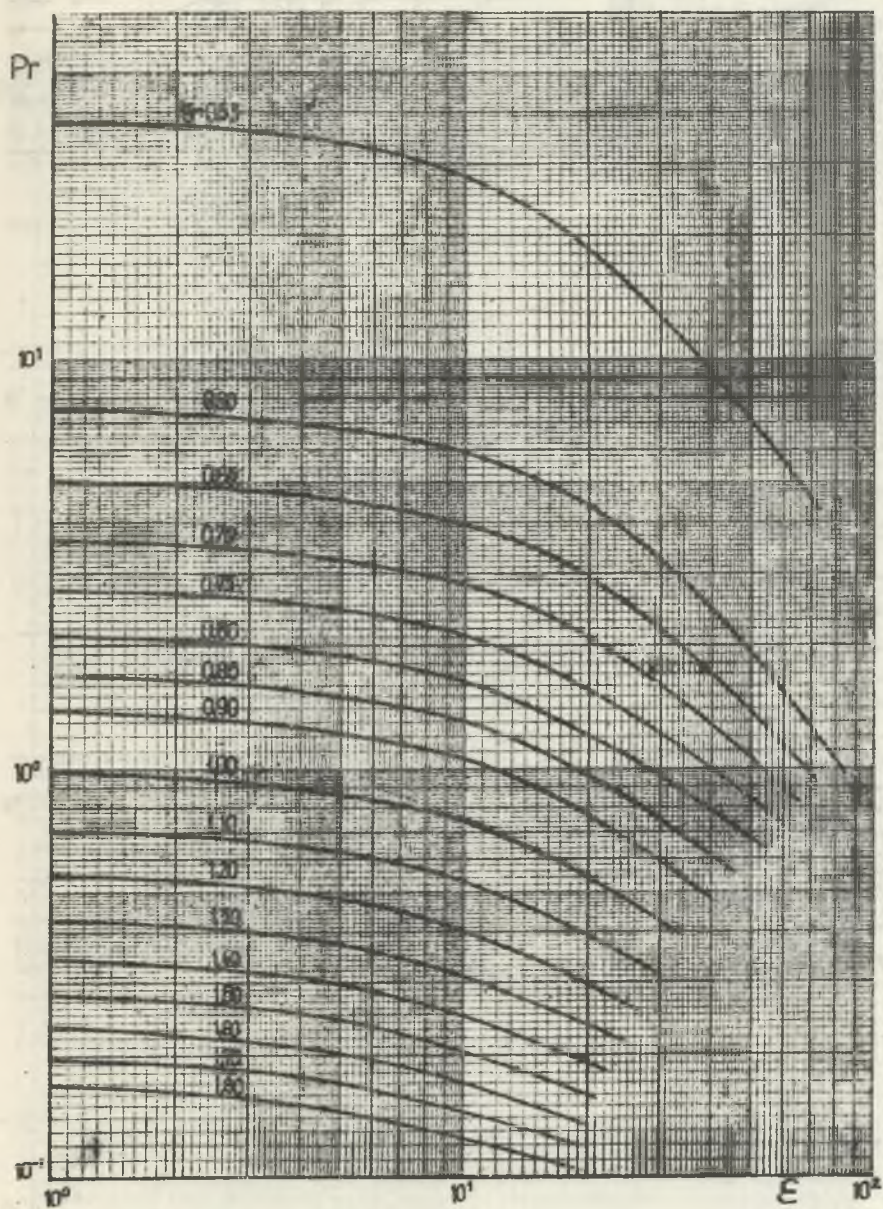
4. Wymiana ciepła

Miejscowy strumień ciepła przewodzonego od ściany do płynu określony prawem Fouriera równa się

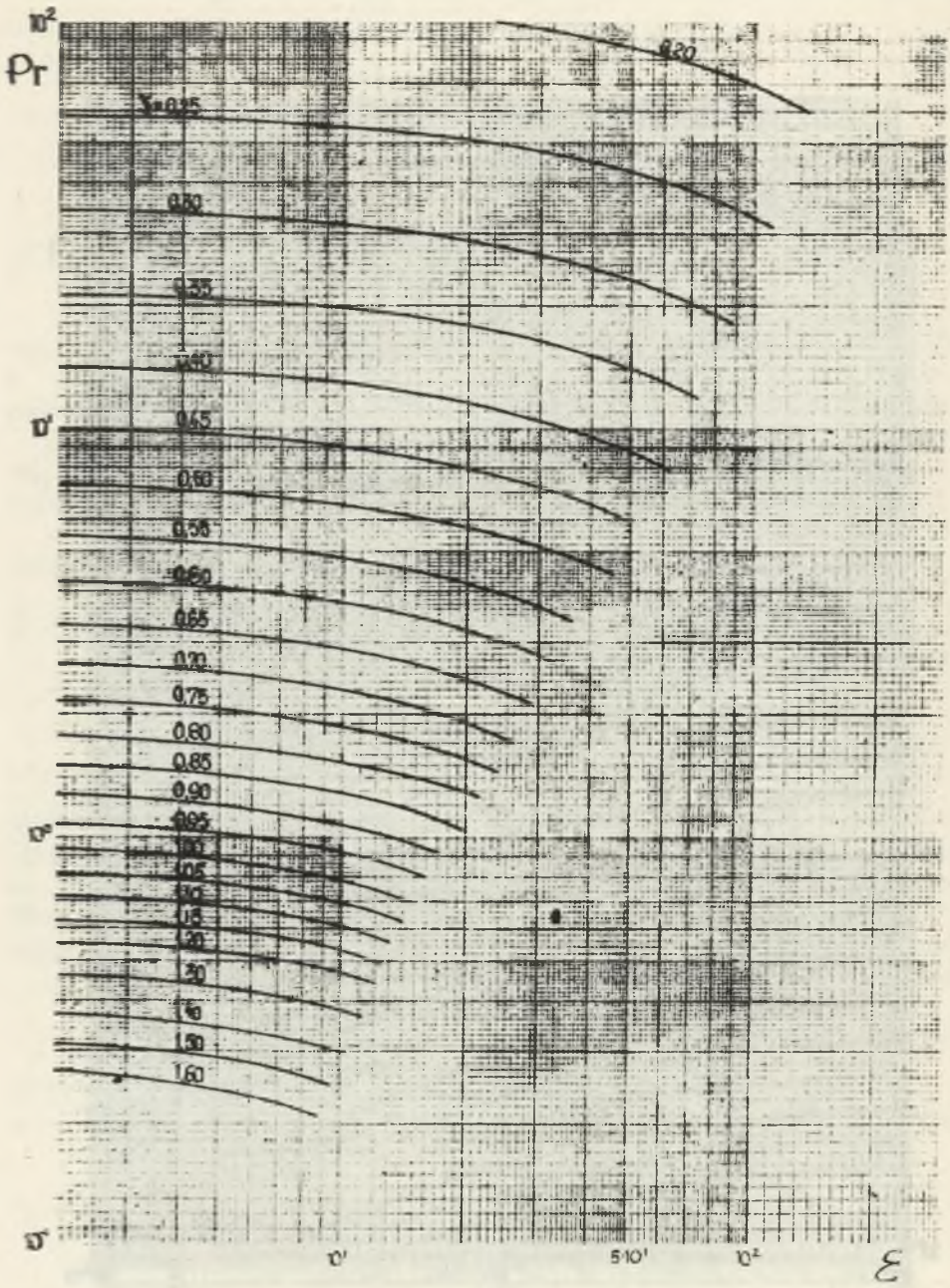
$$q(x) = -\lambda \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} \right\}_{y=0} = \lambda \frac{T_{s0} - T_{0T}}{\delta_T} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\}_{\eta_{T=0}} \quad (4.1)$$



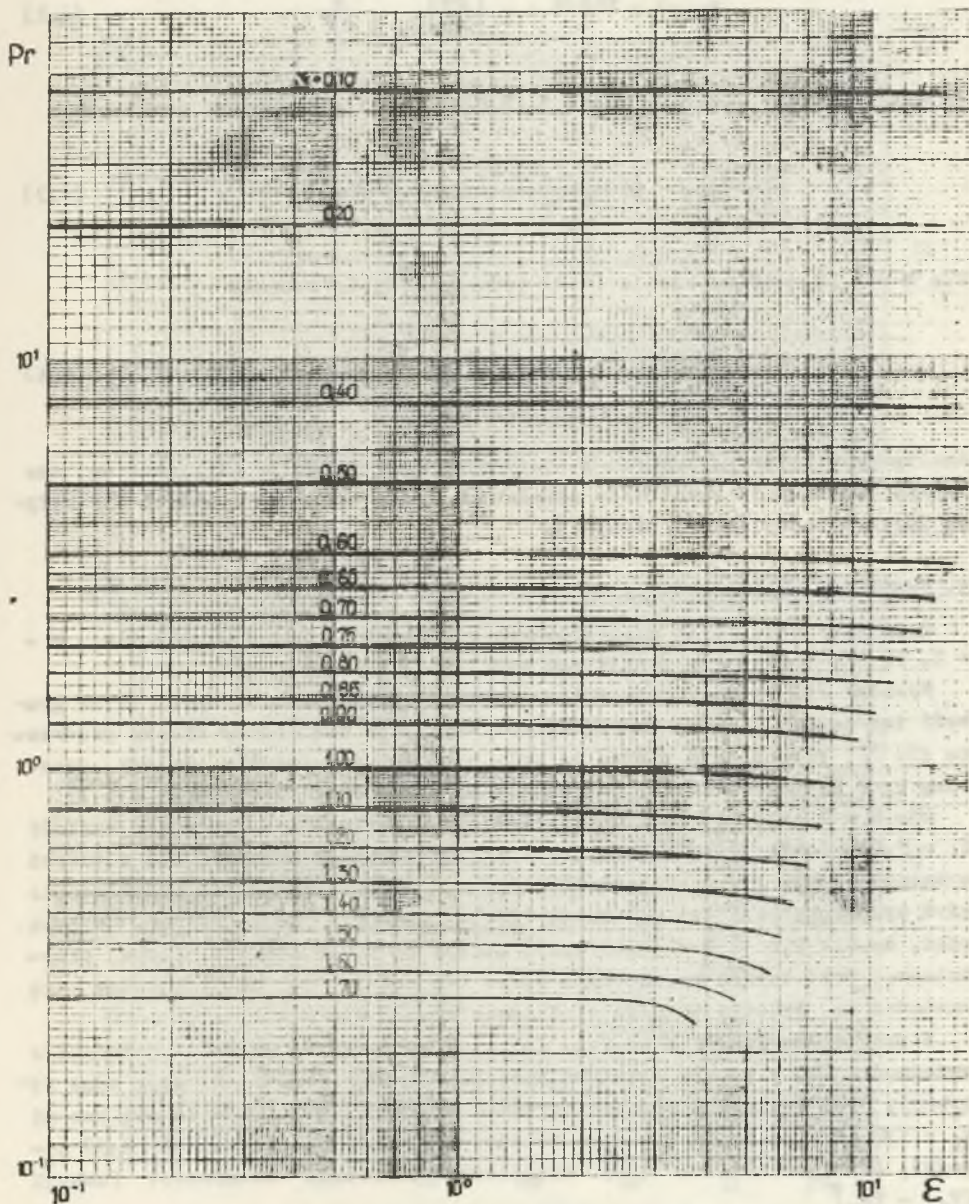
Rys. 2. Funkcja $Pr = f(\epsilon, M)$, $M = 2$



Rys. 3. Funkcja $Pr = f(\xi, \varepsilon)$, $M = 1$



Rys. 4. Funkcje $Pr = f(\xi, \epsilon)$, $M = 0$



Rys. 5. Funkcja $Pr = f(\xi, \epsilon)$, $M = -1$

Porównując (4.1) z ciepłem wnikającym określonym przez prawo Newtona dochodzimy do wartości liczby Nusselta

$$\text{Nu}(x) = \frac{\alpha(x)x}{\lambda} = - \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right\}_{\eta_{T=0}} \frac{x}{\delta \xi} \quad (4.2)$$

Po uwzględnieniu wyrażeń (2.10) i (3.8) z (4.2) otrzymujemy ostatecznie

$$\frac{\text{Nu}(x)}{(\text{Re}_x)^{1/2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{120 + 8 \xi a_1}{A(M_T)} \right) \left(\frac{2 H(M)}{a_1(M) + M} \right)^{1/2} \xi^{-1} \quad (4.3)$$

Dla $M \rightarrow 0$, $M_T \rightarrow 0$ wyrażenie (4.3) redukuje się do związku

$$\frac{\text{Nu}(x)}{(\text{Re}_x)^{1/2}} = [H(0)]^{1/2} (\xi^{-1} + \frac{1}{60} \xi) \quad (4.4)$$

Analiza rezultatów uzyskanych z (4.4) dla $\xi = 0$ wskazuje [3], że są one bardzo zbliżone do rezultatów uzyskanych drogą obliczeń ścisłych dla opływu izotermicznej ściany płaskiej.

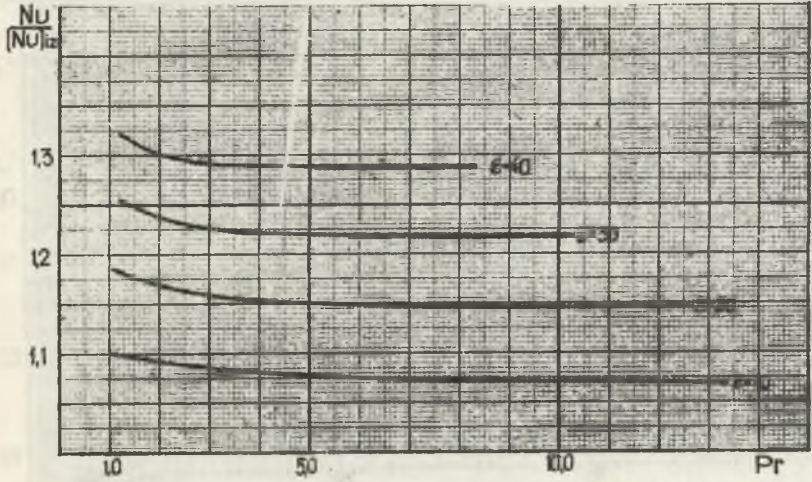
5. Przykłady obliczeniowe i wnioski

Rezultaty niektórych szeregówowych rozwiązań (3.27) i (3.28) dla $M = -2, 1, 0$ - 1 oraz dla przyjętych wartości ξ zawierają rys. 2+8.

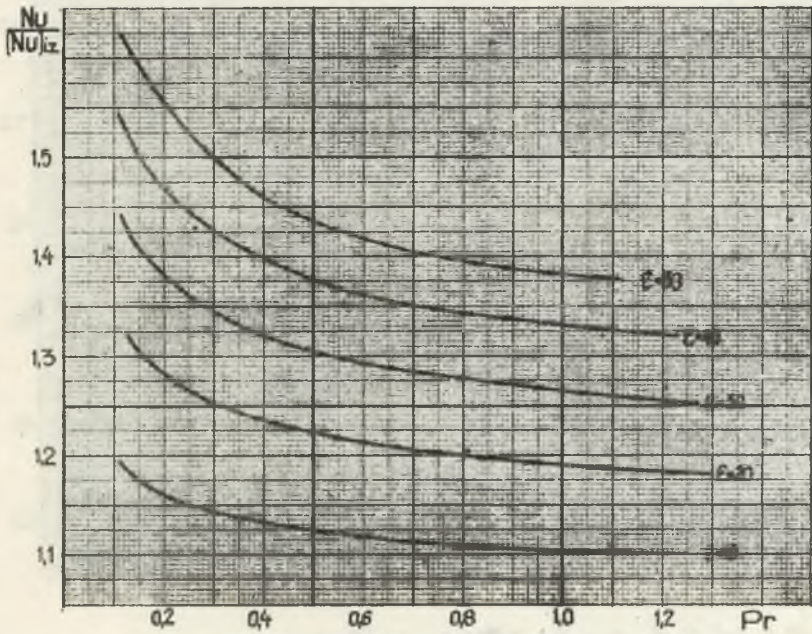
Wykresy 2+5 uwiadcniają wpływ liczby Prandtla oraz wartości ξ na grubość termicznej warstwy przyściennej. Wszystkie naniesione krzywe przerwane dla ξ , przy którym krzywe te były jeszcze monotoniczne. Dalszy przebieg tych krzywych dotyczy przypadków sprzecznych z założeniami I i II.

Dla $M = 2$ (rys. 2) za dolną wartość ξ w obliczeniach przyjęto wartość $\xi = 0,65$. Poniżej tej granicy małe zmiany stosunku ξ wiążą się z dużymi zmianami liczby Pr, a wartość $\xi = 0,6$ nie ma już fizycznego uzasadnienia gdyż wyliczona przy tym założeniu liczba Prandtla jest ujemną. Wynika stąd, że dla $0,6 < \xi < 0,65$ wpływ liczby Pr na grubość termicznej przyściennej jest bardzo nieznaczny. Wpływ ten rośnie ze zmniejszeniem się wartości Pr. Podobne wnioski wynikają z rys. 3 dla $M = 1$.

Z przebiegów krzywych na rys. 2+5 wynika, że górna granica przedziału zmienności ξ , w którym omawiane rozwiązania $\text{Pr} = f(M, \xi, \epsilon)$ mają sens fizyczny, jest różna dla różnych wartości parametru M i ξ . Waha się ona od $\epsilon_k = 130$ ($M = 2, 1, 0$) do $\epsilon_k = 18$ ($M = -1$). Analiza zależności (3.3) dowodzi, że odpowiada to dość szerokiemu zakresowi zmienności funkcji $\left(\frac{T_{\infty} - T_0}{T_{\infty} - T_0} \right) x$. Wartość graniczna ϵ_k zależna jest głównie od M i Pr. Np.

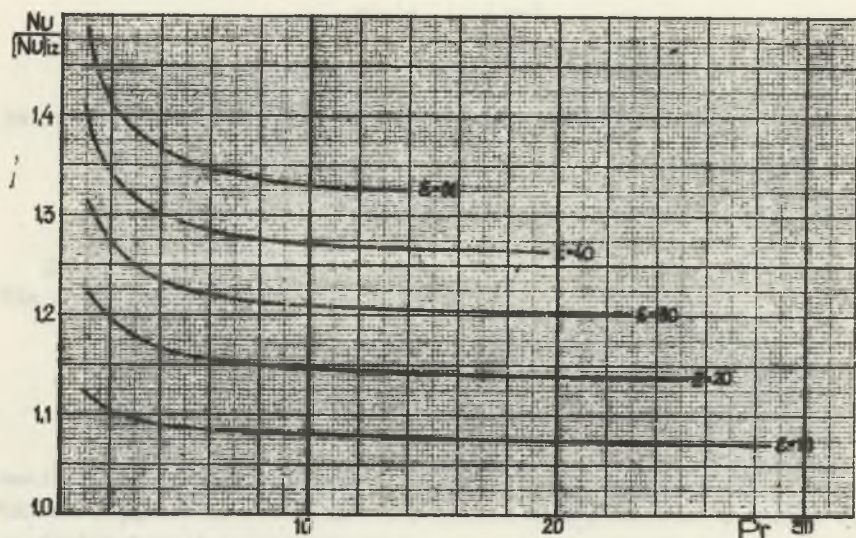


a.

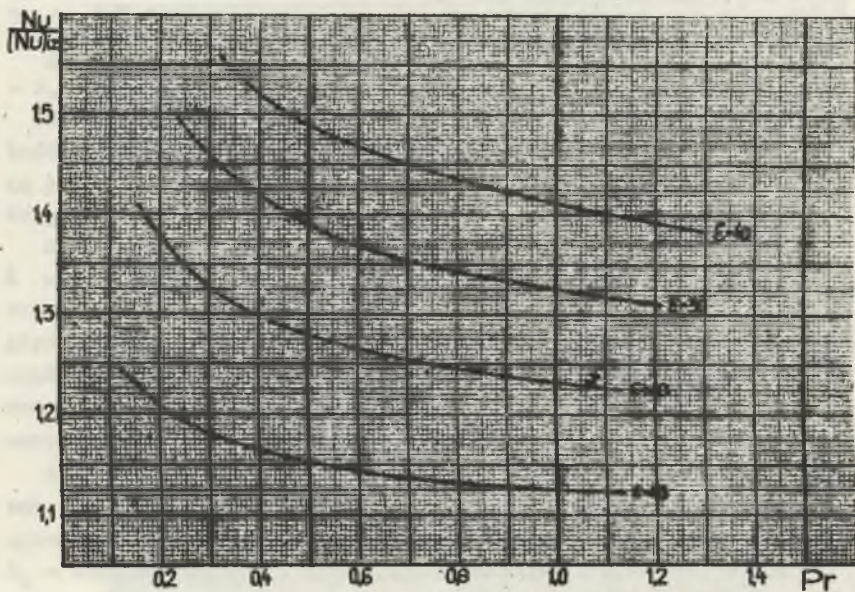


b.

Rys. 6. Funkcja $\frac{Nu}{(Nu)_{1z}} = f(Pr, \epsilon), M = 2$

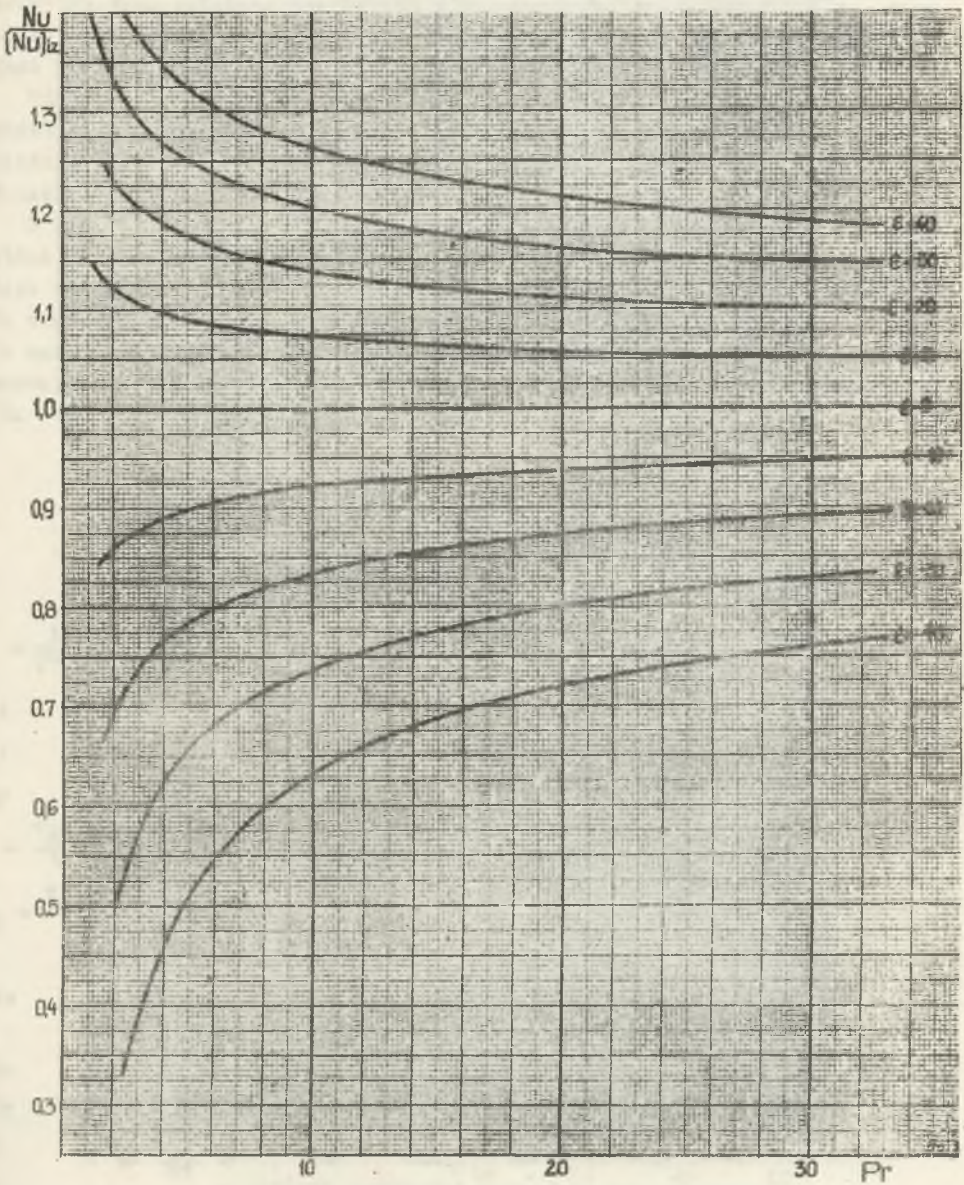


d.

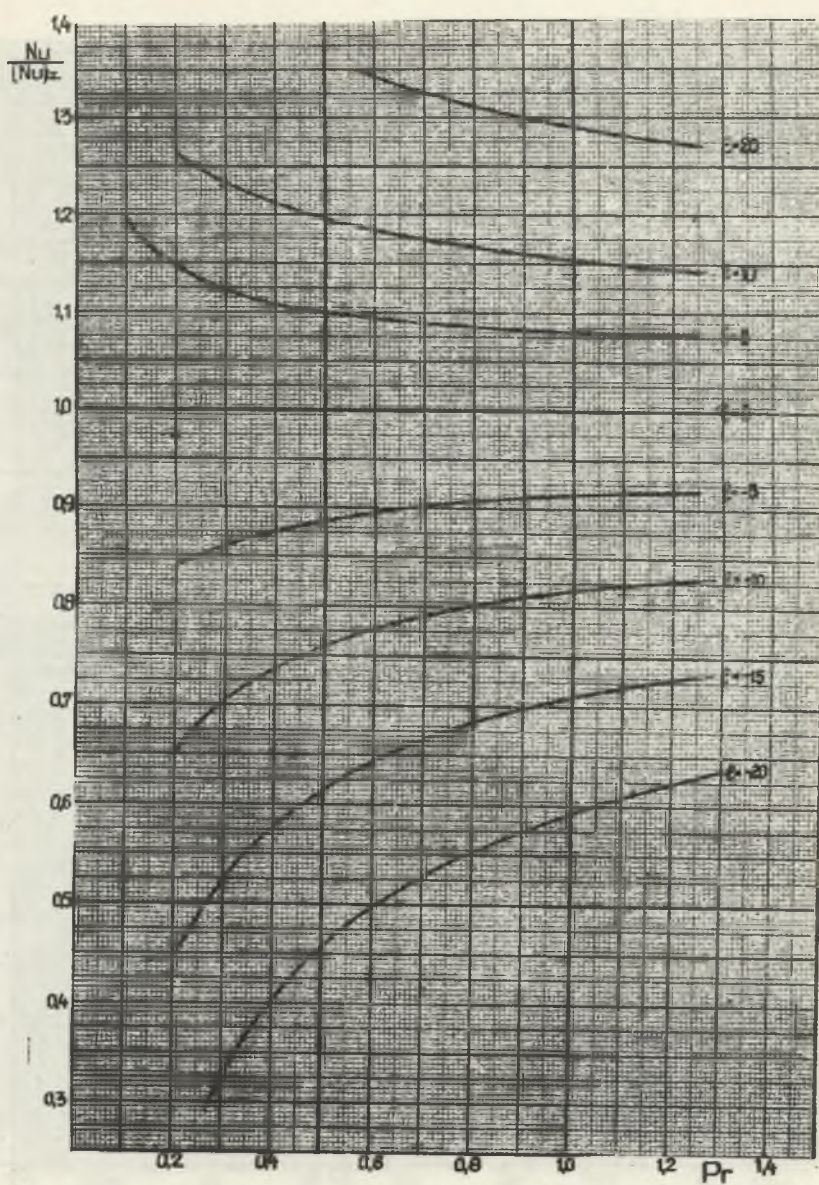


b.

Rys. 7. Funkcja $\frac{Nu}{(Nu)_{iz}} = f(Pr, \epsilon)$, $M = 1$



Rys. 8a. Funkcja $\frac{Nu}{(Nu)_z} = f(Pr, \epsilon)$, $M = 0$, $\epsilon > 0$ i $\epsilon < 0$



Rys. 8b. Funkcja $\frac{Nu}{(Nu)_{1z}} = f(Pr, \epsilon)$, $M = 0$, $\epsilon > 0$ $1 \leq Pr < 0$

dla $M = 2$ i $Pr = 0,2$ wartość $\varepsilon_k = 80$. Odpowiada to zależności $T_{\dot{c}} - T_{\dot{o}T} \cong A x^{12}$, natomiast dla $M = 1$, $Pr = 4,8$ wartość $\varepsilon_k = 15$ co odpowiada zależności $T_{\dot{c}} - T_{\dot{o}T} \cong A x^{0,5}$. Dla $M = 0$ maksymalna dopuszczalna wartość wykładnika przy zmiennej x waha się w granicach $0,7 \pm 1$. W oparciu o te dane można stwierdzić, że przydatność wielomianowego rozkładu temperatury (3.6) jest różna dla dodatnich i ujemnych wartości parametru.

Dla $M > 0$ (iniekcja) rozkład (3.6) pozwala aproksymować rozwiązanie nawet dla dużych zmian temperatury na ścianie. Natomiast dla $M < 0$ odpowiednie rozważania mogą dotyczyć tylko niewielkich zmian temperatury na ścianie.

Z rys. 6 i 7, które ilustrują zależność $\frac{Nu}{(Nu)_{1\dot{c}}}$ od liczby Pr i dla $M > 0$ widać, że dla $Pr > 5$ (10) wpływ tej liczby na wielkość stosunku $\frac{Nu}{(Nu)_{1\dot{c}}}$ jest znikomy dla wszystkich naniesionych \dot{c} . Można więc dla tych wartości Pr stosunek ten uważać za funkcję jedynie \dot{c} . Ze zmniejszeniem się liczb Pr wartość omawianego stosunku przy założonym \dot{c} rośnie. Dla $M = 0$ nie obserwuje się tak wyraźnie zanikającego wpływu Pr na $\frac{Nu}{(Nu)_{1\dot{c}}}$ i to zarówno dla $\dot{c} > 0$ jak i $\dot{c} < 0$ (rys. 8a i 8b).

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$	- współczynnik wyrównywania temperatury
a_1	- współczynnik rozkładu prędkości
b_1	- współczynnik rozkładu temperatury
C_p	- ciepła właściwe przy stałym ciśnieniu
$M = \frac{v_{\dot{c}o\dot{c}}}{v}$	- parametr
$M_T = \frac{v_{\dot{c}o\dot{c}} \delta T}{a}$	- parametr
p	- ciśnienie
$q_{\dot{c}o}$	- natężenie strumienia ciepłego na ścianie
T	- temperatura
$T_{\dot{c}o}$	- temperatura ścianki
$T_{\dot{o}T}$	- temperatura na granicy warstwy przyściennej
U_0	- prędkość strumienia potencjalnego
$v_{\dot{c}o}$	- wartość prędkości odsysania lub iniekcji
x	- współrzędna liniowa
α	- współczynnik wnikania ciepła

δ	- grubość hydraulicznej przyściennej
δ_2	- miara liniowa straty pędu
δ_T	- grubość termicznej warstwy przyściennej
$\varepsilon = \frac{(T_{\infty} - T_0) \delta_T}{T_{\infty} \delta} \frac{\delta^2}{a} \frac{u}{\delta}$	- parametr
$\eta = y/\delta$	- współrzędna bezwymiarowa
$\eta_T = y/\delta_T$	- współrzędna bezwymiarowa
λ	- przewodność cieplna
μ	- molekularny współczynnik lepkości
ν	- kinematyczny współczynnik lepkości
ρ	- gęstość
τ_{∞}	- naprężenie styczne na ścianie.

LITERATURA

- [1] BANSAL J.L.: Heat and mass transfer in a laminar boundary layer a flat plate with variable suction or injection velocity an constant wall temperature, Int. J. Heat and Mass Transfer, 12, 2, 1968.
- [2] BRONSTAIN J.H., SEMENDJAEV K.A.: Spravočnik po matematike, Nauka, Moskwa, 1965.
- [3] CHMIELNIAK T.: Przybliżona analiza przepływu masy i ciepła w laminarnej warstwie przyściennej przy zmiennym gradientcie temperatury na ścianie. Pol. Sl. Gliwice 1969 r. Rozpr. doktorska.
- [4] EMMONS H.W., LEIGH D.C.: Tabulation of the blasius function with blowing and suction, Aer. Res. Consil, C.P. No. 157, 1954.
- [5] KOH I.C.Y., HARTNETT J.P.: Skin friction and heat transfer for incompressible laminar flow over porous wedges with suction and variable wall temperature, Int. J. Heat Mass Transfer 2, 1961.
- [6] MORDUCHOW M., REYLE S.P.: On the compressible laminar boundary layer with suction, int. J. Heat Mass transfer, 10, 1967.
- [7] SCHLICHTING H., BUSSMANN K.: Exakte Losungen für die laminare Reibungs schicht mit Absaugung und Ausblasen, Schr. Dt. Akad. Luft Forsch 7, 2, s. 25-69 1943.
- [8] THWAITES B.: An exact solution of the boundary layer equations under particulat conditions of porous survice suction, Aer. Res. Consil. Repkt. and Memo. 2231, 1946.
- [9] YUAN S.W.: Heat transfer in laminar compressible boundary layer on a porous flat plate with fluid injection, in., Aeron. Sci., 16, 12, 1949.

ПРОФИЛЫ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ
ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ОТСОСА И ВДУВАНИЯ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено решение уравнений ламинарного пограничного слоя для неизотермической плоской пластинки при наличии отсоса или вдувания. Приведенные решения даны для произвольных величин чисел Прандтля. Подробно обсуждено подобные решения рассматриваемой проблемы. Даны диаграммы обширных численных расчетов.

THE TEMPERATURE PROFILES IN A LAMINAR BOUNDARY LAYER WITH VARIABLE
SUCTION AND INJECTION VELOCITY

S u m m a r y

The paper contains a solution to the laminar boundary layer equations for a flat plate with arbitrary distribution of wall temperature and with variable suction and injection velocity.

The problem by using an approximate method has been solved. The class of similar solutions in detail has been discussed. The solutions for different number Prandtl have given. The results have been illustrated with figure.