ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: ENERGETYKA z. 40 Nr kol. 311

TADEUSZ CHMIELNIAK
Katedra Kotłów i Maszyn Cieplnych

METODA KOLEJNYCH PRZYBLIŻEŃ CAŁKOWANIA RÓWNAŃ LAMINARNEJ WARSTWY PRZYŚCIENNEJ DLA CZYNNIKA ŚCIŚLIWEGO

Streszczenie: W pracy opracowano metodę kolejnych przybliżeń całkowania równań warstwy przyściennej dla ośrodka ściśliwego. Biorąc za punkt wyjścia uniwersalny układ równań warstwy granicznej skonstruowano ogólny algorytm obliczeń dla określenia profili prędkości i entalpii oraz dla określenia wartości ich pierwszych pochodnych na ścianie. Algorytm charakteryzuje się tym, że przybliżenie następne wyraża się całkowicie przez przybliżenie poprzednie. Przy trafnym doborze funkcji początkowych istnieje możliwość otrzymania zamkniętej formy rozwiązania dla poszczególnych przybliżeń. Dla zilustrowania metody podano w pracy prosty przykład obliczeniowy.

Nieliniowość równań warstwy przyściennej powoduje, do dokładne ich rozwiązanie jest możliwe jedynie dla mniej złożonych warunków brzegowych (prędkość zewnętrznego przepływu potencjalnego jest prostą funkcją współrzędnej biegnącej wzdłuż ściany). Rozwiązanie problemów bardziej złożonych wymaga stosowania metod przybliżonych. Jedną z głównych grup metod stosowanych do całkowania cząstkowych równań różniczkowych typu równań warstwy granicznej tworzą różne postacie metody kolejnych przybliżeń. W literaturze dotyczącej omawianego problemu opracowano wiele różnych wariantów tej metody (np.: [1, 4, 5, 6, 7]). Do tej grupy metod należy również metoda opracowana w dalszej części pracy. Idea tej metody jest zawarta w pracy [2], gdzie przedstawiono jej zastosowanie do całkowania równań Prandtla dla laminarnego przepływu nieściśliwego. Podkreślenia wymaga fakt, że metoda jest ogólna, a jej stosowanie prowadzi do stosunkowo prostego algorytmu obliczeń.

1. Równania wyjściowe

Równania cząstkowe opisujące dwuwymiarowy laminarny przepływ płynu ściśliwego zapisuje się zwykle po zastosowaniu transformacji Stewartsona-Doroditsyna

$$\bar{x} = \int_0^x C(1-\alpha)^{\frac{2\varkappa-1}{2(\varkappa-1)}} dx, \quad \bar{y} = (1-\alpha)^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}} \int_0^y \varrho/\varrho_0 \, dy \qquad (1)$$

w postaci:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{y}^2} = U \frac{dU}{d\bar{x}} (1+S) + \nu_1 \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \bar{y}^3}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial S}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial S}{\partial \bar{y}} = \frac{\nu_1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{y}^2} - (1-Pr)\alpha \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{1}{U_\delta} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right], \tag{3}$$

$$p = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \varrho h, \quad \frac{\mu}{\mu_1} = C \frac{h}{h_1}, \quad S = \frac{h_o}{h_1} - 1, \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_v}, \tag{4}$$

$$\alpha = \left(1 + \frac{2}{\varkappa - 1} M^{-2}\right)^{-1}, \quad U = (1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} U_\delta .$$

W równaniach 1 ÷ 4 oznaczono: x – współrzędna równoległa do ściany; y – współrzędna prostopadła do ściany; Ψ – funkcja prądu; h – entalpia; h_o – entalpia całkowita; p – ciśnienie; μ – dynamiczny współczynnik lepkości; ν – kinematyczny współczynnik lepkości; c_p – ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu; c_v – ciepło właściwe przy stałej objętości; ϱ – gęstość; C – stała Chapmana-Rubesina; Pr – liczba Prandtla; M – liczba Macha; u_δ –prędkość zewnętrznego przepływu potencjalnego; indeksy 1, δ odnoszą się odpowiednio do warunków adiabatycznego i izoentalpowego dławienia oraz do warunków zewnętrznego przepływu potencjalnego.
Po wprowadzeniu nowych zmiennych:

$$\eta = U\bar{y} \left[2\nu_1 \int_0^{\bar{x}} U(\bar{x}) d\bar{x} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi = \frac{1}{\nu_1} \int_0^{\bar{x}} U(\bar{x}) d\bar{x} \tag{4}$$

równania (2, 3) przekształcić można do korzystniejszej w dalszych rozważaniach formy:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \left[F + 2 \frac{\partial F}{\partial \xi} \xi \right] - 2\xi \frac{1}{U} \frac{dU}{d\xi} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 - 1 - S \right] + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \eta^2} + Pr F \frac{\partial S}{\partial \eta} = (1-Pr)\alpha \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 + 2Pr\xi \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial S}{\partial \xi} - \frac{\partial S}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial \xi} \right), \tag{6}$$

gdzie:

$$F = \Psi(x,y)\left[2\nu_1 \int_0^x U(\bar{x})dx\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\chi = (1 + \frac{\chi - 1}{2} M_\delta^2)^{-1}.$$

Konkretnych rozwiązań równań (5),(6) poszukuje się dla odpowiednich warunków brzegowych. W teorii laminarnej warstwy przyściennej przy założeniu braku promieniowania postać tych warunków zapisuje się przez związki:

$$F(\xi,0) + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi,0) = f_{\xi 0}(\xi),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(\xi,0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(\xi,\infty) = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial \eta}(\xi_0,\eta) = U_0(\eta),$$

$$S(\xi,\infty) = 0, \qquad\qquad (7)$$

$$S(\xi_0,\eta) = S_0(\eta).$$

$$S(\xi,0) = S_{\xi 0},$$

Równania (5), (6) i warunki (7) stanowią zagadnienie brzegowe,którego rozwiązanie pozwala określić wszystkie interesujące ze względów teoretycznych i praktycznych charakterystyki laminarnego przepływu ośrodka ściśliwego.

2. Metoda rozwiązania

Całkując równania (5), (6) w granicach od η do ∞ z uwzględnieniem warunków (7) otrzymujemy odpowiednio:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = F(1 - \frac{\partial F}{\partial \eta}) + \Delta_2 + 2\xi\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\Delta_2 + \frac{\partial F}{\partial \xi}(1 - \frac{\partial F}{\partial \eta}) + \right.$$

$$\left. -\beta\left[\Delta_2 \int_\eta^\infty (\frac{\partial F}{\partial \eta} - 1 - S)d\eta\right]\right. \qquad (8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \Pr \left\{ \int_{\eta}^{\infty} F \frac{\partial S}{\partial \eta} d\eta + \frac{1-\Pr}{\Pr} \chi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)^2 - 2\hat{s} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{s}} \int_{\eta}^{\infty} S \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta + \right. \right.$$

$$\left. \left. + S \frac{\partial F}{\partial \hat{s}} \right] \right\}, \tag{9}$$

gdzie:

$$\Delta_2 = \int_{\eta}^{\infty} \left(1 - \frac{\partial F}{\partial \eta}\right) \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta, \quad \beta = 2\hat{s} \frac{dU}{d\hat{s}} \frac{1}{U} .$$

Wprowadzając do równania (8) zmienne

$$s = \hat{s}, \quad z = \eta \, \delta_1^{-\frac{1}{2}}(s)$$

a do równania (9) zmienne

$$s = \hat{s}, \quad w = \eta \, \delta_2^{-\frac{1}{2}}(s)$$

oraz mając na uwadze, że $\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{u}{U} = \bar{u}$ (gdzie u jest składową prędkości równoległą do ściany) równania (8) i (9) można przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = L\left[\bar{u}(s,z), S(s,gz), \delta_1(s), g(s)\right], \tag{10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial w} = L\left[\bar{u}(s,\frac{w}{g}), S(s,w), \delta_2(s), g(s)\right], \tag{11}$$

przy czym

$$K = \left[(1-\bar{u})\varphi + \Delta_2^*\right](\delta_1 + s\,\delta_1') + \beta(s)\delta_1 \left[\Delta_2^* + \Delta_1 + g \int_{wg}^{\infty} S dw\right] +$$

$$+ 2\,s\delta_1\left[\frac{\partial \Delta_2^*}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1-\bar{u})\right] + \delta_1^{\frac{1}{2}}(1-\bar{u})f_{\delta 0}(s), \tag{12}$$

$$L = Pr\left\{\delta_2\left[\alpha_1 - 2s\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial s} + S\,\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)\right] + \chi\,\frac{1-Pr}{Pr}\,\frac{\partial}{\partial w}(\bar{u})^2 + \right.$$

$$\left. - \delta_2' s\left[\alpha_2 + S\varphi\right] + \delta_2^{\frac{1}{2}}\,S\,f_{\delta o}(s)\right\}, \qquad (13)$$

gdzie:

$$(s,z) = \int_0^z \bar{u}\,dz, \quad g(s) = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta_1(s,z) = \int_z^\infty (1-\bar{u})dz',$$

$$\Delta_2^*(s,z) = \int_z^\infty \bar{u}(1-\bar{u})dz', \quad \alpha_1(s,z) = \int_w^\infty \varphi\,\frac{\partial S}{\partial w'}\,dw,$$

$$\alpha_2(s,z) = \int_w^\infty S\,\frac{\partial \varphi}{\partial w'}\,dw', \quad \delta_i' = \frac{\partial \delta_i}{\partial s}\ (i = 1,2).$$

Równania różniczkowe (10) i (11), które są ekwiwalentne układowi dwu równań całkowych

$$\bar{u}(s,z) = \int_0^z K\,dz', \qquad (14)$$

$$S(s,w) = \int_0^w L\,dw' + S(s,o) \qquad (15)$$

zawierają dwie funkcje niewiadome $\delta_1(s)$. Postacie tych funkcji określa układ dwóch zwyczajnych równań różniczkowych

$$\int_0^\infty K\,dz' = 1 \qquad (16)$$

$$\int_0^\infty L\,dw' + S(s,o) = 0 \qquad (17)$$

otrzymanych z równań (14) i (15) przy uwzględnieniu odpowiednich warunków (7). Warunki początkowe, przy których należy rozwiązać równania (16) i (17) znajduje się z układu równań algebraicznych otrzymanych z (16) i (17) przy s 0. Podkreślić tutaj należy, że postać tych związków algebraicznych uzależniona będzie każdorazowo od rodzaju warunków brzegowych. Szerszą analizę znajdywania warunków początkowych równań (16) i (17) przeprowadzić można w oparciu o pracę [3].

Wybierając wstępnie pewne funkcje $\bar{u}_0$ i S_0 spełniające odpowiednie warunki brzegowe z równań (16) i (17) znajdujemy wartości δ_{10} i δ_{20} oraz g_0, które wykorzystane w związkach (14) i (15) pozwalają określić pierwsze przybliżenie dla szukanych funkcji $\bar{u}_1$ i S_1. Powtarzając w tej samej kolejności ten sam proces z funkcjami $\bar{u}_1$ i S_1 jako początkowymi znajdujemy przybliżenie drugie. Następne przybliżenia znajdujemy tą samą drogą. Jest oczywistym, że im trafniej można dobrać funkcje $\bar{u}_0$ i S_0, tym szybciej uzyskuje się rezultaty końcowe. W prostszych przypadkach przepływów trafny dobór funkcji nie jest zwykle trudny i prowadzić może do otrzymania rozwiązań żamkniętych dla poszczególnych przybliżeń $\bar{u}_n$ i S_n. Przy bardziej skomplikowanych warunkach brzegowych właściwy wybór funkcji jest utrudniony, co w konsekwencji zmusza do korzystania z maszyn cyfrowych przy obliczeniach przybliżeń u_n i S_n z większymi n.

3. Algorytm obliczeń

Szczegółową postać algorytmu dla obliczeń wielkości $\bar{u}_n$ i S_n otrzymujemy z równań (14 - 17) po wykorzystaniu związków (12) i (13).
Mamy więc:

$$s\,\delta'_{1n} + \delta_{1n}\left\{1 + \beta(s)\left[\frac{B_n(s,\infty)}{A_n(s,\infty)} + \frac{C_n(s,\infty)}{A_n(s,\infty)}\right] + 2s\,\frac{D_n(s,\infty)}{A_n(s,\infty)}\right\} + \tag{18}$$

$$+ \frac{f_{\delta o}(s)\,\Delta_{1n}(s,o)}{A_n(s,\infty)}\,\delta_{1n}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{A_n(s,\infty)}$$

$$s\,\delta'_{2n} = \frac{1}{\alpha_{4n}(s,\infty)-\alpha_{5n}(s,\infty)}\left\{\delta_{2n}\left[\alpha_{1n}(s,\infty) - 2s\left((\alpha_{2n}(s,\infty)-\alpha_{3n}(s,\infty)\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \chi\,\frac{1-Pr}{Pr} + \delta_{2n}^{\frac{1}{2}}\,f_{\delta o}(s)\,\alpha_{6n}(s,\infty) + \frac{1}{Pr}\,S(s,o)\right\} \tag{19}$$

$$\bar{u}_{n+1}(s,z) = \frac{A_n(s,z)}{A_n(s,\ )} + \delta_{1n}\Big\{\beta(s)\Big[B_n(s,z) + C_n(s,z) - \frac{A_n(s,z)}{A_n(s,\infty)}\big(B_n(s,\infty) +$$

$$+ C_n(s,\infty)\big) + 2s\Big[D_n(s,z) - \frac{A_n(s,z)}{A_n(s,\infty)} D_n(s,\infty)\Big]\Big\} +$$

$$+ \delta_{1n}^{\frac{1}{2}} \zeta_{\delta o}(s)\Big\{\Big[1 - \frac{A_n(s,z)}{A_n(s,\infty)}\Big]\Delta_{1n}(s,e) - \Delta_{1n}(s,z)\Big\} \qquad (20)$$

$$S_{n+1} = Pr\Big\{\Big\{\delta_{2n}\Big\{\alpha_1(s,w) - 2s\Big[\alpha_{2n}(s,w)\,\alpha_{3n}(s,w)\Big] - \frac{M_n(s,w)}{M_n(s,\infty)}\Big[\alpha_{1n}(s,\infty) +$$

$$- 2s\big(\alpha_{2n}(s,\infty) - \alpha_{3n}(s,\infty)\big)\Big]\Big\} + \chi\,\frac{1-Pr}{Pr}\Big[(U_n)^2 - \frac{M_n(s,w)}{M_n(s,\infty)}\Big] +$$

$$+ \delta_{2n}^{\frac{1}{2}} \zeta_{\delta o}\Big[\alpha_{6n}(s,w) - \alpha_{6n}(s,\infty)\,\frac{M(s,w)}{M(s,\infty)}\Big]\Big\}\Big\} + S(s,e)\Big[1 - \frac{1}{Pr}\,\frac{M(s,w)}{M(s,\infty)}\Big], \quad (21)$$

gdzie:

$$A(s,z) = \int_0^z \Big[(1-\bar{u})\varphi + \Delta_2^*\Big]dz'$$

$$B(s,z) = \int_0^z (\Delta_2^* + \Delta_1)\, dz'$$

$$C(s,z) = \int_0^z \Big[\int_{z'}^{\infty} S\big(\tfrac{z''}{g}\big)dz''\Big]dz'$$

$$D(s,z) = \int_0^z \Big[\frac{\partial \Delta_2^*}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1-\bar{u})\Big]dz'$$

$$\alpha_1(s,w) = \int_0^{w} \Big(\int_{w'}^{\infty} \varphi\,\frac{\partial S}{\partial w''}\, dw''\Big)\, dw'$$

$$\alpha_2(s,w) = \int_0^w \left(\frac{\partial}{\partial s}\int_w^\infty S \frac{\partial \varphi}{\partial w''} dw''\right) dw'$$

$$\alpha_3(s,w) = \int_0^w S \frac{\partial \varphi}{\partial s} dw'$$

$$M(s,w) = \alpha_4(s,w) - \alpha_5(s,w)$$

$$\alpha_4(s,w) = \int_0^w \left(\int_{w'}^\infty S \frac{\partial \varphi}{\partial w''} dw''\right) dw'$$

$$\alpha_5(s,w) = \int_0^w S\varphi \, dw'$$

$$\alpha_6(s,w) = \int_0^w S \, dw'.$$

Konieczne do znalezienia miejscowej liczby tarcia oraz lokalnego strumienia ciepła wielkości pochodnych

$$\left\{\frac{\partial \bar{u}_{n+1}}{\partial z}\right\}_{z=0}, \quad \left\{\frac{\partial S_{n+1}}{\partial w}\right\}_{w=0}$$

znajdujemy albo bezpośrednio ze związków (10), (11) lub z formuł (20), (21)

$$\left\{\frac{\partial \bar{u}_{n+1}}{\partial z}\right\}_{z=0} = \frac{\Delta^*_{2n}(s,o)}{A_n(s,\infty)} + \delta_{1n}\left\{\beta(s)\left[\Delta^*_{2n}(s,o) + \Delta_{1n}(s,o) + \right.\right.$$

$$\left. + \int_0^\infty S_n\left(\frac{z}{g}\right) dz - \frac{\Delta^*_{2n}(s,o)}{A_n(s,\infty)}(B_n(s,\infty) + C_n(s,\infty))\right] +$$

$$+ 2s\left[\frac{\partial\Delta^*_{2u}(s,o)}{\partial s} - \frac{\Delta^*_{2n}(s,o)}{A_n(s,\infty)} D_n(s,\infty)\right]\Bigg\} +$$

$$+ \delta_n^{\frac{1}{2}} f_{\acute{s}o}\left[1 - \frac{\Delta^*_{2n}(s,o)}{An(s,o)}\Delta_{1n}(s,o)\right] \tag{22}$$

$$\left\{\frac{\partial S_{n+1}}{\partial w}\right\}_{w=o} = Pr\Bigg\{\Bigg\{\delta_{2n}\left[G_n - 2s\frac{\partial H_n}{\partial s}\right] - \frac{H_n}{H_n(s,\infty)}\Bigg\{\delta_{2n}\Big[\alpha_{1n}(s,\infty) +$$

$$- 2s(\alpha_{2n}(s,\infty) - \alpha_{3n}(s,\infty))\Big]\Big] + \delta_{2n}^{\frac{1}{2}} f_{\acute{s}o}\,\alpha_{6n}(s,\infty) +$$

$$+ \frac{1}{Pr}\left[S(s,o) + (1-Pr)\chi\right]\Bigg\} + \delta_{2n}^{\frac{1}{2}} f_{\acute{s}o}\, S(s,o)\Bigg\}, \tag{23}$$

gdzie:

$$G_n = \int_o^\infty \varphi_n \frac{\partial S_n}{\partial w}\,dw, \quad H_n = \frac{\partial}{\partial s}\int_o^\infty S_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial w}\,dw.$$

4. Przykład obliczeniowy

Jako przykład obliczeniowy rozpatrzymy laminarny przepływ (bez wymiany masy na granicy ośrodków) wzdłuż izotermicznej ściany płaskiej – $\beta = 0$, $f_{\acute{s}o} = 0$, $Pr = 1$, $S(s,o) = S_{\acute{s}o}$ = idem.

Dla tak sformułowanego problemu związki (18 – 23) przyjmują odpowiednio postać

$$\delta_{1n} = A_n^{-1}(s,\infty), \quad \delta_{2n} = -\frac{1}{\alpha_{1n}(s,\infty)} S(s,o)$$

$$\bar{u}_{n+1}(s,z) = A_n(s,z)\, A_n^{-1}(s,\infty)$$

$$S_{n+1}(s,z) = S(s,o)\left[1 - \frac{\alpha_{1n}(s,w)}{\alpha_{1n}(s,\infty)}\right]$$

$$\left\{\frac{\partial \bar{u}_{n+1}}{\partial z}\right\}_{z=o} = \frac{\Delta^*_2(s,o)}{A_n(s,\infty)}$$

$$\left\{\frac{\partial S_{n+1}}{\partial w}\right\}_{w=o} = \delta_{2n}\, G_n.$$

Za funkcję $\bar{u}_o$ przyjęto

$$\bar{u}_o = 1 - \exp(-z) \tag{24}$$

zaś za funkcję S_o przyjęto $\frac{S_o}{S} = \exp(-w)$. Forma przyjętych założeń pozwala przeprowadzić obliczenia profili prędkości i profili temperatur niezależnie od siebie. Z tego względu najpierw określono $\bar{u}_n$, a następnie wykorzystano je do określenia S_n. W pierwszym przybliżeniu dla u_1 uzyskano $u_1 = 1 - (4/5)(1 + z)\exp(-z) - (1/5)\exp(-2z)$, dla drugiego przybliżenia otrzymano $u_2 = (1/2{,}652)\left\{4/5 \exp(-z)\left\{-2{,}6 - z^2 - 2{,}3\, z + \exp(-2z)\right\} - \left\{-(4/25)z^2 - (37/50)z - (49/100)\right\} + \exp(-3z)\left\{-52/675 - (30/675)\, z\right\} + (1/400)\exp(-4z) + 2{,}652\right\}$. Dla przyjętego $\bar{u}_o$ w postaci (24) wszystkie następne przybliżenia $\bar{u}_n$ można otrzymać także w formie zamkniętej. Przybliżenie trzecie pokrywa się z dokładnością do krzywej z odpowiednim rozwiązaniem Cohena i Reshotko [1]. Wartości liczb tarcia dla odpowiednich przybliżeń wynoszą $\tau_1 = 0{,}4473$, $\tau_2 = 0{,}4581$, $\tau_3 = 0{,}4636$, $\tau_4 = 0{,}4701$ (wartość dokładna $\tau = 0{,}4696$). Do obliczeń S_n przyjęto jako wartość początkową $\bar{u}_4$. W tym przypadku już drugie przybliżenie pokrywa się z dużą dokładnością z rozwiązaniami numerycznymi podanymi w [1]. Ponadto dla tego przypadku obliczono trzy przybliżenia wielkości

$$\frac{S_1'}{S_{\delta o}} = 0{,}4748, \quad \frac{S_2'}{S_{\delta o}} = 0{,}4711, \quad \frac{S_3'}{S_{\delta o}} = 0{,}4698$$

(dokładna wartość wynosi 0,4696).

5. Uwagi końcowe

Opracowany algorytm obliczeń jest słuszny dla warunków (7). Fizycznie oznacza to, że można go stosować w przypadkach laminarnego przepływu newtonowskich płynów ściśliwych wzdłuż ścian nieizotermicznych (dana temperatura ścianki) z dowolną prędkością iniekcji lub odsysania. Niemniej jednak łatwo można skonstruować algorytm obliczeń dla innych warunków brzegowych i innych rodzajów płynów.

Ilość określanych przybliżeń uzależniona jest od koniecznej w danym przypadku dokładności. Przy realizacji obliczeń najwygodniej jest założyć na wstępie wymaganą dokładność, której najprostszą miarą mogą być stosunki $\frac{\bar{u}_{n+1} - \bar{u}_n}{\bar{u}_n}$, $\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n}$. Ich kontrola w toku obliczeń jest bowiem bardzo prosta, a ponadto pozwalają wysnuć wnioski o szybkości i rodzaju zbieżności obliczeń. Teoretycznie mówiąc przy zastosowaniu odpowiedniej ilości przybliżeń za pomocą opracowanej metody można otrzymać rezultaty dokładne.

Wszystkie operacje matematyczne, które należy dokonać przy realizacji opracowanego algorytmu są proste i łatwe do przeprowadzenia również na drodze numerycznej.

LITERATURA

[1] COHEN C.B., RESHOTKO E.: Similar solutions for the compressible laminar boundary layer with heat transfer and pressure gradient, NACA Report 1293, 1956.

[2] КОВАЧ Э.А., ТИРСКИЙ Г.А., Применение метода последовательных приближений к интегрованию уравнений пограничного слоя, Доклады АН СССР, Т. 1, Nr 1, 1970.

[3] ПАВЛОВСКИЙ Ю.,Н., Численный расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемой газе, Журнал В.М. и М.Ф., Т. 2, Nr 5, 1962.

[4] PIERCY N.A., PRESTON G.H.: A simple solution of the flat plate problem of skin friction and heat transfer, Phil. Mag., 7, 21, 1936.

[5] ТАРГ С.М., Основные задачи теории ламинарных течений, Гостхиздат, 1951.

[6] WEYL H.: Concerning the differentaial equations of some boundary layer problems, Proc. Nat. Ac. Scien., Washington 27, 1941.

[7] ВОЛКОВ В.Н., Об одном уточнении интегрального метода Кармана-Польхаузена в теории пограничного слоя, I.Ф.Ж., Т. 9, Nr 5, 1965.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Р е з ю м е

В статье излагается применение метода последовательных приближений к интегрированию уравнений ламинарного пограничного слоя для сжимаемой жидкости. Исходя из универсальных уравнений ламинарного слоя, в работе получено общий алгоритм для вычислений распределения скорости, энтальпий в пограничном слое и значений их производных на стенке. Дается простой пример.

APPLICATION OF THE SUCCESSIVE APPROXIMATION METHOD FOR THE INTEGRATION OF THE LAMINAR BOUNDARY LAYER EQUATIONS IN A COMPRESSIBLE FLUID

S u m m a r y

In this paper the successive approximation method for the integration of the laminar boudary layer equations has been employed. Proceeding from universal laminar boundary layer equations of the velocity distribution, enthalpy distribution in the boundary layer and also their derivatives near the wall have been pound in general programming. In the paper simple examples have been given.