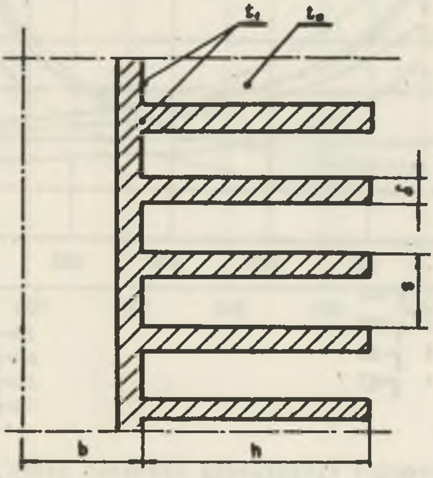
ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972
Seria: ENERGETYKA z. 43 nr kol. 333

STANISŁAW JERZY GDULA, KAZIMIERZ KURPISZ
Instytut Techniki Cieplnej

O PEWNEJ OPTYMALIZACJI ŻEBER PROSTYCH

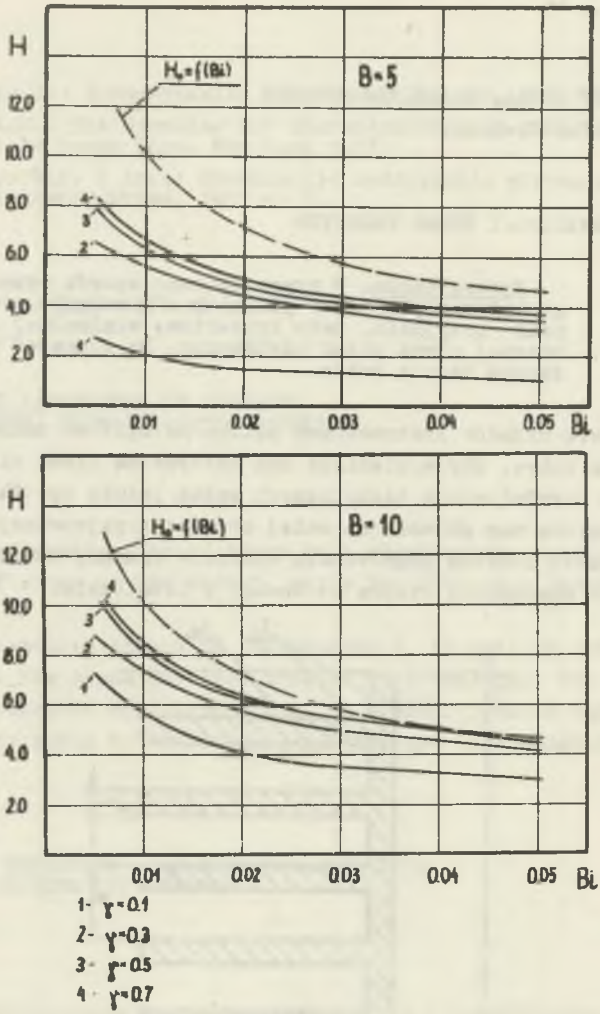
Streszczenie. W pracy opisano sposób wyznaczania cech geometrycznych żeber płaskich o przekroju prostokątnym, przy przyjęciu, jako kryterium, minimalnej objętości zajmowanej przez układ ożebrowany. Do rozważań stosowano klasyczną teorię żeber.

Projektowanie układów ożebrowanych polega na ogół na takim doborze cech geometrycznych żebra, aby wymieniało ono maksymalną ilość ciepła z otoczeniem. W wielu zagadnieniach technicznych można jednak spotkać takie sytuacje, gdzie zależy nam głównie na małej objętości zajmowanej przez układ ożebrowany, nawet kosztem pogorszenia warunków wymiany ciepła. Przykładem takim mogą być wymienniki ciepła stosowane w lotnictwie.

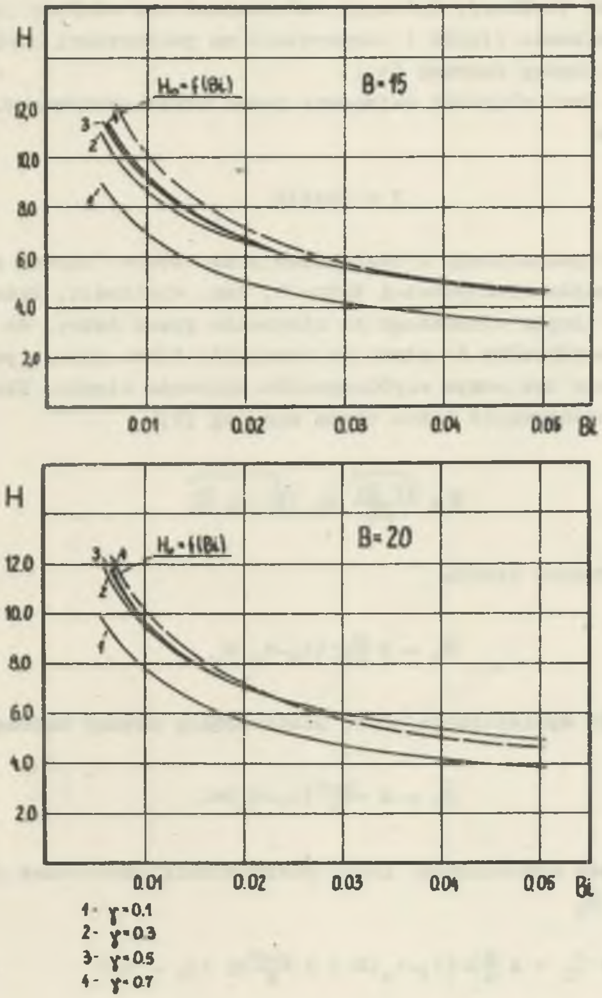


Rys. 1. Układ ożebrowany

Analizie poddany został układ z prostymi żebrami płaskimi (rys. 1). Zastosowana została klasyczna teoria żeber dla opisu przewodzenia ciepła. Jest to uzasadnione w przypadku małych liczb Biota. Przy Bi=0.1 błąd metody nie przekracza 1% (por. [1] str. 56). Jako wielkość stałą i zadaną traktuje się strumień wymienianego ciepła $\dot{Q}$. Powierzchnię ożebrowaną oznaczono przez A. Wymiar liniowy b, charakteryzujący rozmiary kanału po stronie nieożebrowanej traktuje się jako parametry. Za zmienną przyjmuje się wysokość żebra h.



Rys. 2. Optymalna zredukowana wysokość żebra, przy B=5 i B=10



Rys. 3. Optymalna zredukowana wysokość żebra, przy B=15 i B=20

Zakłada się dalej, że układ wymienia ciepło z otoczeniem zarówno przez żebra, jak i powierzchnię między żebrami, przy czym pomija się wymianę ciepła na powierzchni czołowej. Dalszymi założeniami są: stałość liczby Biota współczynnika wnikania ciepła i temperatur: na powierzchni ożebrowanej (t_1) i w przestrzeni między żebrami (t_o).

Funkcją celu jest objętość zajmowana przez układ ożebrowany. Można ją zapisać w formie

$$V = (h+b)A \tag{1}$$

Strumień ciepła wymienianego z otoczeniem przez żebro został opisany przy użyciu współczynnika efektywności żebra $\varkappa$, tzn. wielkości, będącej stosunkiem strumienia ciepła oddawanego do otoczenia przez żebro, do strumienia ciepła, jaki przepływałby do płynu po usunięciu żebra przez powierzchnię utwierdzenia, przy tym samym współczynniku wnikania ciepła. Dla płaskich żeber prostych efektywność żebra równa się (wg [1])

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2\,Bi}}{Bi}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{2\,Bi}\,\frac{h}{\delta}\right)$$

Stąd szukany strumień ciepła

$$\dot{Q}_1 = A\,\frac{\delta}{s}\alpha\,(t_1-t_o)\varkappa.$$

Strumień ciepła wymienianego przez powierzchnię między żebrami wynosi:

$$\dot{Q}_2 = A\,\frac{s-\delta}{s}(t_1-t_o)\alpha.$$

Strumień ciepła wymienionego przez powierzchnię ożebrowaną jest sumą strumieni $\dot{Q}_1$ i $\dot{Q}_2$

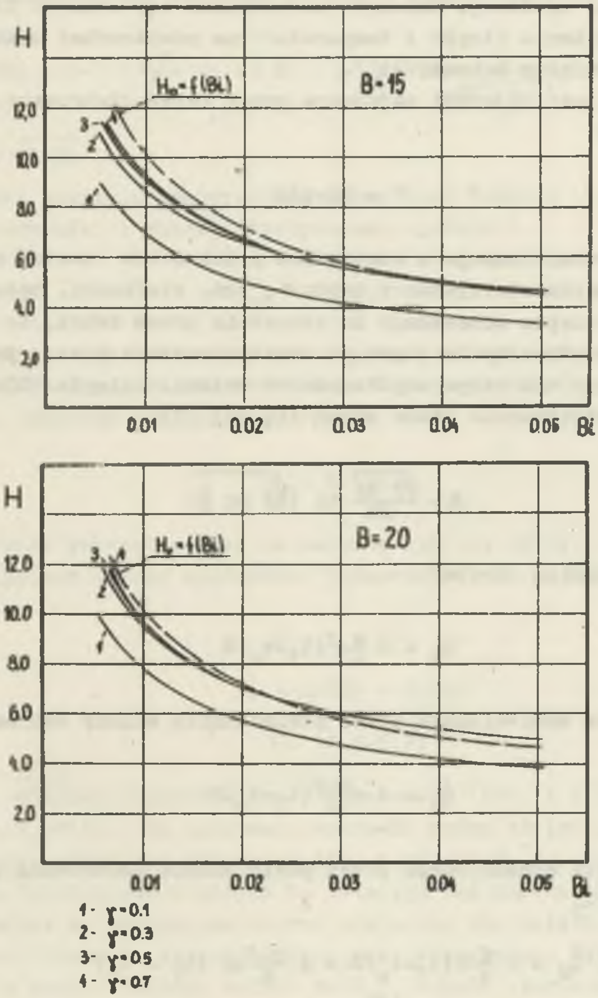
$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = A\,\frac{\delta}{s}\alpha\,(t_1-t_o)\varkappa + A\,\frac{s-\delta}{s}\alpha\,(t_1-t_o) \tag{2}$$

Skojarzenie równań (1) i (2) daje szukaną funkcję celu

$$V = \frac{\dot{Q}}{\alpha\,(t_1-t_o)}\,\frac{h+b}{\frac{s-\delta}{s}+\frac{\delta}{s}\varkappa} \tag{3}$$

Przyjmując wielkości bezwymiarowe

$$\frac{\delta}{s} = \gamma,\quad \frac{h}{\delta} = H,\quad \frac{b}{\delta} = B$$



Rys. 3. Optymalna zredukowana wysokość żebra, przy B=15 i B=20

Zakłada się dalej, że układ wymienia ciepło z otoczeniem zarówno przez żebra, jak i powierzchnię między żebrami, przy czym pomija się wymianę ciepła na powierzchni czołowej. Dalszymi założeniami są: stałość liczby Biota współczynnika wnikania ciepła i temperatur: na powierzchni ożebrowanej (t_1) i w przestrzeni między żebrami (t_o).

Funkcją celu jest objętość zajmowana przez układ ożebrowany. Można ją zapisać w formie

$$V = (h+b)A \tag{1}$$

Strumień ciepła wymienianego z otoczeniem przez żebro został opisany przy użyciu współczynnika efektywności żebra $\varkappa$, tzn. wielkości, będącej stosunkiem strumienia ciepła oddawanego do otoczenia przez żebro, do strumienia ciepła, jaki przepływałby do płynu po usunięciu żebra przez powierzchnię utwierdzenia, przy tym samym współczynniku wnikania ciepła. Dla płaskich żeber prostych efektywność żebra równa się (wg [1])

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2\,Bi}}{Bi}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{2\,Bi}\,\frac{h}{\delta}\right)$$

Stąd szukany strumień ciepła

$$\dot{Q}_1 = A\,\frac{\delta}{s}\alpha(t_1-t_o)\varkappa\,.$$

Strumień ciepła wymienianego przez powierzchnię między żebrami wynosi:

$$\dot{Q}_2 = A\,\frac{s-\delta}{s}(t_1-t_o)\alpha.$$

Strumień ciepła wymienionego przez powierzchnię ożebrowaną jest sumą strumieni $\dot{Q}_1$ i $\dot{Q}_2$

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 = A\,\frac{\delta}{s}\alpha(t_1-t_o)\varkappa + A\,\frac{s-\delta}{s}\alpha\,(t_1 - t_o) \tag{2}$$

Skojarzenie równań (1) i (2) daje szukaną funkcję celu

$$V = \frac{\dot{Q}}{\alpha(t_1-t_o)}\,\frac{h+b}{\frac{s-\delta}{s}+\frac{\delta}{s}\varkappa} \tag{3}$$

Przyjmując wielkości bezwymiarowe

$$\frac{\delta}{s} = \Gamma,\quad \frac{h}{\delta} = H,\quad \frac{b}{\delta} = B$$

otrzymujemy po przyrównaniu $\frac{dV}{dH}$ do zera równanie, pozwalające wyznaczyć optymalną bezwymiarową wysokość żebera H, przy przyjętym kryterium

$$F(H) = 1-\gamma + \frac{2\gamma}{\beta}\ \text{th}\ (\beta H) - 2\ (H+B)\gamma\ \frac{1}{\text{ch}^2(\beta H)} = 0, \tag{4}$$

gdzie $\beta = \sqrt{2\ Bi}$

Jak widać bezwymiarowa wysokość żebra jest funkcją liczby Biota, bezwymiarowej podziałki i charakterystycznego wymiaru B

$$H_{opt} = f(Bi, \gamma, B) \tag{5}$$

Równanie (4) jest równaniem przestępnym. Rozwiązania jego szukano metodą Newtona, przyjmując jako wartość startową optymalną wysokość żebra ze względu na maksimum wymienionego ciepła

$$H_o = 1.419/\beta.$$

Zagadnienie zaprogramowano na maszynę cyfrową ZAM-41, przy czym przyjęto następujący zakres zmienności parametrów:

$$B = 5 - 20;$$

$$Bi = 0.005 - 0.05;$$

$$\gamma = 90.1 - 0.7;$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach (rys. 2 i 3). Naniesiono tam też krzywą $H_o = f(Bi)$. Na podstawie wykresów można stwierdzić, że różnice pomiędzy krzywą określoną równaniem (5), a krzywą H_o są szczególnie wyraźne dla małych liczb Biota i małych B. Istnieją też punkty, dla których układ jest optymalny ze względu na obydwa kryteria. Dla małych B i dużych Bi wpływ liczby Biota na wysokość żebra jest nieznaczny. Także duże wartości γ nie mają prawie żadnego wpływu na H_{opt} w dość szerokim zakresie. Warto tu jeszcze podkreślić, że dla przyjętego zakresu zmienności parametrów $\varkappa$ jest znacznie większe od jedności.

Głębsza analiza równania (5) pozwala na ograniczenie liczby wielkości bezwymiarowych. Wyniki stają się wtedy mniej przejrzyste, ale ograniczenie liczby wielkości bezwymiarowych pozwala na przedstawienie ich na jednym wykresie i zmniejsza liczbę rozpatrywanych wariantów.

W tym celu równanie (5) należy podzielić przez 2γ i przemnożyć przez β. Uzyskujemy wtedy następującą jego postać:

$$F\ (\beta H) = 0.5\ \frac{1-\gamma}{\gamma}\beta + \text{th}\ (\beta H) - (\beta H + \beta B)\ \frac{1}{\text{ch}^2\ (\beta H)} = 0$$

Wprowadza się nowe wielkości bezwymiarowe:

$$\chi = \beta H, \qquad \psi = \frac{1-\gamma}{\delta}\beta, \qquad \varphi = \beta B$$

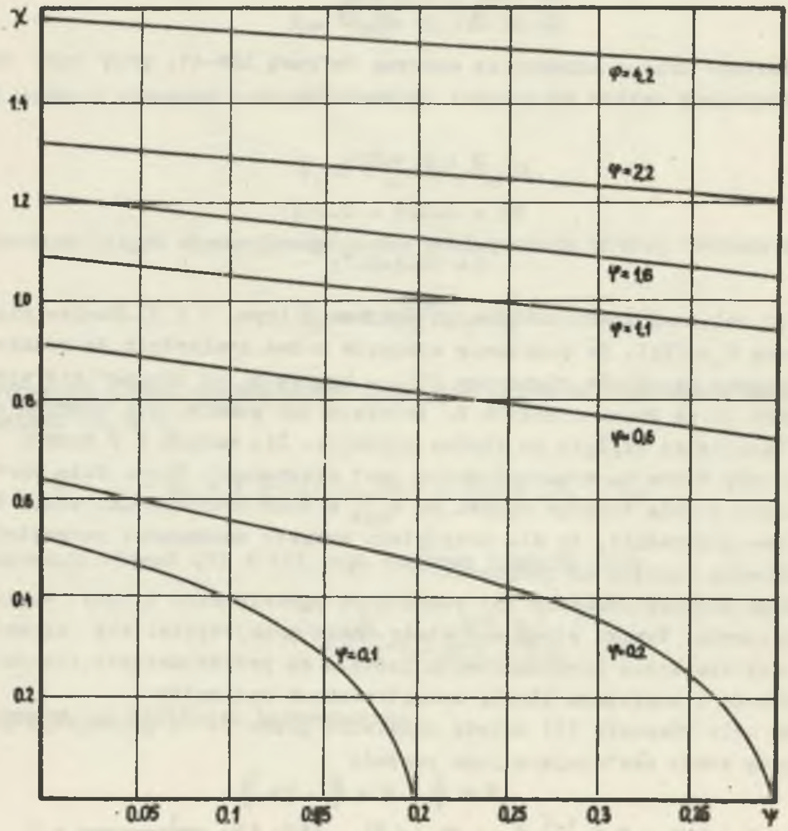
Ostatecznie zatem mamy:

$$F(\chi) = 0.5\psi + \operatorname{th}\chi - (\chi + \varphi)\frac{1}{\operatorname{ch}^2\chi} = 0 \tag{5'}$$

Zagadnienie rozwiązywania tego równania zaprogramowano na maszynę cyfrową ZAM-41, przy czym przyjęto następujący zakres zmienności parametrów:

$$\psi = 0.001 - 0.4$$

$$\varphi = 0.1 - 4.2$$



Rys. 4. Minimalna wartość χ jako funkcja ψ i φ

Przebieg krzywej określonej równaniem (5´) nasuwa szczególnie ostre wymagania co do wyboru punktu startowego, przy obraniu metody Newtona dla rozwiązywania tego problemu. Stąd też z metody tej zrezygnowano na korzyść metody dzielenia przedziału na pół. Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresie (rys. 4). Widać tam dużą prawidłowość w układaniu się rozwiązań równania (5´). Dla większych wartości φ krzywe biegną prawie równolegle. Łatwo można też stwierdzić, że zakres określoności x jest ograniczony. Krzywe x są bowiem monotonicznie malejące, przy czym zakres ten rozszerza się w miarę wzrostu φ. Zatem nie dla każdej wartości φ istnieje minimalna wartość x w zbiorze wielkości, mających sens fizykalny. Kryterium to ma charakter ograniczony, w przeciwieństwie do obranego poprzednio kryterium minimalnej zredukowanej wysokości żebra H.

LITERATURA

1. S.J. Gdula "Przewodzenie ciepła w prętach pryzmatycznych i żebrach", Zeszyty Naukowe Pol.Śl., nr 143.
2. P.J. Schneider "Conduction Heat Transfer", Cambridge Mass., 1955.

О ОДНОМ МЕТОДЕ ОПТИМАЛИЗАЦИИ ПРЯМЫХ РЕБЕР

Р е з ю м е

В работе дано опись определения размеров прямоугольного ребра для критерия минимального объема оребренной системы. Решения получено при помощи классической теорий ребер.

ABOUT ONE METHOD OF OPTIMALIZATION OF STRAIGHT FINS

S u m m a r y

In this work a description of straight fins of rectangular profil designing with a criterion of minimal volume of a fins arrangement is given The solution is done with the classic theory of fins.