

Stefan KUBISA  
Politechnika Szczecińska

## BŁĘDY I ICH ROZKŁADY PRAWDOPODOBIEŃSTWA, OCENY NIEPEWNOŚCI POMIARU

**Streszczenie.** Zagadnienia analizy dokładności pomiaru: klasyfikacja i rozkłady prawdopodobieństwa błędów, użyteczność pojęcia błędu, pojęcie niepewności i błędu granicznego oraz przybliżone metody oceny całkowitej niepewności rozszerzonej budzą wiele dyskusji. Artykuł podejmuje tę dyskusję oraz przedstawia porównanie dwóch metod oceny całkowitej niepewności rozszerzonej: metody podstawowej wg *Guide ...* [14] z metodą sumy geometrycznej.

## ERRORS AND THEIR PROBABILITY DISTRIBUTION, ESTIMATES OF MEASUREMENT UNCERTAINTY

**Summary.** The problems of measurement accuracy analysis: classification and probability distribution of errors, utility of the error conception, conception of uncertainty and limit error and the approximated estimation methods of expanded combined uncertainty inspire a lot of discussions. The paper joins the discussion and presents a confrontation of two estimation methods of the combined expanded uncertainty: a basic method recommended by *Guide ...* [14] and a method of the geometric sum.

### 1. WSTĘP

Ocena niedokładności pomiaru jest jego integralną częścią. W polskim środowisku metrologów dyskusje nad sposobami wyrażania niedokładności pomiaru trwają od wielu dekad. Jednym z dawniejszych śladów takich dyskusji jest referat Stanisława Trzetrzewińskiego [1], wygłoszony na seminarium metrologów we Wrocławiu ponad 40 lat temu. Ślady tej dyskusji w ostatnich latach to np. [2÷13]. Referat [1] wart jest szczególnej wzmianki, bowiem prezentowane w nim podejście jest nadzwyczaj podobne (pomijając terminologię i symbolikę) do tego, jakie reprezentuje międzynarodowy dokument *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* [14], wydany w 1992 roku.

Forum wspomnianych dyskusji w Polsce są w szczególności:

- 1° coroczne seminaria naukowe Komisji Kształcenia Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej Polskiej Akademii Nauk (w 1998 r. odbyło się kolejne dwunaste seminarium),
- 2° Międzuczelniane Konferencje Metrologów (w 1997 r. odbyła się XXIX MKM).

Dyskusje ożywiły się szczególnie na początku lat 90. z inicjatywy D. Turzenieckiej (autorki prac związanych z omawianą tematyką, m.in. [4 + 8], [10], [11]), która wprowadziła je jako element seminariów 1°, a po ukazaniu się *Guide'a* [14] — przedstawiła referat o nim. *Guide* wzbudził znaczne zainteresowanie. Ujawniło się ono w referatach K. Kostyrko, S. Kubisy (autora m.in. prac [3], [6÷10], [12] i podręcznika [16]) i J. M. Jaworskiego (autora kilku podręczników metrologii, m.in. obszernego i podstawowego [15]). Ten ostatni przedstawił też wykład na temat *Guide'a* na wspomnianej XXIX MKM [13].

Zagadnienie analizy dokładności pomiaru, a szerzej — opracowania pomiaru nie wydaje się wyczerpane. Jest to zagadnienie nietłwne, nie tylko w obszarze dydaktyki. Źródła trudności tkwią w samej istocie pomiaru jako procedury mającej na celu odwzorowanie rzeczy i zjawisk świata realnego za pomocą abstrakcyjnych pojęć matematyki. Trudnością podstawową jest uzyskanie adekwatności tego odwzorowania.

Ten artykuł przedstawia poglądy autora na wybrane zagadnienia, takie jak:

- klasyfikacja błędów pomiaru,
- użyteczność pojęcia błędu,
- rozkłady gęstości prawdopodobieństwa błędów,
- pojęcie niepewności i błędu granicznego pomiaru,
- ocena całkowitej niepewności pomiaru.

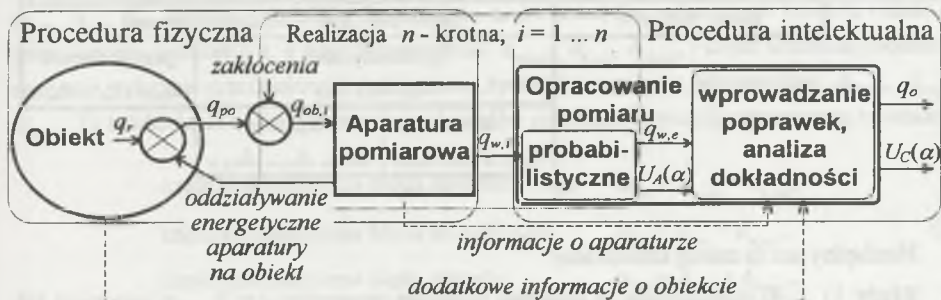
## 2. KLASYFIKACJA BŁĘDÓW POMIARU, MINIMALIZACJA BŁĘDU CAŁKOWITEGO, UŻYTECZNOŚĆ POJĘCIA BŁĘDU

Całkowity błąd pomiaru  $\Delta_C$  jest różnicą między tym „co wiemy” a tym „co chcielibyśmy wiedzieć”. Tym „co wiemy”, a raczej — co można poznać w wyniku poprawnie przeprowadzonej procedury pomiarowej, obejmującej część materialną pomiaru — fizyczny eksperyment i część intelektualną — opracowanie pomiaru, jest *ostateczna ocena wartości prawdziwej*  $q_o$ , nazywana na ogół *wartością pozornie prawdziwą*. Tym zaś „co chcielibyśmy wiedzieć” jest hipotetyczna *wartość prawdziwa (mezurand)*  $q_r$ . Wynika stąd definicja

$$\overset{\text{def}}{\Delta_C} = q_o - q_r \quad (1)$$

Całkowity błąd pomiaru  $\Delta_C$  jest algebraiczną sumą składników o liczności zależnej od stopnia złożoności procedury fizycznej pomiaru. W prostym przypadku pomiaru bezpośredniego podstawą do rozdzielenia błędu  $\Delta_C$  na składniki jest schemat pokazany na rys.1 [3], [7], [16]. Ujawnia on, jak wiele różnych wartości  $q$  związanych jest z procedurą pomiaru. Są to:

- wartość prawdziwa  $q_r$ , którą „chcielibyśmy poznać”,
- wartość potencjalnie obserwowalna  $q_{po}$  — wartość prawdziwa zmieniona wskutek oddziaływania aparatury pomiarowej na obiekt badany,
- wartość obserwowalna  $q_{ob,i}$  w  $i$ -tej realizacji procedury fizycznej (w  $i$ -tej obserwacji) — różna od wartości potencjalnie obserwowalnej  $q_{po}$  wskutek oddziaływania zakłóceń,
- wartość wskazana  $q_{w,i}$  w  $i$ -tej realizacji procedury fizycznej przez aparaturę pomiarową,
- wstępna ocena wartości prawdziwej — estymator  $q_{w,e}$  wartości oczekiwanej  $E q_w$  wskazania aparatury pomiarowej,
- ostateczna ocena wartości prawdziwej  $q_o$  — najlepsze (statystycznie) przybliżenie wartości prawdziwej, jakie „możemy poznać”.



Rys.1. Schemat blokowy pomiaru bezpośredniego.  $U_A(\alpha)$ ,  $U_C(\alpha)$  — patrz rys.2  
 Fig.1. Block diagram of a direct measurement.  $U_A(\alpha)$ ,  $U_C(\alpha)$  — see Fig.2

Formalne przekształcenie wzoru (1) [7], [16] dzieli całkowity błąd pomiaru na pięć zasadniczych składników. Ten i dalszy podział oraz klasyfikację błędów przedstawiono w tabl. 1.

W części zasadniczej podziału wyróżnia się — idąc od ostatniej kolumny tabl. 1 — trzy błędy związane z procedurą fizyczną pomiaru (patrz też rys.1), a mianowicie:

- 1) błąd metody pomiarowej  $\Delta_{m,i} = q_{po} - q_r$ , wywołany oddziaływaniem energetycznym aparatury pomiarowej na obiekt badany,
- 2) błąd od zakłóceń  $\Delta_{z,i} = q_{ob,i} - q_{po}$ ,
- 3) błąd aparaturowy  $\Delta_{a,i} = q_{w,i} - q_{ob,i}$

oraz dwa błędy związane z procedurą intelektualną, nazwane błędami sztucznymi:

4) pozorny błąd przypadkowy

$$\Delta_{pp,i} = q_{w,e} - q_{w,i}, \quad (2)$$

5) poprawka

$$p = q_o - q_{w,e}. \quad (3)$$

Tablica 1

Przekształcenie wzoru definicyjnego (1) — rozdzielenie całkowitego błędu  $\Delta_C$  na pięć zasadniczych składników, dalszy podział i klasyfikacja błędów

$q_o - q_r = (q_o - q_{w,e}) + (q_{w,e} - q_{w,i}) + (q_{w,i} - q_{ob,i}) + (q_{ob,i} - q_{po}) + (q_{po} - q_r)$					
$\Delta_C = p + \Delta_{pp,i} + \Delta_{o,i} + \Delta_{z,i} + \Delta_{m,i}$					
Całkowity błąd pomiaru	Poprawka	Pozorny błąd przypadkowy	Błąd aparaturowy	Błąd od zakłóceń	Błąd metody pomiarowej
Błędy sztuczne			Błędy procedury fizycznej pomiaru		
			systematyczne		przypadkowe
			$\Delta_{o,s}, \Delta_{z,s}, \Delta_{m,s}$		$\Delta_{o,p,i}, \Delta_{z,p,i}, \Delta_{m,p,i}$
			znane	nieznane	
			$\Delta_{o,s,z}, \Delta_{z,s,z}, \Delta_{m,s,z}$	$\Delta_{o,s,n}, \Delta_{z,s,n}, \Delta_{m,s,n}$	

Niezbędny jest tu szereg komentarzy:

- Błędy 1) ... 4) indeksowane są kolejnym numerem obserwacji  $i = 1 \dots n$ , ponieważ ich wartości mogą podlegać zmianom pomiędzy obserwacjami.
- Pozorny błąd przypadkowy (pozorny — ponieważ określony względem estymatora  $q_{w,e}$  wartości oczekiwanej  $Eq_w$  wskazania, a nie względem tej wartości oczekiwanej) jest tutaj zdefiniowany jako  $q_{w,e} - q_{w,i}$ , a nie, jak to często się czyni, jako  $q_{w,i} - q_{w,e}$ . Jest to konsekwencją sposobu formalnego przekształcania wzoru (1), zastosowanego w tablicy 1.
- Nazwanie błędu 5) poprawką może wydawać się kontrowersyjne. Jest to jednak również konsekwencją przyjętego sposobu przekształcania wzoru (1). Wzór (3) ma postać zgodną z tradycją, wynika z niego bowiem ogólnie przyjęty sposób obliczania ostatecznej oceny wartości prawdziwej — wartości pozornie prawdziwej  $q_o$ .

$$q_o = q_{w,e} + p, \quad (4)$$

jako sumy wartości średniej wskazań i poprawki.



Każdy z błędów procedury fizycznej: aparaturowy  $\Delta_{a,i}$ , od zakłóceń  $\Delta_{z,i}$ , metody  $\Delta_{m,i}$  można, ogólnie biorąc, rozdzielić na część systematyczną (wartość oczekiwaną), niezależną od numeru obserwacji  $i$ , indeksowaną symbolem  $s$ , a więc odpowiednio:  $\Delta_{a,s}, \Delta_{z,s}, \Delta_{m,s}$ , oraz na część przypadkową (losową), zależną od numeru obserwacji  $i$ , stanowiącą wycentrowaną zmienną losową i indeksowaną symbolem  $p$ , a więc odpowiednio:  $\Delta_{a,p,i}, \Delta_{z,p,i}, \Delta_{m,p,i}$ . To rozdzielenie błędów reprezentują równania:

$$\begin{aligned} \text{błąd aparaturowy} & \quad \Delta_{a,i} = \Delta_{a,s} + \Delta_{a,p,i}, \\ \text{błąd od zakłóceń} & \quad \Delta_{z,i} = \Delta_{z,s} + \Delta_{z,p,i}, \\ \text{błąd metody} & \quad \Delta_{m,i} = \Delta_{m,s} + \Delta_{m,p,i}. \end{aligned} \quad (5)$$

Komentarza może wymagać pojęcie części systematycznej  $\Delta_{z,s}$  błędu od zakłóceń. Należy ją rozumieć jako błąd wywołany stałymi w czasie trwania pomiaru odchyleniami czynników i wielkości wpływających od ich stanów odniesieniowych.

Istotne wreszcie dla dalszych rozważań jest rozdzielenie każdej z części systematycznych  $\Delta_{a,s}, \Delta_{z,s}, \Delta_{m,s}$  błędów procedury fizycznej na część znaną (w pełni: co do modułu i znaku), indeksowaną symbolem  $z$ , a więc odpowiednio:  $\Delta_{a,z}, \Delta_{z,z}, \Delta_{m,z}$ , i część nieznaną (oceniającą następnie wyłącznie przedziałowo), indeksowaną symbolem  $n$ , a więc odpowiednio:  $\Delta_{a,z,n}, \Delta_{z,z,n}, \Delta_{m,z,n}$ . To rozdzielenie części systematycznych błędów procedury fizycznej reprezentują równania:

$$\begin{aligned} \text{część systematyczna błędu aparaturowego} & \quad \Delta_{a,s} = \Delta_{a,z,s} + \Delta_{a,z,n}, \\ \text{część systematyczna błędu od zakłóceń} & \quad \Delta_{z,s} = \Delta_{z,z,s} + \Delta_{z,z,n}, \\ \text{część systematyczna błędu metody} & \quad \Delta_{m,s} = \Delta_{m,z,s} + \Delta_{m,z,n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Sens tak rozbudowanej klasyfikacji błędów wyjaśnia się w znacznym stopniu przy rozpatrzeniu procedury intelektualnej pomiaru — procedury mającej na celu osiągnięcie najwyższej dokładności, możliwej dla danego zbioru obserwacji oraz ocenę osiągniętej dokładności za pomocą przyjętej miary.

Na procedurę osiągania wspomnianej najwyższej dokładności składają się dwa elementy:

- minimalizacja (w sensie statystycznym) całkowitego błędu przypadkowego, który stanowi sumę

$$\Delta_{C,p} = \Delta_{pp,i} + \Delta_{a,p,i} + \Delta_{m,p,i} \quad (7)$$

pozornego błędu przypadkowego  $\Delta_{pp,i}$  (jeden z błędów sztucznych — błędów procedury intelektualnej) i części przypadkowych  $\Delta_{a,p,i}, \Delta_{z,p,i}, \Delta_{m,p,i}$  błędów procedury fizycznej: aparaturowego  $\Delta_{a,i}$ , od zakłóceń  $\Delta_{z,i}$ , metody  $\Delta_{m,i}$ .

- kompensacja sumy części znanych  $\Delta_{a,s,z}, \Delta_{z,s,z}, \Delta_{m,s,z}$  błędów systematycznych  $\Delta_{a,s}, \Delta_{z,s}, \Delta_{m,s}$  (błędów procedury fizycznej pomiaru) za pomocą poprawki  $p$  (drugiego z błędów sztucznych — błędów procedury intelektualnej)

$$\Delta_{a,s,z} + \Delta_{z,s,z} + \Delta_{m,s,z} + p = 0 \quad \text{a stąd} \quad p = -(\Delta_{a,s,z} + \Delta_{z,s,z} + \Delta_{m,s,z}). \quad (8)$$

Wyjaśnia się tutaj rola i nazwa błędów procedury intelektualnej — są to błędy wprowadzone sztucznie (na drodze spekulacji myślowych) w celu umożliwienia minimalizacji (w sensie statystycznym) całkowitego błędu pomiaru  $\Delta_C$ .

Pozorny błąd przypadkowy  $\Delta_{pp,i}$ , dany definicją (2) i występujący w równaniu (7), można przedstawić w postaci

$$\Delta_{pp,i} = q_{w,i} - q_{w,i} = (q_{w,i} - Eq_w) - (q_{w,i} - Eq_w). \quad (9)$$

Różnica  $q_{w,e} - Eq_w$  stanowi błąd estymatora  $q_{w,e}$  wartości oczekiwanej  $Eq_w$  wskazania, natomiast różnica  $q_{w,i} - Eq_w$  jest błędem przypadkowym procedury fizycznej pomiaru, czyli

$$q_{w,i} - Eq_w = \Delta_{a,p,i} + \Delta_{m,p,i}. \quad (10)$$

Zależności (7), (9) i (10) prowadzą do wniosku, że całkowity błąd przypadkowy  $\Delta_{C,p}$  stanowi ostatecznie różnica  $q_{w,e} - Eq_w$

$$\Delta_{C,p} = q_{w,e} - Eq_w, \quad (11)$$

czyli błąd estymatora  $q_{w,e}$  wartości oczekiwanej  $Eq_w$  wskazania.

Warunkiem zatem statystycznej minimalizacji całkowitego błędu przypadkowego jest zastosowanie najlepszego estymatora wartości oczekiwanej  $Eq_w$  wskazania – wartości średniej arytmetycznej wskazań  $q_{w,\bar{s}}$ , czyli

$$q_{w,\bar{s}} = q_{w,\bar{s}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n q_{w,i}. \quad (12)$$

Podsumowaniem tych rozważań jest stwierdzenie, że warunkiem statystycznej minimalizacji całkowitego błędu pomiaru jest spełnienie zależności (12), (8) i (4). Gdy tak jest, całkowity błąd pomiaru  $\Delta_C$  — wzór (1) — stanowi suma

$$\Delta_C = \Delta_{C,p} + (\Delta_{a,s,z} + \Delta_{z,s,z} + \Delta_{m,s,z}). \quad (13)$$

W całkowitym błędzie pomiaru  $\Delta_C$  pozostają zatem jedynie składniki, które oceniać można wyłącznie przedziałowo – w najlepszym razie na określonych poziomach ufności. Nawiązując do sformułowań *Guide'a* [14], składnik  $\Delta_{C,p}$  oceniany przedziałowo metodami statystycznymi należałoby nazwać błędem typu A i oznaczać (zgodnie z symboliką tego artykułu) jako  $\Delta_A$ , a sumę

$\Delta_{a,s,n} + \Delta_{z,s,n} + \Delta_{m,s,n}$  ocenianą przedziałowo „innymi metodami” [14], błędem typu B i oznaczać jako  $\Delta_B$

$$\Delta_{C,p} = \Delta_A, \quad \Delta_{a,s,n} + \Delta_{z,s,n} + \Delta_{m,s,n} = \Delta_B \quad (14)$$

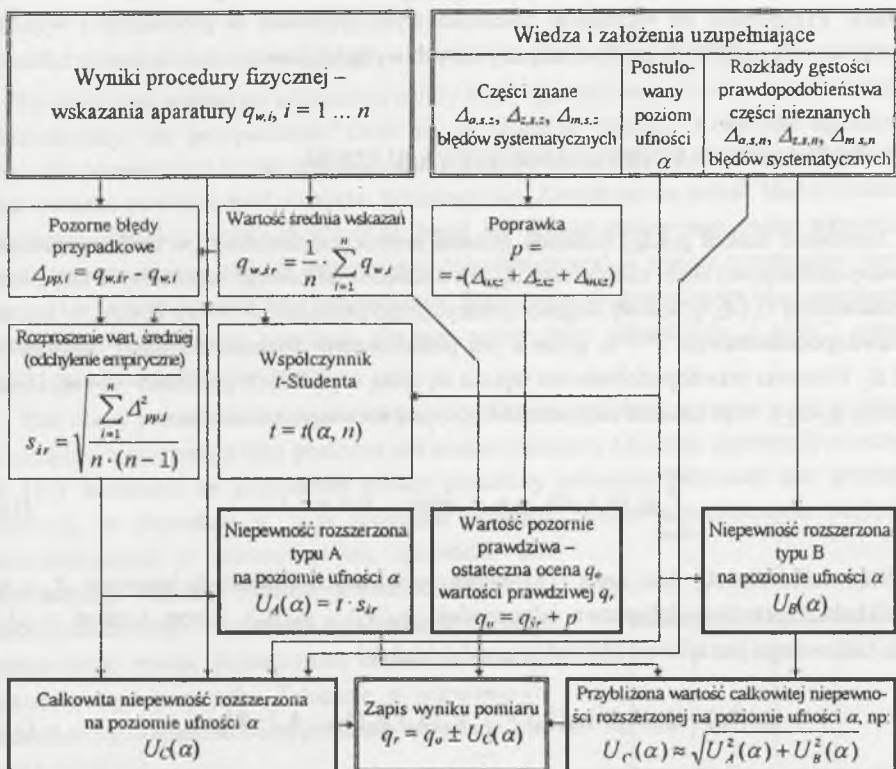
Ostatecznie zatem:

$$\Delta_C = \Delta_A + \Delta_B \quad (15)$$

gdzie:  $\Delta_C$  — całkowity błąd pomiaru,

$\Delta_A$  — składnik oceniany przedziałowo metodami statystycznymi,

$\Delta_B$  — składnik oceniany przedziałowo „innymi metodami”.



Rys.2. Schemat procedury intelektualnej  
Fig.2. Scheme of an intellectual procedure

Tu niezbędna jest uwaga, że *Guide* [14], skupiając uwagę na rozważaniach o niepewnościach typu A i typu B — przedziałowych miarach błędów, z niezrozumiałych przyczyn unika pojęcia błędu pomiaru. Wprowadzone tutaj błędy typu A oraz B należy zatem rozumieć jako błędy oceniane za pomocą niepewności odpowiednio typu A oraz B.

Unikanie pojęcia błędu przez poważny dokument międzynarodowy [14] stawia pod znakiem zapytania użyteczność tego pojęcia. Zdaniem autora użyteczność pojęcia błędu wiąże się z prostotą jego definicji (1) i analizy — rozdzielania na składniki według przyczyn powstawania i charakteru — losowego lub zdeterminowanego. Ułatwia to wnikanie w istotę procedury pomiarowej i jej doskonalenie. W analizie dokładności pomiaru błąd jest pojęciem pierwotnym, a uzasadnione hipotezy odnośnie do rozkładu jego gęstości prawdopodobieństwa prowadzą do określenia wartości miary dokładności pomiaru — niepewności.

Na zakończenie rozważań tego rozdziału na rys.2 pokazano schemat procedury intelektualnej pomiaru. Przypomina on ważniejsze zależności wykorzystywane w procedurze i wyjaśnia dodatkowo rolę niektórych spośród rozpatrywanych wyżej błędów.

### 3. ROZKŁADY PRAWDOPODOBIENSTWA BŁĘDÓW

Znajomość funkcji  $g_C(\Delta_C)$  rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (w skrócie: rozkładu prawdopodobieństwa) błędu całkowitego  $\Delta_C$  jest niezbędna do ścisłego wyznaczenia niepewności rozszerzonej  $U_C(\alpha)$ , tj. połowy długości symetrycznego przedziału  $(-U_C(\alpha), U_C(\alpha))$ , w którym z prawdopodobieństwem  $P = \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest postulowanym poziomem ufności, zawiera się błąd  $\Delta_C$ . Ponieważ prawdopodobieństwo wyraża się całką w podanych granicach  $-U_C(\alpha), U_C(\alpha)$  z funkcji  $g_C(\Delta_C)$ , więc szukana niepewność  $U_C(\alpha)$  jest rozwiązaniem równania

$$\int_{-U_C(\alpha)}^{U_C(\alpha)} g_C(\Delta_C) \cdot d\Delta_C = \alpha, \quad \text{gdzie} \quad 0 < \alpha < 1. \quad (16)$$

Błąd całkowity  $\Delta_C$  jest sumą (15) dwóch niezależnych zmiennych losowych  $\Delta_A$  i  $\Delta_B$  o rozkładach prawdopodobieństwa odpowiednio  $g_A(\Delta_A)$  i  $g_B(\Delta_B)$ . Zatem rozkład  $g_C(\Delta_C)$  błędu całkowitego jest splotem rozkładów  $g_A(\Delta_A)$  i  $g_B(\Delta_B)$

$$g_C(\Delta_C) = g_A(\Delta_A) * g_B(\Delta_B) = \int g_A(\Delta_A) g_B(\Delta_C - \Delta_A) \cdot d\Delta_A. \quad (17)$$

Przyjmuje się, że rozkład  $g_A(\Delta_A)$  błędu  $\Delta_A$  jest rozkładem Studenta o  $\nu = n - 1$  stopniach swobody – jako rozkład wartości średniej arytmetycznej  $n$ -elementowej próby z populacji o rozkładzie normalnym. Jest to konsekwencją procedury statystycznej minimalizacji błędu całkowitego  $\Delta_C$ , przedstawionej w rozdz. 2, w której milcząco założono, że obserwacje  $q_{w,i}$  mają rozkład normalny.



Ze wzoru (14) wynika, że rozkład  $g_B(\Delta_B)$  błędu  $\Delta_B$  jest spłotem rozkładów błędów  $\Delta_{a,s,n}$ ,  $\Delta_{z,s,n}$ ,  $\Delta_{m,s,n}$  — części nieznanymi błędów systematycznych: aparaturowego, od zakłóceń i metody. Określenie rozkładu  $g_B(\Delta_B)$ , stanowiącego podstawę do wyznaczenia niepewności typu B, jest zadaniem trudnym. Stwierdzenie to jest zbieżne ze stwierdzeniem *Guide'a* [14], że określenie niepewności typu B wymaga szczególnej wiedzy i umiejętności mierzącego. Częsty jest jednak szczególnie przypadek, gdy wśród nieznanymi błędów systematycznych dominuje błąd aparaturowy. Ma to miejsce przy dobrze przemyślanych i przygotowanych pomiarach realizowanych w warunkach odniesieniowych — błędy  $\Delta_{z,s,n}$  i  $\Delta_{m,s,n}$  mają wówczas znikome wartości. Taki przypadek jest dalej rozpatrywany. Zakłada się ponadto, że do wskazań aparatury nie wprowadza się poprawek, co oznacza, że składnik  $\Delta_{a,s,n}$  mieści w sobie cały błąd aparaturowy  $\Delta_a$ . Ostatecznie zatem błąd  $\Delta_B$  identyfikuje się z błędem aparaturowym

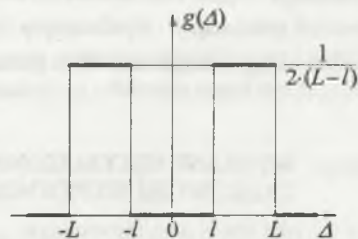
$$\Delta_B = \Delta_a, \quad (18)$$

a rozkład prawdopodobieństwa  $g_B(\Delta_B)$  — z rozkładem błędu aparaturowego.

Tu niezbędne wydaje się wyjaśnienie natury błędu aparaturowego — czy ma on charakter systematyczny, czy przypadkowy? Otóż ma on charakter dwoisty. Konkretny egzemplarz przyrządu pomiarowego w stałych warunkach pomiaru powinien mieć powtarzalne wskazania — błąd wskazań powinien mieć charakter systematyczny. Zwykle jest to jednak błąd o nieznannej punktowo wartości, natomiast znane są (lepiej lub gorzej) pewne jego cechy statystyczne (w najlepszym razie — rozkład gęstości prawdopodobieństwa) w zbiorze przyrządów danego typu — i w tym sensie jest to błąd przypadkowy. Zdarzeniem randomizującym błąd aparaturowy konkretnego egzemplarza przyrządu jest jego wybór (przy zakupie lub „z półki”) spośród wielu „takich samych” przyrządów.

Dla oceny postaci rozkładu gęstości prawdopodobieństwa błędu aparaturowego w zbiorze przyrządów tego samego typu pomocna jest analiza procedury adiustacji (kalibracji) przyrządu. W [17] wykazano na przykładzie analizy procedury adiustacji, nazwanej tam procedurą krokową, że procedura ta, przy spełnieniu pewnych założeń uzasadnionych względami metrologicznymi i ekonomicznymi, prowadzi do jednostajnego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa błędu aparaturowego. Parametrem tego rozkładu jest jego półszerokość równa dopuszczalnej wartości  $L$  błędu aparaturowego przyrządu. Założenie o jednostajnym rozkładzie błędu aparaturowego jest często spotykane, np. w [1], [4] ÷ [12].

Możliwa jest sytuacja, gdy spośród przyrządów o błędzie dopuszczalnym  $L$  i jednostajnym rozkładzie prawdopodobieństwa błędu aparaturowego wyselekcjonowano przyrządy o mniejszym błędzie dopuszczalnym  $l$  (zwykle



Rys.3. Rozkład bijednostajny  
Fig.3. Bi-rectangular distribution

$l \approx L/2$ ). Wówczas błąd aparaturowy w zbiorze przyrządów o błędzie dopuszczalnym  $L$  charakteryzuje się rozkładem bijednostajnym [9, 12, 17], jak na rys.3.

Zakładanie, że błąd aparaturowy ma rozkład jednostajny lub bijednostajny wydaje się więc dobrze uzasadnione, z wyjątkiem przypadków, gdy aparatura pomiarowa nie jest adiustowana jako całość, lecz powstaje w wyniku złożenia pewnej liczby osobno adiustowanych elementów. Wtedy rozkład prawdopodobieństwa błędu aparaturowego jest splotem odpowiedniej liczby rozkładów jednostajnych i/lub bijednostajnych [17].

#### 4. NIEPEWNOŚĆ I BŁĄD GRANICZNY POMIARU

Pojęcie niepewności pomiaru związane jest z probabilistycznym opisem wyniku pomiaru. Guide [14] rozróżnia niepewność standardową i niepewność rozszerzoną. Całkowita **niepewność rozszerzona**  $U_C(\alpha)$ , nazywana dalej wprost niepewnością, stanowi połowę długości takiego symetrycznego przedziału, że **prawdopodobieństwo**, iż błąd całkowity  $\Delta_C$  zawiera się w tym przedziale, jest **równe postulowanemu poziomowi ufności**  $\alpha$ . Ścisła wartość  $U_C(\alpha)$  jest rozwiązaniem równania (16) i jest skończona dla rozpatrywanych w rozdz. 3 rozkładów prawdopodobieństwa błędów, gdy  $\alpha < 1$ .

**Błąd graniczny**, rozumiany dosłownie, jest natomiast połową długości symetrycznego przedziału, w którym **błąd zawiera się na pewno**. Tak rozumiany błąd graniczny jest identyczny z niepewnością na poziomie ufności równym 1 — jest nieskończenie wielki i nieprzydatny w praktyce w przypadku takich rozkładów, jak rozkład normalny i Studenta. Dla rozkładu jednostajnego i bijednostajnego (rys.3) jest on natomiast równy wartości  $L$ . Stosowana w praktyce definicja błędu granicznego, określająca go jako połowę długości symetrycznego przedziału, w którym błąd mieści się z wysokim prawdopodobieństwem, jest nieelegancka, ponieważ wymaga arbitralnego określenia wartości owego „wysokiego prawdopodobieństwa”.

Zdaniem autora należałoby zrezygnować z pojęcia błędu granicznego jako niejednoznacznego. Pojęcie niepewności nie stwarza takich trudności. W przypadku rozkładów, takich jak rozkład jednostajny i bijednostajny (rys.3), istniejący w dosłownym znaczeniu błąd graniczny można zastąpić niepewnością na poziomie ufności równym 1.

#### 5. WYBRANE PRZYBLIŻONE METODY OKREŚLANIA CAŁKOWITEJ NIEPEWNOŚCI POMIARU I ICH KRYTYCZNA OCENA

Dokładne obliczenie niepewności pomiaru jako rozwiązania równania (16) jest uciążliwe i czasochłonne. Dlatego poszukuje się rozwiązań przybliżonych [6] = [16]. Gdy błąd typu A

jest błędem przypadkowym o odchyleniu empirycznym  $s_{sr}$  (rys.2), a błąd typu B – błędem aparaturowym o odchyleniu standardowym

$$\sigma_s = \begin{cases} L/\sqrt{3} & \text{dla rozkładu jednostajnego,} \\ \sqrt{7/12} \cdot L & \text{dla rozkładu bijednostajnego,} \end{cases} \quad (19)$$

*Guide* (14) zaleca formułę, która dla rozpatrywanego często podstawowego przypadku [4] ÷ [6], [8] + [12] w symbolice autora tego artykułu przybiera postać:

$$U_C(\alpha) \approx U_{C\text{Guide}} = k_C \sqrt{s_{sr}^2 + \sigma_s^2}. \quad (20)$$

Zalecanymi wartościami współczynnika rozszerzenia (coverage factor)  $k_C$  są:

$$k_C = \begin{cases} 2 & \text{dla } \alpha = 95\% \\ 3 & \text{dla } \alpha = 99\% \end{cases} \quad (21)$$

W [6], [8], [9], [12] analizowano natomiast m.in. przybliżenie niepewności  $U_C(\alpha)$  sumą geometryczną cząstkowych niepewności rozszerzonych:

$$U_C(\alpha) \approx U_{C\text{geom}} = \sqrt{U_A^2(\alpha) + U_B^2(\alpha)}, \quad (22)$$

niepewności rozszerzonej typu A na poziomie ufności  $\alpha$ :

$$U_A(\alpha) = t(\alpha, \nu) s_{sr}, \quad t \text{ — współczynnik } t\text{-Studenta dla } \nu \text{ stopni swobody} \quad (23)$$

i niepewności rozszerzonej typu B na poziomie ufności  $\alpha$ :

$$U_B(\alpha) = \begin{cases} a \cdot L & \text{dla rozkładu jednostajnego,} \\ (1 + \alpha) \cdot L/2 & \text{dla rozkładu bijednostajnego.} \end{cases} \quad (24)$$

Należy tutaj zauważyć, że *Guide* [14] nie wprowadza pojęcia cząstkowych niepewności rozszerzonych typu A i typu B.

Każde z przybliżeń (20) i (22) daje, ogólnie biorąc, inną wartość całkowitej niepewności rozszerzonej, różną od wartości poprawnej. Miarą niedoskonałości przybliżenia może być [6], [8], [9], [12] różnica

$$\Delta \alpha = \gamma - \alpha, \quad (25)$$

między odpowiadającym wybranemu przybliżeniu  $U_{C\text{przybl}}$  wynikowym poziomem ufności  $\gamma$ :

$$\gamma = \int_{-U_{C\text{przybl}}}^{U_{C\text{przybl}}} g_C(\Delta_C) d\Delta_C \quad (26)$$

a postulowanym poziomem ufności  $\alpha$ .



Szczegółową analizę sumy geometrycznej z punktu widzenia miary (25) przedstawiono we wspomnianej publikacji [9]. Tutaj ograniczono się do tabelarycznego zestawienia (tabl. 2) wartości tej miary dla dwóch wartości postulowanego poziomu ufności  $\alpha$ : 99% i 95% oraz dla dwóch rozpatrywanych przybliżeń całkowitej niepewności rozszerzonej  $U_C(\alpha)$  — wg *Guide 'a*  $U_C$  *Guide* (20) i sumy geometrycznej  $U_C$  *geom* (22). Przyjęto też założenie, że błąd  $\Delta_B$  ma rozkład jednostajny. Wartość miary  $\Delta\alpha$  jest funkcją stosunku  $U_B(\alpha)/U_A(\alpha)$  cząstkowych niepewności rozszerzonych — (23), (24). W tabl. 2 wartości tej miary podano dla czterech wartości tego stosunku: skrajnych — 0 i  $\infty$  oraz takich, dla których wartość miary jest ekstremalna. Dane w tabl. 2 mają postać ułamka: licznik podaje wartość miary  $\Delta\alpha$ , a mianownik — wartość stosunku  $U_B(\alpha)/U_A(\alpha)$ .

Ujemne wartości miary  $\Delta\alpha$  (25) oznaczają, że wynikowy poziom ufności  $\gamma$  (26) jest niższy od postulowanego  $\alpha$  — poziom ufności jest zanizony. Przybliżenie całkowitej niepewności rozszerzonej  $U_C(\alpha)$  sumą geometryczną (22) — zacięniowane kolumny tabl. 2 — na ogół zaniża poziom ufności, ale to zniżenie jest zwykle znacznie mniejsze (z wyjątkiem przypadków wyróżnionych intensywniejszym cieniowaniem) niż zniżenie wywołane przybliżeniem (20) wg *Guide 'a*. Sumowanie geometryczne daje poprawne wyniki przy dominacji jednej z niepewności cząstkowych. Tej ostatniej cechy nie ma przybliżenie wg *Guide 'a*.

Suma geometryczna jako przybliżenie niepewności rozszerzonej ma zarówno zwolenników, jak i przeciwników. W dyskusji na Sympozjum nt. „Elektrycznych pomiarów dokładnych” w Gliwicach w dniach 19-21 listopada 1997 r. — wypowiedzi J. Jakubca i T. Skubisa wykazały, że sumowanie geometryczne jest chętnie stosowane w zespole Instytutu Metrologii i Automatyki Elektrotechnicznej Politechniki Śląskiej. Przykładem może być publikacja [18].

Przybliżenia sumą geometryczną nie można jednak stosować bezkrytycznie — w innych, nie pokazanych tutaj sytuacjach, wspomniane zniżenie poziomu ufności może być znacznie większe. Na przykład, według [9], w sytuacji różniącej się od wyżej rozpatrywanej tym, że błąd typu B ma rozkład bijednostajny, zniżenie może sięgać ok. 7,4% dla  $\alpha = 95\%$  przy  $\nu = \infty$  oraz  $U_B(\alpha)/U_A(\alpha) \approx 1.7$ .

Stosunkowo łatwe obliczeniowo są następujące przykłady:

- Błąd całkowity jest sumą dwóch niezależnych składników o takich samych rozkładach jednostajnych o półszerokości  $L$ , ma zatem rozkład trójkątny o półszerokości  $2 \cdot L$  i wysokości  $1/(2 \cdot L)$ . Niepewności cząstkowe na poziomie ufności  $\alpha = 100\%$  mają wartości równe  $L$ , a ich suma geometryczna — wartość  $\sqrt{2} \cdot L$ . Przedział błędu całkowitego ( $-\sqrt{2} \cdot L, \sqrt{2} \cdot L$ ) nie obejmuje całego pola powierzchni pod wykresem funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu całkowitego — poza obszarem ograniczonym wymienionymi wartościami błędu pozostają dwa pola, każde o kształcie trójkąta prostokątnego o podstawie  $(2 - \sqrt{2}) \cdot L$  i wysokości  $(2 - \sqrt{2})/(4 \cdot L)$ . Jeśli zatem jako całkowitą niepewność rozszerzoną przyjąć wartość sumy geometrycznej  $\sqrt{2} \cdot L$ , to wynikowy poziom ufności  $\gamma$  osiągnie wartość:



$$1-2 \text{ pola ww. trójkątów} = 1 - 2(1/2)(2 - \sqrt{2}) \cdot L \cdot (2 - \sqrt{2}) / (4 \cdot L) \approx 0,914 = 91,4\%.$$

Jest to poziom ufności znacznie niższy od postulowanego  $\alpha = 100\%$ .

Tablica 2

Zestawienie wartości miary niedoskonałości (25)

przybliżen całkowitej niepewności rozszerzonej  $U_C(\alpha)$  o postaci wg *Guide'a* (20) i o postaci sumy geometrycznej (22) cząstkowych niepewności rozszerzonych  $U_A(\alpha)$  i  $U_B(\alpha)$

v	1		2		3		6		$\infty$	
	<i>Guide</i>	geom.	<i>Guide</i>	geom.	<i>Guide</i>	geom.	<i>Guide</i>	geom.	<i>Guide</i>	geom.
wartość $\Delta\alpha$ w % dla $\alpha = 99\%$ $U_B(\alpha)/U_Z(\alpha)$										
<i>pocz.</i>	$\frac{-19,5\%}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-8,5\%}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-4,8\%}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-1,4\%}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-0,7\%}{0}$	$\frac{0}{0}$
<i>min.</i>	j.w.	*)	j.w.	**)	j.w.	$\frac{-0,5\%}{3,1}$	j.w.	$\frac{-1,4\%}{2,4}$	j.w.	$\frac{-2,56\%}{1,8}$
<i>maks.</i>	$\frac{1,0\%}{\infty}$	$\frac{-0,5\%}{5,9}$	$\frac{1,0\%}{\infty}$	**)	$\frac{1,0\%}{\infty}$	*)	$\frac{1,0\%}{\infty}$	*)	$\frac{1,0\%}{\infty}$	*)
<i>końc.</i>	j.w.	$\frac{0}{\infty}$	j.w.	$\frac{0}{\infty}$	j.w.	$\frac{0}{\infty}$	j.w.	$\frac{0}{\infty}$	j.w.	$\frac{0}{\infty}$
dla $\alpha = 95\%$										
<i>pocz.</i>	$\frac{-24,5\%}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-13,3\%}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-8,9\%}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-4,3\%}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{-0,4\%}{0}$	$\frac{0}{0}$
<i>min.</i>	j.w.	$\frac{-0,4\%}{10}$	j.w.	**)	j.w.	$\frac{-0,6\%}{1,6}$	j.w.	$\frac{-1,2\%}{1,5}$	j.w.	$\frac{2,0\%}{1,4}$
<i>maks.</i>	$\frac{5,0\%}{\infty}$	$\frac{0,9\%}{2,3}$	$\frac{5,0\%}{\infty}$	**)	$\frac{5,0\%}{\infty}$	$\frac{0,1\%}{15}$	$\frac{5,0\%}{\infty}$	$\frac{0,1\%}{15}$	$\frac{5,0\%}{\infty}$	$\frac{0,2\%}{15}$
<i>końc.</i>	j.w.	$\frac{0}{\infty}$	j.w.	$\frac{0}{\infty}$	j.w.	$\frac{0}{\infty}$	j.w.	$\frac{0}{\infty}$	j.w.	$\frac{0}{\infty}$

Objaśnienia i uwagi:

v — liczba stopni swobody w rozkładzie Studenta błędu typu A,

*pocz.* — wartość „początkowa” — dla  $U_B(\alpha)/U_A(\alpha) = 0$ ,

*min.* — wartość w minimum, *maks.* — wartość w maksimum,

*końc.* — wartość „końcowa” — dla  $U_B(\alpha)/U_A(\alpha) = \infty$ ,

\*) — ekstremum niezauważalne,

\*\*) — dla  $v = 2$  zachodzi  $\Delta\alpha = 0 = \text{const} \cdot f(U_B(\alpha)/U_A(\alpha))$  — brak ekstremów, suma geometryczna daje wynik poprawny.

Błąd całkowity jest sumą  $n \gg 1$  niezależnych błędów o takich samych rozkładach jednostajnych o półszerokości  $L$ , ma zatem, praktycznie biorąc, rozkład normalny (ze względu na  $n \gg 1$  i centralne twierdzenie graniczne rachunku prawdopodobieństwa). Niepewności cząstkowe na poziomie ufności  $\alpha = 95\%$  mają wartości  $0,95 \cdot L$ , a ich suma geometryczna — wartość  $0,95 \cdot L \cdot \sqrt{n}$ . Odchylenie standardowe każdego ze składników błędu ma wartość  $L/\sqrt{3}$ , a odchylenie standardowe błędu całkowitego jest  $\sqrt{n}$ -krotnie większe — ma wartość  $\sqrt{n} \cdot L/\sqrt{3}$ . Jeśli jako niepewność całkowitą przyjąć  $0,95 \cdot L \cdot \sqrt{n}$ , to oznaczać to będzie przyjęcie współczynnika rozszerzenia (stosunku niepewności rozszerzonej do odchylenia standardowego błędu całkowitego) o wartości

$$(0,95 \cdot L \cdot \sqrt{n}) / (\sqrt{n} \cdot L/\sqrt{3}) = 0,95 \cdot \sqrt{3} \approx 1,65.$$

Tej wartości współczynnika rozszerzenia przy rozkładzie normalnym odpowiada poziom ufności  $\gamma \approx 90\%$ , niższy od postulowanego  $\alpha = 95\%$ .

## LITERATURA

1. Trzetrzeviński S.: Dokładność pomiarów elektrycznych. Maszynopis referatu wygłoszonego we Wrocławiu w latach 50., 24 s.
2. Bek J.: Błąd a niepewność pomiaru. Materiały VII Krajowej Konferencji Metrologii, t. I. Politechnika Warszawska, s. 25÷30, Warszawa 1995.
3. Kubisa S.: O niektórych problemach dydaktyki podstaw metrologii. Materiały VII Krajowej Konferencji Metrologii, t. I. Politechnika Warszawska, s. 81÷86, Warszawa 1995.
4. Turzeniecka D., Waśkiewicz Z.: Wybrane problemy wspomaganego komputerowo statystycznej oceny niepewności pomiaru. Materiały VII Krajowej Konferencji Metrologii, t. I. Politechnika Warszawska, s. 135÷142, Warszawa 1995.
5. Turzeniecka D., Waśkiewicz Z.: Analiza sytuacji niejednoznacznych w ocenie niepewności wyniku pomiarów. Metrologia i Systemy Pomiarowe, z. 1, Warszawa 1996.
6. Kubisa S., Turzeniecka D.: Evaluation of some Approximated Methods of Measurement Uncertainty Estimation. Proc. of the Third International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, 10÷13 Sept. 1996, Międzyzdroje, s. 537÷542.
7. Turzeniecka D., Kubisa S.: Error and Uncertainty in Measurement – Teaching Problems. Proc. of 3rd East-West Congress on Engineering Education, Gdynia, 15÷20 September 1996, s. 118÷122.
8. Turzeniecka D., Kubisa S.: The Measures of Imperfection of Chosen Approximated Methods of Combined Expanded Uncertainty Estimation in Measurement. Metrologia i Systemy Pomiarowe, z. 3 – 4/1996, s. 143÷155, Warszawa 1997.
9. Kubisa S.: Geometric Sum of the Expanded Uncertainties as an Estimate of the Combined Expanded Uncertainty in Measurement. Metrologia i Systemy Pomiarowe, z. 3 – 4/1996, s. 157÷167, Warszawa 1997.

10. Kubisa S., Turzeniecka D.: Analiza porównawcza pewnych przybliżonych metod oceny niepewności. Materiały III Szkoły-Konferencji „Metrologia wspomagana komputerowo”, Zegrze k. Warszawy, 19÷22 maja 1997, t. 2, s. 13÷18.
11. Turzeniecka D.: Relations Between Selected Uncertainties and Their Influence on the Accuracy of Various Evaluation. Proc. of the 4th International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics, 26÷29 Aug. 1997, Międzyzdroje, t. 2, s. 573÷578.
12. Kubisa S.: Generalised Geometric Sum of the Expanded Uncertainties as an Estimate of Combined Expanded Uncertainty. Proc. of the 4th International Symp. on Methods and Models in Automation and Robotics, 26÷29 Aug. 1997, Międzyzdroje, t. 2, s. 593÷598.
13. Jaworski J. M.: Niedokładność, błąd, niepewność. Materiały XXIX Międzyuczelnianej Konferencji Metrologów, Nałęczów 10÷12 września 1997 r., Lublin 1997, s. 197÷216.
14. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO/IEC/OIML/BIPM, first edition (1992).
15. Jaworski J. M.: Matematyczne podstawy metrologii. WNT, Warszawa 1979.
16. Kubisa S.: Podstawy metrologii. Wyd. Uczeln. Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1995.
17. Kubisa S.: Studium rozkładów gęstości prawdopodobieństwa błędów pomiaru. PAN, O. w Katowicach, Prace Komisji Metrologii PAN, Seria: Konferencje nr 1, Podstawowe Problemy Metrologii, Gliwice – Ustroń 1998, s. 106÷116.
18. Jakubiec J., Al Raimi H.: Niepewność pomiaru a/c wartości chwilowych przebiegów sinusoidalnie zmiennych. ZN Pol. Śl., s. Elektryka, z. 158, s. 83 – 91, Gliwice 1997.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Jan Zakrzewski

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 grudnia 1997 r.

## Abstract

The paper suggests, that a thorough classification and analysis of the measurement error components, their sources and probability density distributions, ought to be a basis of a measurement uncertainty evaluation. The approach is different than the one presented by the *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* [14], which rather avoids the concept of the error. The propositions of the errors classification are given in the first part of the paper.

The second part of the paper deals with the problems of the concepts of a limit error and an uncertainty of measurement. It treats the limit error as the expanded uncertainty on a confident level equal to certainty and concludes, that the limit error concept is rather not accepted in the contemporaries, when the probability approach is dominant.

The problems of a calculation of the combined expanded uncertainty are considered in the third part of the paper. A comparison of two methods of the calculation: the method recommended by *Guide* and the method of the geometric sum of two partial expanded uncertainties is presented. The consideration proves, that the geometric sum method may be better than the *Guide*'s one. Some limitations of the geometric sum method are shown as well.