

JANUSZ WANDRASZ

Instytut Techniki Ciepłej

MODELOWANIE JEDNO I DWUWYMIAROWEGO NIEUSTALONEGO
POLA TEMPERATUR ZA POMOCĄ WANNY ELEKTROLITYCZNEJ

Streszczenie. W artykule omówiono teorię modelowania jedno i dwuwymiarowego nieustalonego pola temperatur za pomocą wanny elektrolitycznej. Badania oparto o metodę Iib-manna stosowaną w analogach typu R. W końcowej części przedstawiono wyniki modelowania jednowymiarowego nieustalonego pola temperatur dla nieograniczonej płyty płaskiej ogrzewanej dwustronnie.

1. Wstęp

Nieustalone pole temperatur dla ciała znajdującego się w spoczynku przy założeniu jego izotropowej budowy oraz stałych własności materiałowych (λ idem, $c_p = \text{idem}$, $\rho = \text{idem}$) i przy nieobecności wewnętrznych źródeł ciepła można opisać równaniem Fouriera-Kirchhoffa

$$\text{div}(\text{grad } U) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} \quad (1)$$

Rozwiązanie analityczne powyższego równania dla znanych przestrzennych i czasowych warunków brzegowych jest możliwe tylko w najprostszych przypadkach. Do jego rozwiązania stosowane są zwykle przybliżone metody różnicowe (metoda ilorazu różnicowego przedniego oraz ilorazu różnicowego wstecznego) lub metoda Monte-Carlo.

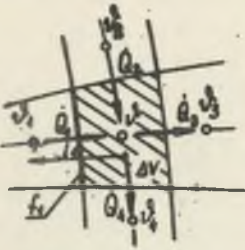
Rozwiązanie można również uzyskać w oparciu o analogie fizyczne, np. za pomocą wanny elektrolitycznej. Zagadnienie modelowania ustalonego pola temperatur w wannie przedstawiono w pracy [5]. Uwzględniono tam modelowanie warunków brzegowych oraz ogólne zasady doboru elektrolitu, elektrod i częstotliwości prądu.

Modelowanie nieustalonego pola temperatur jest problemem nieco bardziej złożonym opartym na metodzie ilorazu różnicowego wstecznego.

2. Modelowanie węzła wewnętrznego

Równanie różnicowe węzła wewnętrznego w układzie dwuwymiarowym (rys.1 dla metody ilorazu różnicowego wstecznego można przedstawić w postaci:

$$\sum_{i=1}^4 \left[\frac{\partial U_i}{\partial t} \right]_{t+\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} c_p \rho \Delta U, \quad (2)$$



Rys. 1. Przepływ strumienia ciepła dla węzła wewnętrznego obszaru

gdzie:

- objętość rozpatrywanego elementu,
- ΔV_i - różnica temperatur węzła sąsiedniego i badanego w chwili $\tau + \Delta\tau$
- $R_i = \frac{l_i}{\lambda_i f_i}$ - opór przewodzenia ciepła od węzła "i" do węzła rozpatrywanego elementu,
- f_i - pole powierzchni bocznej rozpatrywanego elementu od strony węzła i,
- l_i - odległość między węzłem rozpatrywanego elementu a węzłem i,
- $c_p \cdot \rho$ - ciepło właściwe oraz gęstość masy badanego materiału,
- $\frac{\Delta V_i}{\Delta\tau}$ - przyrost temperatury rozpatrywanego węzła w przedziale czasu $\Delta\tau$ od chwili τ do $\tau + \Delta\tau$

Wykorzystując założenie izotropowości modelowanego ciała oraz stałość jego własności materiałowych można przekształcić równanie (2) do postaci:

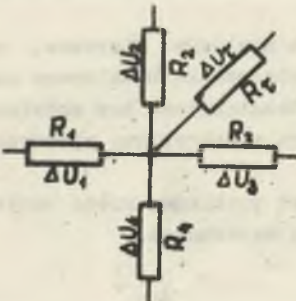
$$\sum_{i=1}^4 \left[\frac{\Delta V_i}{R_i} \right] \tau + \Delta\tau = \frac{\Delta V_i}{R_i} \Delta\tau, \quad (3)$$

gdzie:

$$R_{\tau} = \frac{\Delta\tau a}{\Delta V} - \text{"opór czasowy"} \text{ m}^{-1},$$

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} - \text{współczynnik przewodzenia temperatury, m}^2/\text{s},$$

$$R_i = l_i / f_i$$



Rys. 2. Schemat blokowy rezystorów zastępujących rezystory warstw elektrolitu

Przy modelowaniu oporów równania (3) w wannie elektrolitycznej można je zastąpić odpowiednio rezystancjami warstw elektrolitu o odpowiedniej długości l_i i przekroju warstwy f_{e1} . Schemat połączenia rezystorów przedstawiono na rys. 2. Opór czasowy modelowany rezystorem "czasowym" zgodnie z [3] włączono w węzeł rozpatrywanego elementu.

Prawo Kirchhoffa dla układu zastępczego przedstawionego na rys. 2 można zapisać równaniem:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\Delta U_i}{R_{e1}} = \frac{\Delta U_{\tau}}{R_{e1}}, \quad (4)$$

gdzie:

ΔU - spadki potencjałów na rezystorach R_{ei} ($\Delta U_i = U_i - U, \Delta U_e = U - U_e$)

$R_{ei} = \rho_e \frac{L_i}{f_{ei}}$ - rezystancja warstwy elektrolitu,

ρ_e - rezystywność elektrolitu,

L_i - odległości między elektrodami modelu,

f_{ei} - przekrój poprzeczny warstwy elektrolitu.

Z równań (3) i (4) przy założeniu stałej rezystywności elektrolitu można określić odległości między elektrodami modelu

$$L_i = A l_i \frac{f_{ei}}{f_i} \quad (5)$$

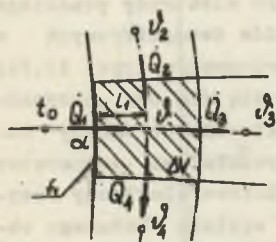
oraz długość rezystora czasowego dla przyjętego przekroju warstwy elektrolitu f_{ei}

$$L_{ti} = A f_{ei} R_{ei} \quad (6)$$

W równaniach (5) i (6) A oznacza skalę geometryczną modelu.

3. Modelowanie warunków brzegowych

Zagadnienie modelowania warunków brzegowych dla nieustalonego pola temperatur jest podobne jak dla przypadków pola ustalonego [5]. Zazwyczaj modelowany jest trzeci warunek brzegowy (znana temperatura ośrodka t_0 oraz współczynnik wnikania ciepła α). Dla węzła leżącego przy powierzchni obszaru (rys. 3) równanie (2) nie zmienia swojej ogólnej postaci. Występujący w tym równaniu opór R_i pomiędzy ośrodkiem o temperaturze t_0 i rozpatrywanym węzłem należy wyrazić zależnością



Rys. 3. Przepływ strumieni ciepła dla węzła zewnętrznego

$$R_i = \frac{1}{\alpha_i f_i} + \frac{l_i}{f_i \lambda_i} \quad (7)$$

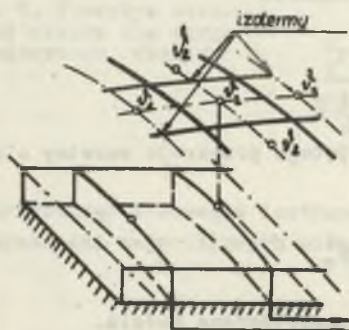
Przekształcona wartość tego oporu do postaci z równania (3) wyraża się równaniem

$$R'_i = \frac{\lambda_i l_i}{\alpha_i f_i} + \frac{l_i}{f_i} \quad (8)$$

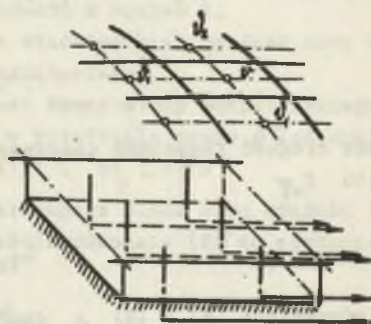
Modelowana w wannie odległość między węzłem siatki i ośrodkiem będzie w tym przypadku sumą dwu odległości – odległości modelującej opór wnikania ciepła oraz przewodzenia od ścianki do węzła. Zagadnienie to szerzej omówiono w pracy [5].

4. Konstrukcja modelu oraz metoda pomiaru

Wykorzystanie w badaniach metody Libmanna wymaga włączenia w węzły modelowanej siatki dodatkowych "rezystorów czasowych". W układach jednowymiarowych, w których temperatura zmienia się tylko wzdłuż jednej współ-



Rys. 4. Modelowanie jednowymiarowego nieustalonego pola temperatur

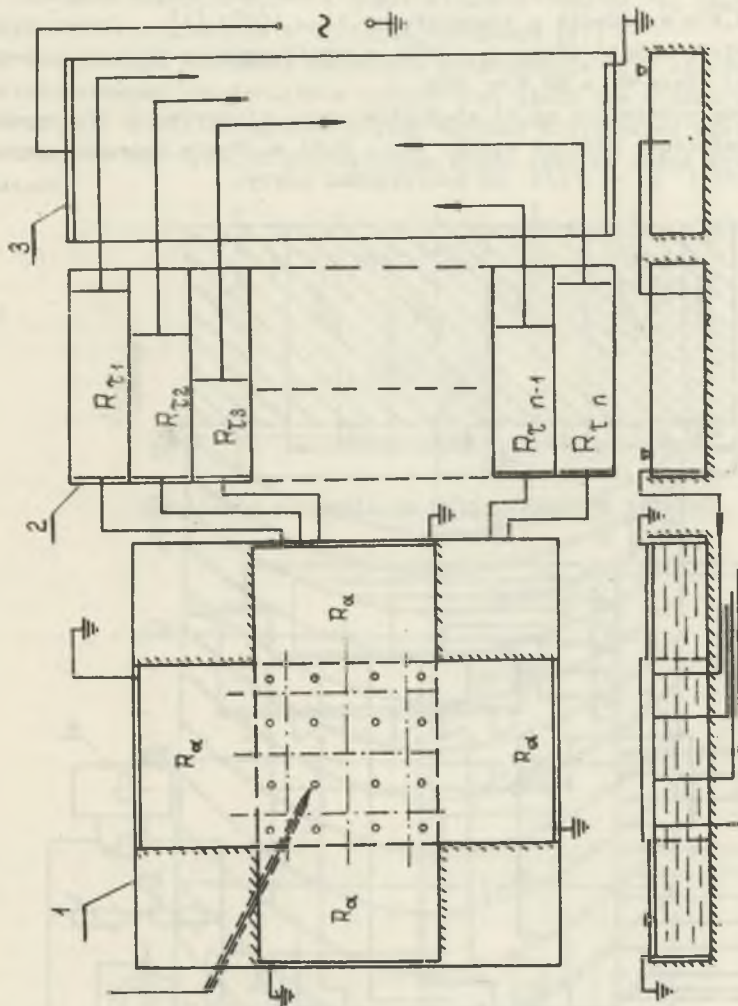


Rys. 5. Modelowanie dwuwymiarowego nieustalonego pola temperatur

rzędnej, można zastosować wewnątrz modelowego obszaru elektrody przebiegające wzdłuż linii izotermicznych (rys. 4). Dla układów dwuwymiarowych w punkty węzłowe siatki wprowadzamy elektrody w postaci prętów (rys. 5). Podłączone do tych elektrod rezystory czasowe modeluje się dla obu przypadków w osobnej części wanny zawierającej ten sam elektrolit co badany obszar (rys. 6). Odpowiadający założonemu pierwotnie rozkładowi temperatur rozkład napięć zadaje się z dzielnika napięć na wejściowe elektrody rezystorów czasowych. Mierząc uzyskany rozkład napięć w węzłach badanego obszaru otrzymujemy rozkład odpowiadający chwili po kroku $\Delta\tau$. Przeniesienie uzyskanego rozkładu na elektrody wejściowe rezystorów czasowych da w węzłach obszaru rozkład odpowiadający odstępowi czasowemu $2\Delta\tau$.

Zastosowanie w badaniach metody ilorazu różnicowego wstecznego nie narzuca ograniczeń w doborze kroku czasowego $\Delta\tau$. Zmiana jego wartości wymaga jedynie zmiany odległości pomiędzy elektrodami rezystora czasowego. Można więc określić rozkład temperatur po dowolnym kroku czasowym $\Delta\tau$ (nawet zmiennym) i po interesującym nas odstępzie czasu $\tau = n \Delta\tau$.

Przedstawiony schemat modelowanego dwuwymiarowego pola temperatur (rys 6) posiada dodatkową wannę służącą jako dzielnik napięcia. Granice modelowanego obszaru znajdują się wewnątrz bryły elektrolitu. W wannie głównej odległości między elektrodami a granicami obszaru przedstawiają zamodelowane warunki brzegowe.



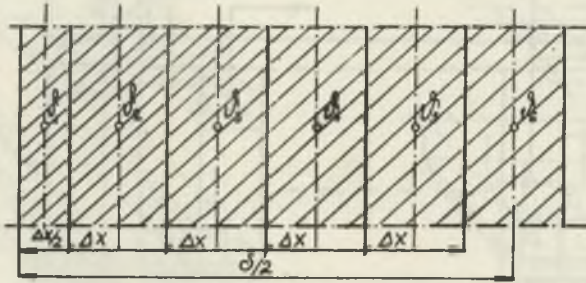
Rys. 6. Schemat stanowiska badawczego z zamodelowanym dwuwymiarowym polem temperatur

1 - wanna, 2 - wanna z zamodelowanymi oporami czasowymi, 3 - dzielnik napięcia

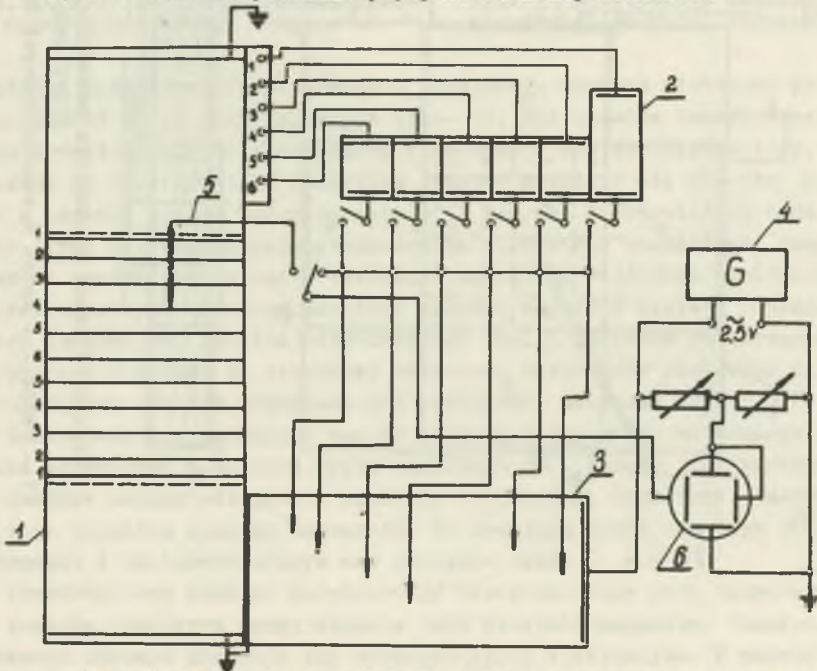
5. Modelowanie płaskiej płyty - model jednowymiarowy

Celem skontrolowania poprawności przedstawionej teorii modelowania zamodelowano w wannie elektrolitycznej przypadek ogrzewania dwustronnego płyty stalowej ($\lambda = 40 \text{ W/m deg}$; $a = 9,48 \text{ m}^2/\text{s}$) nieskończenie długiej o grubości $\delta = 0,4 \text{ m}$ w ośrodku o temperaturze $t_0 = 500^\circ\text{C}$ [1]. Temperaturę początkową płyty przyjęto równą $t_p = 0^\circ\text{C}$, a współczynniki wnikania ciepła równe z obu jej stron $\alpha = 60 \text{ W/m}^2 \text{ deg}$.

Modelowaną płytę podzielono na 11 elementów (rys. 7) uzyskując dla węzłów wewnętrznych jednaki podział siatki $\Delta x = 0,04 \text{ m}$. Węzły brzegowe umieszczono w odległości $l_1 = \Delta x/4$ od powierzchni płyty.



Rys. 7. Schemat podziału płyty na elementy różnicowe



Rys. 8. Schemat stanowiska badawczego z zamodelowaną płytą
 1 - wanna, 2 - rezystory czasowe, 3 - dzielnik napięcia, 4 - generator, 5 - sonda główna, 6 - oscyloskop OK-15

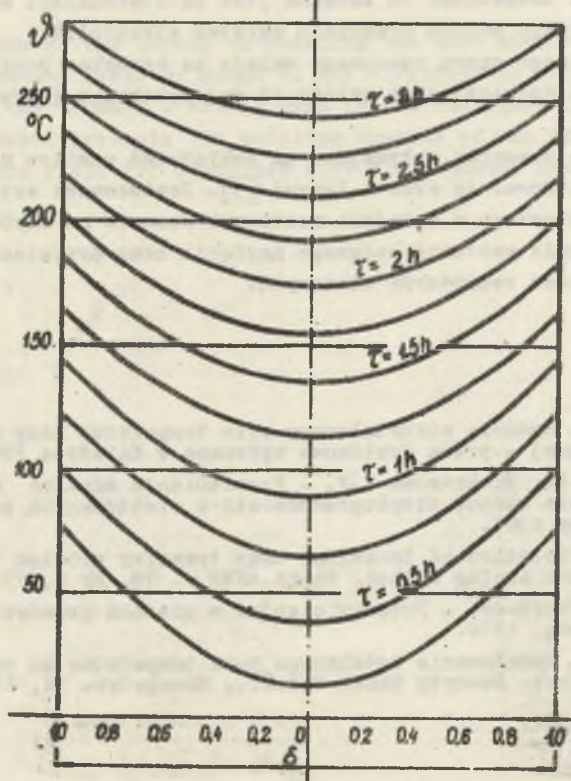
Model wykonano w skali 1:2 ze szkła organicznego (rys. 8) umieszczając w węzłach modelowanej siatki płyty miedziane. Elektrody imitujące temperaturę ośrodka wykonano z tej samej blachy miedzianej. W pomiarach elektrolitem był 0,01 n roztwór NaCl. Jako źródło zasilania zastosowano generator podający napięcie 2,5 V o częstotliwości 1000 Hz. Do pomiaru wartości napięcie użyto oscyloskopu w układzie mostkowym (5).

W modelowanym przypadku wszystkie powierzchnie f_i są równe i dlatego przekrój warstwy elektrolitu w wannie jest stały ($f_e = idem$). Wynikające z równań (3) i (4) odległości między węzłami modelowanej siatki oraz długości warstw elektrolitu modelującego opory czasowe można wyrazić zależnościami

$$L_1 = A \cdot l_1 \tag{9}$$

oraz

$$L_1 = A \frac{f_e \tau_i a \Delta T_i}{f_e \Delta x_i} \tag{10}$$



Rys. 9. Rozkład temperatur w płycie dla $0 \leq \tau \leq 3$ h uzyskany w wyniku pomiarów

gdzie Δx_1 oznacza szerokość siatki dla modelowanego węzła i. Badania wykonano dla czasu ogrzewania $\tau = 15$ h przyjmując krok czasowy $\Delta\tau = 0,25$ h. Uzyskane wyniki dla zakresu $0 \leq \tau \leq 3$ h przedstawiono na rys. 9.

Celem porównania otrzymanych wyników w oparciu o równanie (17) wyznaczono, na drodze analitycznego jego rozwiązania, rozkłady temperatur dla modelowanych kroków czasowych. Dokładność uzyskiwanych wyników zależna jest od przyjętego kroku czasowego zmieniając się od ~ 5 deg (średnie odchylenie wartości zmierzonej i obliczonej) przy trzech krokach czasowych do $\sim 0,1$ deg dla sześćdziesięciu kroków.

6. Wnioski

Przedstawiona metoda modelowania nieustalonego pola temperatur w wannie elektrolitycznej opracowana w Katedrze Podstaw Techniki Ciepłej Pol. Śl. pod kierunkiem Prof. dr inż. Jana Szarguta odbiega od metod dotychczas stosowanych [2]. W badaniach nie jest wymagana znajomość konduktywności elektrolitu, a rodzaj jego zależy od stosowanych elektrod i częstotliwości prądu [5]. Otrzymane wyniki świadczą o możliwości uzyskania dużej dokładności. Dokładność ta zależna jest od staranności wykonania modelu oraz właściwego doboru przekroju warstwy elektrolitu.

Błąd modelowanego oporu czasowego maleje ze wzrostem przekroju warstwy elektrolitu, a w szczególności zależy od jej wysokości (wpływ nierówności dna wanny).

Przedstawione czynniki wpływające na dokładność pomiaru nie są jedynymi i należy analizować je wraz z innymi [5]. Zastosowana metoda pomiaru przy użyciu oscyloskopu w układzie mostkowym pozwala na szybkie i zarazem dokładne określenie wartości badanego napięcia oraz przeniesienia go na elektrody wejściowe rezystorów czasowych.

LITERATURA

- 1; Balcarek A. - Badania nieustalonego pola temperatur przy pomocy wanny elektrolitycznej - praca dyplomowa wykonana w Katedrze PTC Pol.Śl.1971
2. Dieniskin Ju.D., Niekrasowa I.F. - Promienienie metoda modelowania dla rieszienia zadacz ciepłoprzewodnosti w elektronnych priborach - ENERGIJA - Moskwa 1969.
3. Libmann G. - Solution of transient heat transfer problem by the resistance - network analog method. Trans.ASME v. 78, Nr 6, 1956.
4. Szargut J. - Wykłady - Procesy cieplne w piecach przemysłowych, Politechnika Śląska, 1970.
5. Wandrasz J. - Modelowanie ustalonego pola temperatur za pomocą wanny elektrolitycznej. Zeszyty Nauk. Pol.Śl., Energetyka 34, 1970

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНО- И ДВУХМЕРНОГО НЕУСТАЛОНОВЛЕГОСЯ
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ВАННЫ

Р е з ю м е

В статье представляется теория моделирования температурного поля при помощи электролитической ванны. Описывается постройка модели и метод измерений. Исследования сделаны по методу Либмана, применяемому в аналогах типа R-сетки.

В заключительной части статьи представлены результаты моделирования одномерного нестационарного температурного поля бесконечной плоской плиты при двухстороннем обогревании.

MODELING ONE- AND TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY TEMPERATURE
FIELD BY MEANS OF THE ELECTROLYTIC TANK

S u m m a r y

Paper discusses the theory of modeling the one- and two-dimensional unsteady temperature field by means of the electrolytic tank. Examinations are based on the Libmann's method used in the analogues of R-type. The final part of paper presents the modeling results of one dimensional unsteady temperature field for boundless flat plate heated from both sides.