ENERGETYKA z. 42a

BOHDAN MOCHNACKI

METODA WARSTWICOWA NUMERYCZNEGO MODELOWANIA POLA TEMPERATUR W CIAŁACH STAŁYCH

(UOGÓLNIENIE METODY)

POLITECHNIKA ŚLĄSKA
ZESZYT NAUKOWY Nr 349 – GLIWICE 1972

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 349

BOHDAN MOCHNACKI

METODA WARSTWICOWA NUMERYCZNEGO MODELOWANIA POLA TEMPERATUR W CIAŁACH STAŁYCH

(UOGÓLNIENIE METODY)

PRACA HABILITACYJNA Nr 111

GLIWICE 1972

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Iwo Pollo

REDAKTOR DZIAŁU

Ryszard Petela

SEKRETARZ REDAKCJI

Witold Gużkowski

Dział Wydawnictw Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Kujawska 2

Nakł. 50+170 Ark. wyd. 1,75 Ark. druk. 3 Papier offsetowy kl. III, 70x100, 80 g
Oddano do druku 12. 9. 1972 Podpis. do druku 6. 9. 1972 Druk ukończ. w październ. 1972
Zamówienie 1142 12. 9. 1972 R-23 Cena zł 4,—

Skład, fotokopie, druk i oprawę
wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

W niniejszej drugiej części rozprawy habilitacyjnej przedstawiono dalsze rozwinięcie metody numerycznego modelowania problemów przewodnictwa cieplnego, opublikowanej w części pierwszej. Rozwiązanie podane w pierwszej części pracy uogólniono na przypadki siatek krzywoliniowych, co znacznie zwiększyło możliwości praktycznego wykorzystania metody warstwic. Inspiracją dla rozszerzenia rozprawy habilitacyjnej przez opublikowanie dalszych wyników były sugestie Recencentów rozprawy.

Ponieważ w części pierwszej podano pełny wykaz literatury dotyczącej omawianych zagadnień, więc w tej części pracy ujęto w spisie literatury jedynie część pierwszą rozprawy.

SPIS TREŚCI

str.

Wstęp 7

1. Pewne przekształcenie operatora $\nabla^2\vartheta$ 9

2. Równanie Laplace'a w siatce krzywoliniowej 13

3. Metoda warstwicowa rozwiązania problemu przewodzenia ciepła 19

4. Punkty osobliwe siatek krzywoliniowych 31

5. Wnioski końcowe 35

6. Przykłady liczbowe 36

WSTĘP

W części pierwszej niniejszej pracy przedstawiono szczegółowo metodę numerycznego modelowania ustalonych i nieustalonych pól temperaturowych w ciałach stałych. Na rozpatrywany obszar ciała stałego nakłada się siatkę prostokątną (płaską lub przestrzenną). Przyjęta siatka wyróżnia wewnątrz obszaru pewną liczbę punktów nazwanych węzłami wewnętrznymi, zaś na brzegu wybrane zostają punkty brzegowe pojedyncze lub wielokrotne. Węzły brzegowe pojedyncze są punktami przecięcia konturu obszaru linią podziału siatkowego, zaś wielokrotne są punktami przecięcia wzajemnie prostopadłych linii siatki leżącymi na brzegu zadanego obszaru.

Funkcję $\vartheta(P)$, $P\in\Omega$, stanowiącą rozwiązanie zadania, aproksymuje się rodzinami wielomianów algebraicznych jednej zmiennej, będących przybliżeniem przekrojów warstwicowych szukanego pola temperatur. Warstwicą funkcji $\vartheta(P)$ nazwano linię krzywą o równaniu:

$$\vartheta(x_i) = \vartheta(x_1^0, x_2^0 \ldots x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0 \ldots x_k^0), \tag{1}$$

gdzie $x_1^0, x_2^0 \ldots x_k^0$ ustalone wartości k-1 z k argumentów funkcji $\vartheta(P)$.

Warstwicowy opis pola temperatur w postaci:

$$\vartheta(x_i)\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\cdots\\ x_k=x_k^0}} = \sum_{n=0}^{r} a_i\Big|_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\cdots\\ x_k=x_k^0}} x_i^n \quad i=1,\ldots k, \tag{2}$$

gdzie $a_i \Big|_{\substack{x_1=x_1^o \\ \cdots\cdots \\ x_k=x_k^o}}$ są współczynnikami wielomianu aproksymującego warstwicę (1),

musi spełniać następujące warunki:

1°. Funkcja opisana przy pomocy warstwic jest funkcją ciągłą, wartości jej w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru są jednoznacznie określone. Wynika stąd, że dla każdego węzła wartość funkcji liczona podług równań wszystkich warstwic przechodzących przez ten węzeł musi być taka sama. Warunek ten przenosi się bezpośrednio na rodziny wielomianów przybliżających rzeczywiste przebiegi warstwic.

2°. Zbiór przekrojów szukanej funkcji jest ortogonalny i zgodny z osiami układu współrzędnych. Opisana pewnym operatorem różniczkowym L kombinacja liniowa pochodnych (I i II rzędu) zwyczajnych tych warstwic musi więc w każdym węźle wewnętrznym spełniać ściśle równanie różniczkowe $L.\vartheta = f(x_1 \ldots x_k)$. W omawianej metodzie warunek ten przenosi się bezpośrednio na wielomiany przechodzące przez węzły wewnętrzne.

3°. Na brzegu funkcja $\vartheta(P)$ spełnia warunek w postaci:

$$A\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)_{P_r} + B\vartheta(P_r) = C. \qquad (3)$$

Odpowiednia lokalizacja (por. część 1) węzłów brzegowych pozwala w każdym z o nych węzłów jednoznacznie określić wartość pochodnej funkcji ϑ w kierunku normalnym do brzegu obszaru, jako kombinację liniową pochodnych wielomianów przechodzących przez ten węzeł.

4°. W przypadku zagadnień niestacjonarnych szukana funkcja $\vartheta(P)$ spełnia dodatkowo warunek początkowy zadania:

$$\vartheta(P)\Big|_{\tau=0} = \vartheta_o(P). \tag{4}$$

Kryterium $1^o, 2^o, 3^o, 4^o$ zastosowane dla zbioru węzłów wewnętrznych i brzegowych prowadzi do liniowego względem współczynników $a_i\Big|_{\substack{x_1=x_1^o \\ \vdots \\ x_k=x_k^o}}$ układu równań algebraicznych, z którego oblicza się wartości współczynników wielomianów aproksymujących, a w dalszej kolejności temperatury w węzłach obszaru Ω.

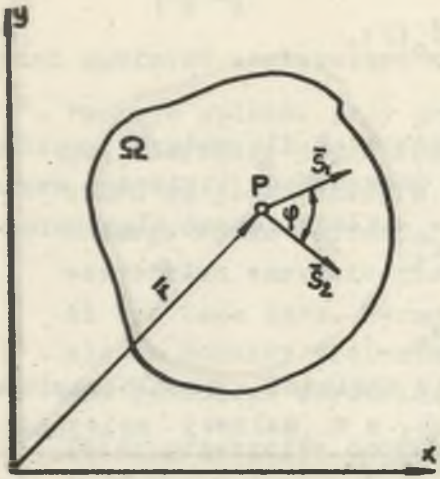
W części pierwszej pracy omówiono metodę rozwiązywania problemów przewodnictwa dla obszarów jednorodnych (kryterium $1^o \div 4^o$) i niejednorodnych (dodatkowe warunki na styku podobszarów). Przedstawiono procedurę obliczeń dla stanów nieustalonych i jej uproszczony wariant nazwany metodą warstwicową i wędrującą warunkiem początkowym. Dla wszystkich rozpatrywanych przypadków wykazano zgodność otrzymanego układu równań z ilością niewiadomych współczynników.

Tematem części drugiej rozprawy jest uogólnienie metody wielomianów na siatki krzywoliniowe. Przeprowadzone niżej rozważania dotyczą obszarów płaskich, rozszerzenie ich na obszary przestrzenne nie zmienia istoty rzeczy, chociaż prowadzi do bardziej złożonych zależności analitycznych.

1. Pewne przekształcenie operatora $\nabla^2\vartheta$

Dana jest funkcja $\vartheta = \vartheta(x,y)$ określona i ciągła wraz z drugimi pochodnymi w każdym punkcie obszaru płaskiego Ω,

zorientowanego w prostokątnych układzie współrzędnych $\{x,y\}$. Wewnątrz rozpatrywanego obszaru obieramy punkt $P(\bar{r})$ i dwa wektory jednostkowe $\bar{s}_1(s_{1x}, s_{1y})$ $\bar{s}_2(s_{2x}, s_{2y})$ tworzące kąt φ (rys. 1). Wektory jednostkowe o kierunkach zgodnych z osiami układu (wersory i,j) można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów $\bar{s}_1$ i $\bar{s}_2$:



Rys. 1. Wersory w punkcie P obszaru Ω.

$$i = C_1\,\bar{s}_1 + C_2\,\bar{s}_2 \qquad (5)$$

$$j = D_1\,\bar{s}_1 + D_2\,\bar{s}_2 \qquad (6)$$

Mnożąc skalarnie równanie (1) przez wektor $\bar{s}_1$ otrzymujemy

$$i.\bar{s}_1 = C_1\,\bar{s}_1^2 + C_2\bar{s}_2.\bar{s}_1. \qquad (7)$$

Ponieważ

$$|\bar{s}_1| = |\bar{s}_2| = 1$$

$$\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = \cos\varphi,$$

więc równanie (1) przyjmuje postać:

$$s_{1x} = C_1 + C_2 \cos\varphi. \qquad (8)$$

Mnożąc to samo równanie przez wektor $\bar{s}_2$ otrzymujemy:

$$s_{2x} = C_1 \cos\varphi + C_2. \tag{9}$$

Z układu równań (8), (9) obliczamy wartości stałych C_1 i C_2:

$$C_1 = \frac{s_{1x} - s_{2x} \cos\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{10}$$

$$C_2 = \frac{s_{2x} - s_{1x} \cos\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{11}$$

Zastosowanie tej samej procedury w przypadku równania (6) prowadzi do obliczania stałych D_1 i D_2:

$$D_1 = \frac{s_{1y} - s_{2y} \cos\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{12}$$

$$D_2 = \frac{s_{2y} - s_{1y} \cos\varphi}{\sin^2\varphi}. \tag{13}$$

Można wykazać, że pochodna funkcji $\vartheta(x,y)$ w kierunku x wyraża się jako kombinacja liniowa pochodnych w kierunkach $\bar{s}_1$ $\bar{s}_2$:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = C_1 \frac{\partial\vartheta}{\partial\bar{s}_1} + C_2 \frac{\partial\vartheta}{\partial\bar{s}_2}, \tag{14}$$

czyli

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right] = C_1\left(C_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}^2} + C_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1 \partial \bar{s}_2}\right) +$$

$$+ C_2\left(C_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1 \partial \bar{s}_2} + C_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_2^2}\right),$$

skąd

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = C_1^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1^2} + 2C_1C_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1 \partial \bar{s}_2} + C_2^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_2^2}. \tag{15}$$

Analogicznie:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = D_1^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1^2} + 2D_1D_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1 \partial \bar{s}_2} + D_2^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_2^2} \tag{16}$$

Operator $\nabla^2 \vartheta$ przyjmuje więc postać:

$$\nabla^2 \vartheta = (C_1^2 + D_1^2) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1^2} + 2(C_1C_2 + D_1D_2) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1 \partial \bar{s}_2} +$$

$$+ (C_2^2 + D_2^2) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_2^2}. \tag{17}$$

Ponieważ

$$C_1^2 + D_1^2 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

$$2(C_1C_2 + D_1D_2) = -\frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{18}$$

$$C_2^2 + D_2^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi},$$

więc

$$\nabla^2\vartheta = \left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\bar{s}_1^2} - 2\cos\varphi\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\bar{s}_1\,\partial\bar{s}_2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\bar{s}_2^2}\right)\frac{1}{\sin^2\varphi}. \tag{19}$$

Zauważmy, że dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\nabla^2\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\bar{s}_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\bar{s}_2^2}. \tag{20}$$

2. Równanie Laplace'a w siatce krzywoliniowej

Rozpatrywać będziemy płaski jednorodny obszar Ω zorientowany w prostokątnym układzie współrzędnych $\{x,y\}$. Funkcja $\vartheta(xy)$ spełnia w tym obszarze równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = 0, \tag{21}$$

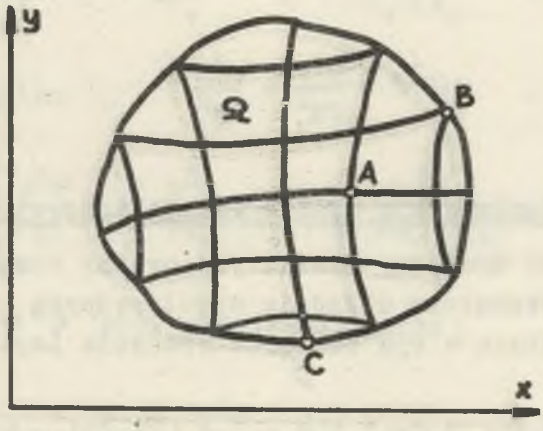
zaś na brzegu warunki w postaci (3).
Wprowadzimy przekształcenie w postaci:

$$\begin{aligned} x &= \Phi(t,p) \\ y &= \Psi(t,p) \end{aligned} \tag{22}$$

przyporządkowujące każdemu punktowi $P(x,y)$ obszaru Ω parę liczb $P_1(t,p)$. Ustalając kolejno wybrane wartości argumentów t i p otrzymujemy siatkę krzywoliniową w postaci:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t,p_i) \\ y &= \psi(t,p_i) \end{aligned}\right\} i=0,1,\ldots,n$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t_j,p) \\ y &= \psi(t_j,p) \end{aligned}\right\} j=0,1,\ldots,m. \qquad (23)$$



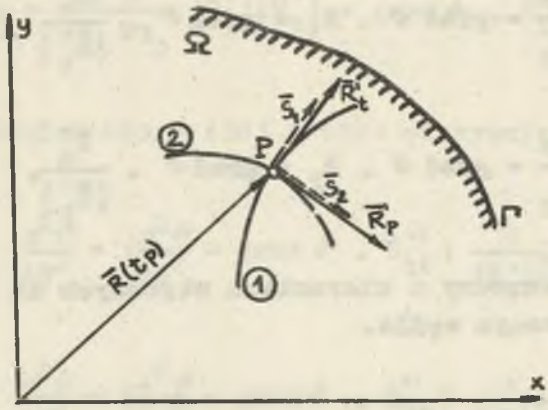
Rys. 2. Siatka krzywoliniowa obszaru Ω.

W dalszej części stosowany będzie zapis:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_i(t) \\ y &= \psi_i(t) \end{aligned}\right\} i=0,1,\ldots,n$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_j(p) \\ y &= \psi_j(p) \end{aligned}\right\} j=0,1,\ldots,m. \qquad (24)$$

Na rysunku 3 pokazano dwie linie siatki (24) i promień wodzący $\bar{R}(t,p)$ węzła wewnętrznego.



Rys. 3. Węzeł wewnętrzny obszaru Ω , P(t,p)

Każdemu węzłowi wewnętrznemu rozpatrywanego obszaru przypisane są dwa wektory o kierunkach stycznych do linii siatki przecinających się w danym węźle. Składowymi tych wektorów są odpowiednio liczby:

$$\bar{R}_t' \left[\frac{\partial\varphi(t,p)}{\partial t}, \frac{\partial\psi(t,p)}{\partial t}\right] \equiv \bar{R}_t' \left[\varphi_i'(t), \psi_i'(t)\right]$$

$$\bar{R}_p' \left[\frac{\partial\varphi(t,p)}{\partial p}, \frac{\partial\psi(t,p)}{\partial p}\right] \equiv \bar{R}_p' \left[\varphi_j'(p), \psi_j'(p)\right], \tag{25}$$

zaś długości ich wynoszą:

$$|\bar{R}_t'| = \sqrt{\varphi_i'^2(t) + \psi_i'^2(p)}$$

$$|\bar{R}_p'| = \sqrt{\varphi_j'^2(p) + \psi_j'^2(p)}. \tag{26}$$

Pierwsze pochodne funkcji ϑ w kierunku wektorów $\bar{R}_t'$, $\bar{R}_p'$ wynoszą:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{s}_1} = \text{grad}\,\vartheta \cdot \bar{s}_1 = \text{grad}\,\vartheta \cdot \frac{\bar{R}_t'}{|\bar{R}_t'|}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{s}_2} = \text{grad}\,\vartheta \cdot \bar{s}_2 = \text{grad}\,\vartheta \cdot \frac{\bar{R}_p'}{|\bar{R}_p'|}, \tag{27}$$

gdzie $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ wersory o kierunkach stycznych do linii siatki w rozpatrywanym węźle.

Ponieważ:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{s}_1} |\bar{R}_t'|$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{s}_2} |\bar{R}_p'|, \tag{28}$$

więc

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \text{grad}\,\vartheta \cdot \bar{R}_t'$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \text{grad}\,\vartheta \cdot \bar{R}_p'. \tag{29}$$

Obliczamy z kolei drugie pochodne

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1^2} |\bar{R}_t'|^2 + \text{grad}\,\vartheta \cdot \bar{R}_t''$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_2^2} |\bar{R}_p'|^2 + \text{grad}\,\vartheta \cdot \bar{R}_{pp}'', \tag{30}$$

zaś pochodna mieszana wynosi:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t \partial p} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1 \partial \bar{s}_2} |\bar{R}_t'||\bar{R}_p'| + \operatorname{grad} \vartheta \cdot \bar{R}_{tp}''. \tag{31}$$

Przekształcając wzory (30) i (31) otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1^2} = \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \vartheta \cdot \bar{R}_{tt}''\right) \frac{1}{|\bar{R}_t'|^2} \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_2^2} = \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} - \operatorname{grad} \vartheta \cdot \bar{R}_{pp}''\right) \frac{1}{|\bar{R}_p'|^2} \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \bar{s}_1 \partial \bar{s}_2} = \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t \partial p} - \operatorname{grad} \vartheta \cdot \bar{R}_{tp}''\right) \frac{1}{|\bar{R}_t'||\bar{R}_p'|}. \tag{34}$$

Wykorzystując z kolei wyprowadzone w rozdziale poprzednim równanie (19) dochodzimy do zależności:

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \frac{1}{|\bar{R}_t'|^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} \frac{1}{|\bar{R}_p'|^2} - \right.$$

$$\left. - 2 \cos\varphi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t \partial p} \frac{1}{|\bar{R}_t'||\bar{R}_p'|} - \operatorname{grad} \vartheta \cdot \bar{W} \right], \tag{35}$$

gdzie

$$\bar{W} = \frac{\bar{R}_{tt}''}{|\bar{R}_t'|^2} + \frac{\bar{R}_{pp}''}{|\bar{R}_p'|^2} - \frac{2 \cos\varphi}{|\bar{R}_t'||\bar{R}_p'|} \bar{R}_{tp}'' \tag{36}$$

Jeżeli krzywe (24) tworzą siatkę ortogonalną $\varphi = \frac{\pi}{2}$, to operator $\nabla^2 \vartheta$ sprowadza się do postaci:

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \frac{1}{|\bar{R}_t'|^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} \frac{1}{|\bar{R}_p'|^2} - \operatorname{grad} \vartheta \cdot \left(\frac{\bar{R}_{tt}''}{|\bar{R}_t'|^2} + \frac{\bar{R}_{pp}''}{|\bar{R}_p'|^2} \right). \tag{37}$$

Wektor $\bar{W}$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów $\bar{s}_1$ i $\bar{s}_2$:

$$\bar{W} = \alpha_1 \bar{s}_1 + \alpha_2 \bar{s}_2 \tag{38}$$

Mamy wówczas:

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \frac{1}{|\bar{R}_t'|^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} \frac{1}{|\bar{R}_p'|^2} - \alpha_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{s}_1} - \alpha_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \bar{s}_2}, \tag{39}$$

czyli

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \frac{1}{|\bar{R}_t'|^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} \frac{1}{|\bar{R}_p'|^2} - \alpha_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \frac{1}{|\bar{R}_t'|} - \alpha_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \frac{1}{|\bar{R}_p'|}. \tag{40}$$

Rozważania prowadzone w dalszej części pracy dotyczyć będą siatek krzywoliniowych ortogonalnych. Zastosowanie bowiem metody warstwicowej dla siatek dowolnych, a nawet izogonalnych byłoby w praktyce znacznie utrudnione ze względu na występujące w równaniu (35) pochodne mieszane. Zbiór warunków dotyczących współczynników wielomianów tworzy w tym przypadku układ równań nieliniowych, przy czym

wartość pochodnej $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t\, \partial p}$ może być oszacowana tylko w sposób przybliżony (różnicowy). Wydaje się więc, że przynajmniej w praktyce należy ograniczyć się do siatek krzywoliniowych ortogonalnych.
Ostatecznie równanie Laplace'a w siatce krzywoliniowej ortogonalnej przyjmuje postać:

$$A_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + A_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} = B_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + B_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial p}, \qquad (41)$$

gdzie wartości A_1, A_2, B_1, B_2 wynikają z równania (40).

3. Metoda warstwicowa rozwiązania problemu przewodzenia ciepła

3.1. Ośrodki jednorodne, stan ustalony

Szukana funkcja $\vartheta(t,p)$ spełnia równanie (41) wewnątrz jednorodnego obszaru płaskiego Ω, zaś na brzegu warunki w postaci (3). Rozwiązanie $\vartheta = \vartheta(t,p)$ odwzorowuje się geometrycznie jako powierzchnia określona i ciągła nad obszarem Ω. Krzywe (24) traktować będziemy jako ślady powierzchni walcowych prostopadłych do płaszczyzny rozpatrywanego obszaru. Zdeterminowane podziałem siatkowym walce wyróżniają na powierzchni $\vartheta = \vartheta(t,p)$ warstwice krzywoliniowe. Na każdej z tych warstwic obrano uprzednio pewną liczbę punktów węzłowych. Rzeczywisty przebieg warstwic przybliżamy wielomianami algebraicznymi, których stopień wynika z ilości węzłów na danej warstwicy (rys. 4). Tak więc przekroje pola temperatur opisane są następującymi równaniami:

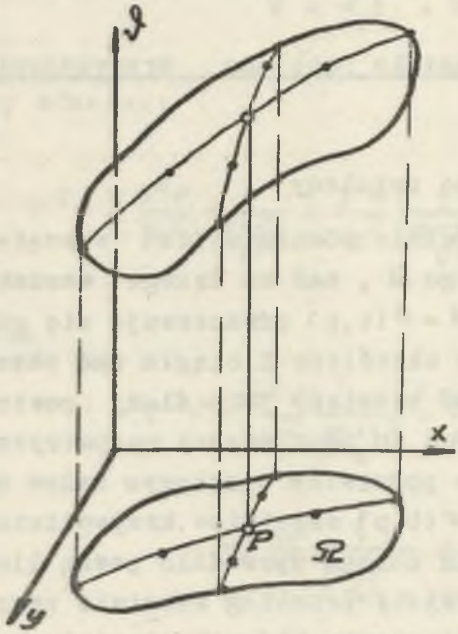
$$\begin{aligned} x &= \varphi_i(t) \\ y &= \psi_i(t) \\ \vartheta &= \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i \end{aligned} \qquad (42)$$

oraz

$$x = \Phi_j(p)$$

$$y = \Psi_j(p) \tag{43}$$

$$\vartheta = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, p^j.$$



Rys. 4. Powierzchnia $\vartheta = \vartheta(t,p)$

Występujące pod znakiem sumy liczby n i m mogą być dla każdej warstwicy inne, w zależności od warunków geometrycznych zadania.

Warstwicowy opis pola temperatur w obszarze Ω musi spełniać warunki $1^o \div 4^o$ sformułowane w części I pracy.

Pierwsą grupę równań otrzymuje się z warunku ciągłości funkcji w obszarze Ω. Ponieważ wartość funkcji w węzłach wewnętrznych i brzegowych podwójnych nie zależy od kierunku warstwicy przechodzącej przez ten węzeł, a tylko od położenia punktu węzłowego, więc:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t_{ij}^{i} = \sum_{j=0}^{m} b_{Ij}\, p_{ij}^{i}, \tag{44}$$

gdzie

t_{ij}, p_{ij} - współrzędne punktu węzłowego.

Z kolei należy rozpatrzyć warunki dotyczące węzłów wewnętrznych, a wynikające z równania różniczkowego, które szukana funkcja ma spełniać.

W przypadku siatek krzywoliniowych postać równania Laplace'a (ściślej wartości współczynników A_1, A_2, B_1, B_2 w równaniu (41)) są zależne od położenia węzła w rozpatrywanym obszarze. Jeżeli znana jest postać analityczna transformacji układu (równanie (22) lub (24)), to obliczenie wartości współczynników A_1, A_2, B_1, B_2 w węzłach siatki nie nastręcza żadnych trudności. Jeżeli zaś postać funkcyjna przyjętej siatki nie jest znana, co może mieć miejsce w przypadku doboru siatek dla obszarów wybitnie nieregularnych, to zarówno długości wektorów $\bar{R}_t'$, $\bar{R}_p'$, jak i inne wielkości występujące w równaniu (40) można obliczyć w sposób przybliżony, korzystając ze znanych schematów różnicowych lub konstrukcji geometrycznych.

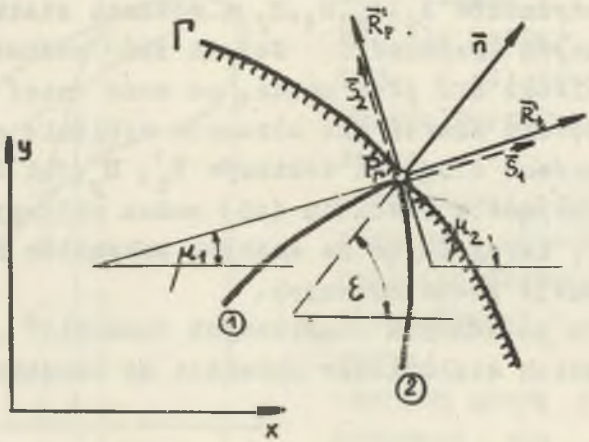
Aproksymacja pochodnych cząstkowych funkcji ϑ, pochodnymi odpowiednich wielomianów prowadzi do warunku w postaci:

$$\left[A_1 \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i + A_2 \frac{d^2}{dp^2} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, p^j\right]_{\substack{t=t_{ij}\\ p=p_{ij}}} = \tag{45}$$

$$= \left[B_1 \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i + B_2 \frac{d}{dp} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, p^j\right]_{\substack{t=t_{ij}\\ p=p_{ij}}}.$$

Równanie (45) jest równaniem algebraicznym liniowym względem współczynników a_{ij}, b_{ij} wielomianów warstwicowych. Ostatnią grupę równań w przypadku zagadnień stacjonarnych tworzą warunki brzegowe zadania.

Na brzegu obszaru Ω można wyodrębnić dwie grupy węzłów brzegowych. Pierwszą z nich stanowią węzły brzegowe pojedyncze - zlokalizowane w tych punktach na brzegu obszaru, gdzie kierunek wektora normalnego do brzegu pokrywa się w przybliżeniu z kierunkiem warstwicy, drugą zaś tworzą węzły podwójne, w których stykają się dwie linie siatki obszaru. Podany wyżej sposób lokalizacji węzłów wiąże się



Rys. 5. Pochodna normalna na brzegu obszaru

bezpośrednio z problemem dokładnej aproksymacji pochodnej w kierunku normalnym do konturu ograniczającego obszar Ω i praktycznie zawsze jest możliwy do zrealizowania. Jeżeli przez μ_1, μ_2 oznaczyć kąty, jakie z dodatnim kierunkiem osi x tworzą ortogonalne styczne do linii siatki, wektory jednostkowe $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ w punkcie P leżącym na brzegu Γ obszaru Ω, zaś przez ε kąt, jaki z osią x^+ tworzy wektor

normalny do brzegu (rys. 5), to pochodna funkcji ϑ w kierunku n wyraża się zależnością:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{\partial\vartheta}{\partial \bar{s}_1}\cos(\mu_1 - \varepsilon) + \frac{\partial\vartheta}{\partial \bar{s}_2}\cos(\mu_2 - \varepsilon). \qquad (46)$$

Wykorzystanie wzorów (28) prowadzi do zależności:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{1}{|\bar{R}_t'|}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\cos(\mu_1 - \varepsilon) + \frac{1}{|\bar{R}_p'|}\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\cos(\mu_2 - \varepsilon). \qquad (47)$$

Jeżeli kierunek wektora $\bar{s}_1$ lub $\bar{s}_2$ pokrywa się z kierunkiem n (węzły pojedyncze), to $\mu_1 = \varepsilon$ lub $\mu_2 = \varepsilon$, a ponieważ $|\mu_1 - \mu_2| = \frac{\pi}{2}$ (siatka ortogonalna), więc:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{1}{|\bar{R}_t'|}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}; \quad \mu_1 = \varepsilon \qquad (48)$$

lub

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{1}{|\bar{R}_p'|}\frac{\partial\vartheta}{\partial p}; \quad \mu_2 = \varepsilon . \qquad (49)$$

Podstawiając otrzymane zależności do warunku brzegowego (3) i wykorzystując równanie wielomianów algebraicznych aproksymujących warstwice dochodzimy do wzorów:

$$A\left[\frac{1}{|\bar{R}_t'|}\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i \cos(\mu_1 - \varepsilon) + \right.$$

$$+ \frac{1}{|\bar{R}'_p|} \frac{d}{dp} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, p^j \cos(\mu_2 - \varepsilon) \Big]_{\substack{t=t_{ij} \\ p=p_{ij}}} =$$

$$+ B \left[\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i \right]_{t=t_{ij}} = C, \tag{50}$$

zaś dla węzłów pojedynczych:

$$A \left[\frac{1}{|\bar{R}'_t|} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i \right]_{t=t_{ij}} +$$

$$+ B \left[\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i \right]_{t=t_{ij}} = C \tag{51}$$

$$A \left[\frac{1}{|\bar{R}'_p|} \frac{d}{dp} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, p^j \right]_{p=p_{ij}} +$$

$$+ B \left[\sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, p^j \right]_{p=p_{ij}} = C. \tag{52}$$

Równania (51) i (52) dotyczą odpowiednio węzłów na kierunkach t i p. Zarówno dwie ostatnie zależności, jak i równanie (50) są liniowe względem współczynników wielomianów aproksymujących warstwice.

Jak wykazano w części pierwszej pracy, ilość niewiadomych współczynników w równaniach warunkowych jest zgodna z ilością tych równań.

3.2. Ośrodki jednorodne z wewnętrznymi źródłami ciepła

Jeżeli w obszarze płaskim Ω zadany jest rozkład wewnętrzny źródeł ciepła $q_v = q_v(x,y)$, to rozkład temperatur w tym obszarze opisuje równanie Poissona:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{q_v(x,y)}{\lambda} = 0 \tag{53}$$

i warunki (3).
Załóżmy, że funkcja $q_v(x,y)$ jest ciągła i określona w każdym punkcie obszaru Ω.
Dla takiego przypadku istnieje jednoznaczne przyporządkowanie:

$$q_v(x,y) = \bar{q}_v(p,t) \tag{54}$$

i metoda warstwicowa numerycznego modelowania pola temperatur sprowadza się do rozwiązania układu równań (44), (50), (51), (52), zaś warunek wynikający z równania różniczkowego przyjmuje postać:

$$\left[A_1 \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i + A_2 \frac{d^2}{dp^2} \sum_{j=0}^{m} b_{ij}\, p^j\right]_{\substack{t=t_{ij}\\ p=p_{ij}}} + \frac{\bar{q}_v(t_{ij},p_{ij})}{\lambda} = \left[B_1 \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, t^i + B_2 \frac{d}{dp} \sum_{j=0}^{n} b_{ij}\, p^j\right]_{\substack{t=t_{ij}\\ p=p_{ij}}} \tag{55}$$

Jeżeli funkcja $\bar{q}_v = \bar{q}_v(t,p)$ jest określona w pewnych podobszarach $\Omega_1, \Omega_2 \ldots, \Omega_i \in \Omega$, to zadanie można rozwiązać posługując się procedurą opisaną w punktach 3.1 i 3.2 wykorzystując dodatkowo warunki brzegowe dla obszarów nie jednorodnych (por. 3.3). W przypadku źródeł punktowych można z kolei zastosować transformację tych źródeł na zastępcze źródła powierzchniowe.

3.3. Metoda warstwicowa dla obszarów niejednorodnych

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła dla obszarów niejednorodnych sprowadza się do poszukiwania współczynników wielomianów, spełniających w podobszarach warunki (44), (45) (50), (51) i (52), zaś na styku podobszarów zależności wynikające z warunku brzegowego w postaci:

$$\vartheta_1(p,t) = \vartheta_2(p,t) \tag{56}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n}, \tag{57}$$

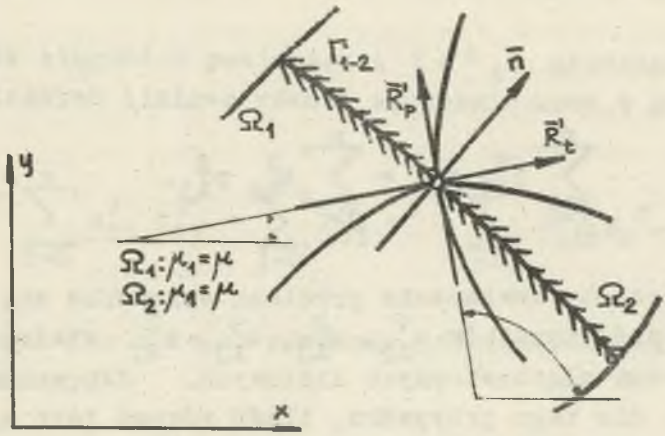
gdzie $P(t,p) \in \Gamma_{1-2}$.

Na ustalonym dla obu podobszarów Ω_1 i Ω_2 brzegu występują węzły pojedyncze lub podwójne, przy czym sposób ich lokalizacji uzależniony jest od stopnia niezgodności kierunków wektorów stycznych do linii siatki w punktach brzegowych i kierunku normalnego do Γ_{1-2}.

Jeżeli w otoczeniu punktów brzegowych spełniony jest warunek,

$$\begin{aligned} |\bar{R}_t'|_{\Omega_1} &= |\bar{R}_t'|_{\Omega_2} \\ |\bar{R}_p'|_{\Omega_1} &= |\bar{R}_p'|_{\Omega_2} \end{aligned} \tag{58}$$

to $\mu_1\big|_{\Omega_1} = \mu_1\big|_{\Omega_2} = \mu_1$ oraz $\mu_2\big|_{\Omega_1} = \mu_2\big|_{\Omega_2} = \mu_2$ (por. rys. 6) i pochodne funkcji ϑ_1, ϑ_2 w kierunku n opisane są równaniami (47), (48) i (49), przy czym t_{ij}, $p_{ij} \in \Gamma_{1-2}$ Jeżeli zaś warunek (58) nie jest spełniony, to występujące w równaniach (47), (48) i (49) odwrotności modułów wektorów stycznych do linii siatki i kąty μ_1, μ_2 będą inne dla podobszaru Ω_1, a inne dla podobszaru Ω_2.



Rys. 6. Wspólny brzeg obszarów niejednorodnych

Obliczoną podług (47), (48) i (49) pochodną w kierunku normalnym wykorzystujemy w równaniu (57) i otrzymujemy liniowy związek między współczynnikami wielomianów.
Warunek ciągłości pola temperatur na styku podobszarów przyjmuje postać:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{1}\, t_{ij}^{i} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}^{1}\, p_{ij}^{j} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^{2}\, t_{ij}^{i} = \tag{59}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} b_{ij}^{2}\, p_{ij}^{j},$$

gdzie a^1_{ij}, b^1_{ij} współczynniki wielomianów aproksymujących pole temperatur w obszarze Ω_1,

a^2_{ij}, b^2_{ij} współczynniki wielomianów aproksymujących pole temperatur w obszarze Ω_2.

Dla węzłów pojedynczych warunek ciągłości sprowadza się do równań:

$$\sum_{i=0}^{n} a^1_{ij}\, t^i_{ij} = \sum_{i=0}^{n} a^2_{ij}\, t^i_{ij} \tag{60}$$

lub

$$\sum_{j=0}^{m} b^1_{ij}\, p^j_{ij} = \sum_{j=0}^{m} b^2_{ij}\, p^j_{ij}. \tag{61}$$

Przyjęty sposób rozwiązania problemu sprowadza się do obliczenia współczynników a^1_{ij}, a^2_{ij}, b^1_{ij}, b^2_{ij} wielomianów z układu równań algebraicznych liniowych. Jak wykazano w części I i dla tego przypadku, ilość równań jest zgodna z liczbą niewiadomych współczynników.

3.4. Stany nieustalone

Szukane rozwiązanie odwzorowuje się geometrycznie w postaci izoparametrycznych powierzchni ϑ_τ = idem określonych i ciągłych nad obszarem Ω. Z nieskończonej ilości tych powierzchni wybieramy skończoną ich liczbę przyjmując pewien zbiór węzłów w kierunku zmiennej czasowej. Tak więc zmiana temperatury w czasie opisana jest dla każdego węzła leżącego wewnątrz obszaru wielomianem algebraicznym tego samego rzędu:

$$\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{t=t_{ij}\\ p=p_{ij}}} = \sum_{r=0}^{w} c_{ijr}\tau^r \tag{62}$$

Warstwice krzywoliniowe na powierzchni $\tau = \tau_s$, podobnie jak poprzednio dane są równaniami:

$$x = \varphi_i(t) \qquad x = \varphi_j(p)$$

$$y = \psi_i(t) \qquad y = \psi_j(p) \tag{63}$$

$$\vartheta\Big|_{\tau=\tau_s} = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^s\, t^i \qquad \vartheta\Big|_{\tau=\tau_s} = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}^s\, p^j$$

Warunek ciągłości powierzchni $\tau = \tau_s$ prowadzi do dwóch niezależnych liniowo równań algebraicznych w postaci

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij}^s\, t_{ij}^i = \sum_{j=0}^{m} b_{ij}^s\, p^j = \sum_{r=0}^{w} c_{ijr}\tau_s^{\,r}. \tag{64}$$

Wykorzystując z kolei równanie różniczkowe Fouriera $\lambda =$ $=$ idem mamy:

$$\frac{1}{a}\left[\frac{d}{d\tau}\sum_{r=0}^{w} c_{ijr}\tau^r\right]_{\tau=\tau_s} + B_1\left[\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}^s\, t^i\right]_{t=t_{ij}} +$$

$$+ B_2\left[\frac{d}{dp}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}^s\, p^j\right]_{p=p_{ij}} = \tag{65}$$

$$= A_1\left[\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}^s\, t^i\right]_{t=t_{ij}} + A_2\left[\frac{d^2}{dp^2}\sum_{j=0}^{m} b_{ij}^s\, p^j\right]_{p=p_{ij}}.$$

Warunki brzegowe zadania prowadzą do zależności identycznych jak przedstawione poprzednio, zaś warunek początkowy w postaci (4) pozwala bezpośrednio obliczyć wyrazy wolne wielomianów $\vartheta_{\tau=\tau_s}$.

Mamy bowiem:

$$\vartheta\Big|_{\tau=0} = o_{ijo}. \tag{66}$$

Przedstawiony wyżej zbiór warunków tworzy zgodny i oznaczony układ równań liniowych, z którego wyznaczamy współczynniki wielomianów przybliżających warstwice, a w dalszej kolejności wartości temperatur w węzłach zadanego obszaru (por. cz. I).

W części pierwszej niniejszej pracy przedstawiono szczegółowo metodę rozwiązywania problemów nieustalonego przepływu ciepła, który nazwano metodą z wędrującym warunkiem początkowym. Istotą metody jest liniowa interpolacja zmienności temperatury dla niewielkich interwałów czasu, tzn. że rodzinę wielomianów (62) przyjmuje się w postaci:

$$\vartheta(\tau)\Big|_{\substack{t=t_{ij}\\ p=p_{ij}}} = A_{ij} + B_{ij}\tau \tag{67}$$

Rozwiązanie układu równań warunkowych pozwala obliczyć wartości temperatur w węzłach obszaru Ω po czasie $\Delta\tau$, zaś otrzymany rozkład temperatur staje się nowym warunkiem początkowym zadania. Zaletą metody jest znaczne zmniejszenie rzędu układu równań liniowych, który wprawdzie trzeba rozwiązywać wielokrotnie, ale ze względu na niezmienną w czasie macierz główną układu procedura obliczeń jest bardzo prosta i szybka. Metodę warstwicową z wę-

drującym warunkiem początkowym można stosować oczywiście również w przypadku siatek krzywoliniowych.

4. Punkty osobliwe siatek krzywoliniowych

W przeprowadzonych dotychczas rozważaniach dotyczących procedury warstwicowego modelowania pola temperatur w obszarach pokrytych siatkami krzywoliniowymi, zakładano taką transformację układu współrzędnych, że linie siatki tworzą dwie ortogonalne rodziny krzywych (24), przy czym węzły wewnętrzne (i brzegowe podwójne) są punktami przecięcia linii rodziny p = idem z linią rodziny t = idem (przyporządkowanie jednoznaczne).
W praktyce istnieją jednak siatki krzywoliniowe tego typu że w pewnych punktach obszaru Ω przyporządkowanie pary liczb t,p rozpatrywanemu węzłowi nie jest jednoznaczne. Przykładem takiego punktu może być biegun transformacji $x = r\cos\Phi$ $y = r\sin\Phi$. W takim przypadku położenie punktu węzłowego określone jest pewną wartością parametru t = = idem i nieskończoną ilością parametrów p = idem. Posługując się w dalszym ciągu przykładem współrzędnych biegunowych mamy $r = 0$, $\Phi \in \{R\}$.
Jeżeli więc punkt osobliwy znajduje się w obrębie rozpatrywanego obszaru Ω, to linie siatki przechodzące przez ten węzeł są funkcjami tego samego parametru:

$$x = \Phi_1(t) \qquad x = \Phi_2(t) \ldots x = \Phi_k(t)$$

$$y = \Psi_1(t) \qquad y = \Psi_2(t) \ldots y = \Psi_k(t), \tag{68}$$

zaś liczba $t=t_0$ spełnia układ równań (68).
Ponieważ przez odpowiadający węzłowi osobliwemu punkt na powierzchni $\vartheta\big|_{\tau=\tau_s}$ = idem przechodzi k wielomianów interpolujących warstwice w przekrojach (68), więc aby układ

równań warunkowych był zgodny z ilością niewiadomych współczynników, to omawiany węzeł musi dostarczyć k równań warunkowych dla powierzchni $\vartheta\Big|_{\tau=\tau_s}$ = idem.

Z warunku ciągłości otrzymuje się k-1 niezależnych liniowo równań w postaci:

$$\sum_{i=0}^{n_1} a_{i_1} t_o^i = \sum_{i=0}^{n_2} a_{i2} t_o^i = \ldots = \sum_{i=0}^{n_k} a_{ik} t_o^i, \qquad (69)$$

zaś ostatnie równanie, w zależności od położenia punktu osobliwego, wynika albo z postaci równania różniczkowego, albo z warunków na brzegu obszaru w otoczeniu rozpatrywanego węzła.

1°. Węzeł osobliwy wewnątrz obszaru Ω.

Na rysunku przedstawiono węzeł we wnętrzu obszaru płaskiego utworzony przez k funkcji (linii) tego samego parametru t. Jeżeli wokół węzła wyodrębnimy pewne otoczenie i założymy, że rozpatrywany układ znajduje się w stanie równowagi cieplnej, to równanie bilansu energii można zapisać w postaci:

$$\sum_k \dot{Q}_k = 0, \qquad (70)$$

gdzie $\dot{Q}_k$ - ilość ciepła dopływającego do otoczenia węzła z kierunku k-tej linii podziału siatkowego.

Ponieważ (rys. 7):

$$\dot{Q}_k = \lambda \frac{\vartheta_o - \vartheta_k}{\Delta l_k} \Delta S_k, \qquad (71)$$

gdzie ϑ_o – temperatura w węźle osobliwym,

ϑ_k – temperatura na granicy otoczenia węzła,

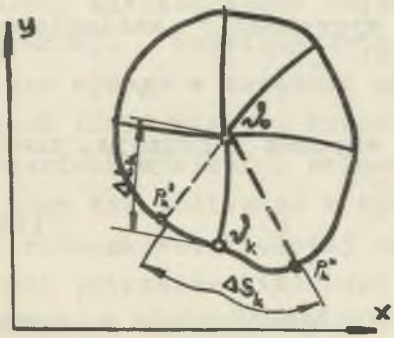
ΔS_k – k-ty element długości łuku konturu ograniczającego rozpatrywane otoczenie,

więc przy λ = idem:

$$\sum_k \frac{\Delta\vartheta_k}{\Delta l_k}\Delta S_k = 0. \tag{72}$$

Przekształcając ostatnie równanie do postaci:

$$\sum_k \frac{\Delta\vartheta_k}{\Delta t_k}\frac{\Delta t}{\Delta l_k}\Delta S_k = 0 \tag{73}$$



Rys. 7. Węzeł osobliwy w obszarze Ω.

otrzymujemy:

$$\sum_k \frac{\Delta\vartheta_k}{\Delta t_k}\frac{1}{|\bar{R}_t'|_{t=\xi}} \cdot S_k = 0, \tag{74}$$

gdzie $\xi \in (t_o, t_k)$.

Ponieważ siatka wokół punktu osobliwego jest ortogonalna, więc długość łuków ΔS_k są funkcją drugiego parametru;

$$\Delta S_k = \Delta S_k(p) = \int_{p_k'}^{p_k''} \sqrt{\varphi_j'^2(p) + \psi_j'^2(p)}\, dp. \tag{75}$$

Normalizując jeden z elementów $\Delta S_{k_o} \equiv 1$ i oznaczając $\frac{\Delta S_k}{\Delta S_{k_o}} = \Delta s_k$ otrzymujemy przy $t_k \to t_o$ warunek w postaci:

$$\sum_k \left(\frac{d\vartheta_k}{dt} \frac{1}{|R'_t|}\right)_{t=t_o} \Delta s_k = 0 \qquad (76)$$

Ostatni warunek jest liniowy względem współczynników wielomianów interpolujących pole temperatur.

W szczególności dla węzła osobliwego siatki biegunowej dla $\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = \ldots \Delta\Phi_k$ otrzymuje się prosty związek w postaci:

$$\sum_k \left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)_{r=0} = 0. \qquad (77)$$

Stosując podobną procedurę można wyprowadzić analogiczny warunek dla stanu nieustalonego.

2°. Jeżeli na brzegu zadany jest warunek I rodzaju, tzn.

$$\vartheta_o = C, \qquad (78)$$

to brakujące równanie otrzymuje się bezpośrednio z przyrównania wartości jednego z k wielomianów (w pkcie t_o) przechodzących przez ten węzeł ze stałą C.

W przypadku warunku II lub III rodzaju można podobnie, jak poprzednio, posłużyć się metodą bilansu, która np. w przypadku warunku III rodzaju prowadzi do zależności:

$$\sum_k \lambda\left(\frac{d\vartheta_k}{dt} \frac{1}{|R'_t|}\right)_{t=t_o} \Delta s_k + \alpha(\vartheta_o - t_o)\Delta s_{k+1} = 0 \qquad (79)$$

5. Wnioski końcowe

Przedstawiona w tej części pracy metoda jest uogólnieniem rozważań przeprowadzonych w części pierwszej. Przyjęcie siatki prostokątnej zgodnej z osiami układu, tzn.:

$$x = t \qquad x = x_i$$
$$y = y_j \qquad y = p \tag{79}$$

sprowadza wyprowadzone wyżej równania do zależności podanych w części pierwszej niniejszej pracy. Wydaje się, że przedstawienie procedury ogólniejszej może być przydatne do rozwiązywania problemów przewodnictwa w obszarach, dla których siatka prostokątna jest z pewnych względów niekorzystna. Przykładem takich obszarów mogą być np. obrotowe powłoki cienkościenne często spotykane w praktyce inżynierskiej. Rozwiązywanie zadań przedstawioną wyżej metodą nie wymaga w zasadzie znajomości postaci analitycznej równań linii siatki, kształtu brzegu itp. Występujące w równaniach wielkości związane z geometrią siatki i obszaru mogą być obliczane w sposób przybliżony - wykreślnie lub rachunkowo. Prościej rozwiązuje się jednak zadania, jeżeli potrzebne wielkości można obliczyć bezpośrednio z zależności analitycznych.

6. Przykłady liczbowe

Przykład 1

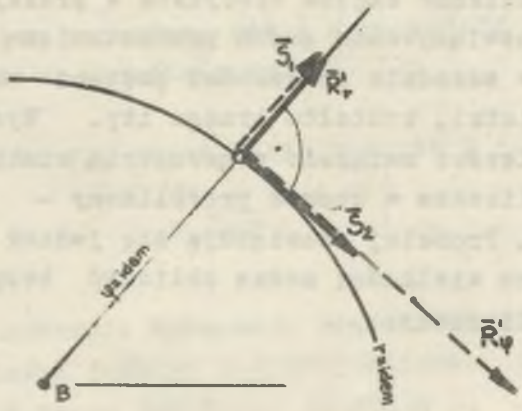
Wykorzystując zależności przedstawione w rozdziale 3 pracy znaleźć postać operatora $\nabla^2 \vartheta$ dla biegunowej transformacji układu, opisanej równaniami:

$$x = r \cos\varphi$$

$$y = r \sin\varphi .$$

W rozpatrywanym przypadku promień wodzący węzła leżącego wewnątrz obszaru ma składowe skalarne (rys. 8)

$$\bar{R}(r,\varphi) \left[r \cos\varphi , r \sin\varphi \right] .$$



Rys. 8. Biegunowa siatka ortogonalna

Wektory styczne do linii siatki:

$$\bar{R}'_r \left[\cos\varphi , \sin\varphi \right]$$

oraz

$$\bar{R}'_{\varphi}\left[-r\sin\varphi,\ r\cos\varphi\right].$$

Długości wektorów wynoszą odpowiednio:

$$|\bar{R}'_r| = 1$$

$$|\bar{R}'_{\varphi}| = r.$$

Wynika stąd, że

$$\bar{R}'_r = \bar{s}_1$$

$$\bar{R}'_{\varphi} = r \cdot \bar{s}_2.$$

gdzie $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ wektory jednostkowe styczne do linii siatki w rozpatrywanym węźle. Wektory $\bar{s}_1$ i $\bar{s}_2$ są ortogonalne bo $\bar{R}'_r \cdot \bar{R}'_{\varphi} = 0$.
Obliczamy z kolei drugie pochodne:

$$\bar{R}''_{rr}\left[0,0\right]$$

$$\bar{R}''_{\varphi\varphi}\left[-r\cos\varphi,\ -r\sin\varphi\right].$$

Podstawiając otrzymane wartości do równania (37) otrzymujemy:

$$\nabla^2\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varphi^2}\frac{1}{r^2} - \operatorname{grad}\vartheta \cdot \frac{\bar{R}''_{\varphi\varphi}}{r^2}.$$

Ponieważ

$$\bar{R}''_{\varphi\varphi} = -r.\bar{R}'_r = -r \cdot \bar{s}_1,$$

więc występujące w równaniu (38) współczynniki α_1 i α_2 wynoszą odpowiednio

$$\alpha_1 = -\frac{1}{r} \qquad \alpha_2 = 0.$$

Po podstawieniu wartości α_1 i α_2 do równania (4) otrzymuje się ogólnie znaną postać operatora $\nabla^2\vartheta$ na współrzędnych biegunowych:

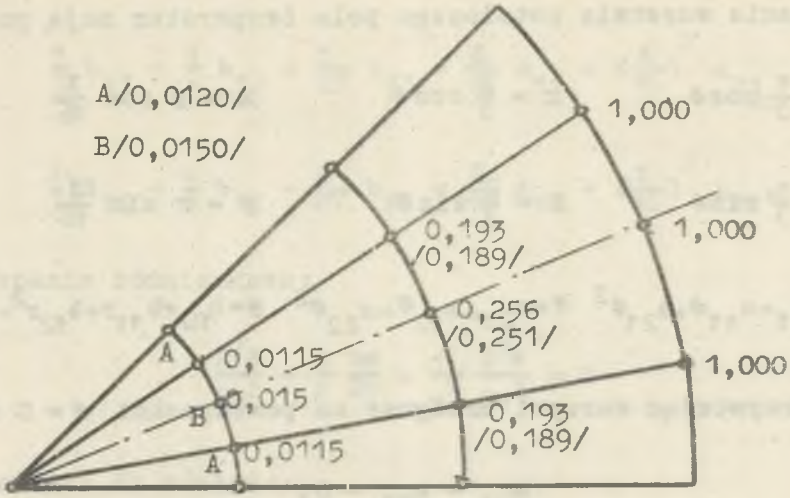
$$\nabla^2\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}.$$

Należy tu podkreślić, że jednakowa dla całego obszaru postać ogólna operatora $\nabla^2\vartheta$ nie jest regułą. W przypadku siatek bardziej złożonych można dla różnych węzłów otrzymać znacznie różniące się od siebie zależności.
W części pierwszej pracy rozwiązano szereg zadań charakterystycznych dla praktyki inżynierskiej (płyty grzewcze itp.). W tej części ograniczono się tylko do takich problemów, które posiadają rozwiązania analityczne (modele wyidealizowane). Chodziło bowiem o możliwość porównania rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniami ścisłymi i związaną z tym ocenę dokładności metody.

Przykład 2

Przekrój poprzeczny nieskończenie długiego pręta stanowi wycinek koła o promieniu r=1 i kącie środkowym $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Powierzchnia pręta r=1 znajduje się w stałej temperaturze $\theta = 1$, podczas gdy pozostałe powierzchnie pręta utrzymy-

wane są w temperaturze $\theta=0$. Znaleźć rozkład temperatur w pręcie (rys. 9).



Rys. 9. Rozwiązanie przykładu 2

Przedstawione zadanie posiada rozwiązanie analityczne, które można uzyskać metodą odwzorowań. Funkcja spełniająca równanie przewodnictwa i spełniająca zadane warunki na brzegu obszaru daje się przedstawić w postaci skończonej:

$$\theta(r,\varphi) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{\sin 4\varphi}{\sinh(4 \ln \frac{1}{r})} \right].$$

Do rozwiązania zadania przyjęto symetryczny wycinek przekroju pręta o kącie rozwarcia $\varphi = \frac{\pi}{8}$, na który nałożono ortogonalną siatkę o równaniach:

$$x = \frac{1}{3}\cos\varphi \qquad x = \frac{2}{3}\cos\varphi \qquad x = r\cos\frac{\pi}{16}$$

$$y = \frac{1}{3}\sin\varphi \qquad y = \frac{2}{3}\sin\varphi \qquad y = r\sin\frac{\pi}{16},$$

które w rozpatrywanym wcinku wyznacza dwa węzły wewnętrzne i 6 węzłów brzegowych (jeden z nich jest węzłem osobliwym z I warunkiem brzegowym).

Równania warstwic ustalonego pola temperatur mają postać:

$$x = \frac{1}{3}\cos\Phi \qquad x = \frac{2}{3}\cos\Phi \qquad x = r\cos\frac{\pi}{16}$$

$$y = \frac{1}{3}\sin\Phi \qquad y = \frac{2}{3}\sin\Phi \qquad y = r\sin\frac{\pi}{16}$$

$$\theta = a_{01} + a_{11}\Phi + a_{21}\Phi^2 \qquad \theta = a_{02} + a_{12}\Phi + a_{22}\Phi^2 \qquad \theta = b_{10} + b_{11}r + b_{12}r^2 + b_{13}r^3.$$

Wykorzystując warunki brzegowe na powierzchni $\Phi = 0$ mamy:

$$a_{01} = a_{02} = 0.$$

Podobnie

$$b_{10} = 0.$$

Na powierzchni $\Phi = \frac{\pi}{8}$ mamy $\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = \frac{d\theta}{d\Phi} = 0$,

czyli

$$a_{11} + \frac{\pi}{4}a_{21} = 0$$

$$a_{12} + \frac{\pi}{4}a_{22} = 0.$$

Warunek na powierzchni r=1 prowadzi do równania:

$$b_{10} + b_{11} + b_{12} = 1.$$

Wykorzystując warunek ciągłości funkcji w punktach $A(\frac{1}{3},\frac{\pi}{16})$ i $B(\frac{2}{3},\frac{\pi}{16})$ otrzymujemy:

$$\frac{1}{3} b_{11} + \frac{1}{9} b_{12} + \frac{1}{27} b_{13} = \frac{\pi}{16} a_{11} + (\frac{\pi}{16})^2 a_{21}$$

$$\frac{2}{3} b_{11} + \frac{4}{9} b_{12} + \frac{8}{27} b_{13} = \frac{\pi}{16} a_{12} + (\frac{\pi}{16})^2 a_{22}.$$

Równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2} = 0$$

prowadzi do równań:

$$3\, b_{11} + 4\, b_{12} + 3\, b_{13} + 18\, a_{21} = 0$$

$$1{,}5\, b_{11} + 4\, b_{12} + 6\, b_{13} + 4{,}5\, a_{22} = 0,$$

przy czym pierwsze z równań dotyczy punktu A, a drugi punktu B wewnątrz obszaru Ω.

Po rozwiązaniu przedstawionego wyżej układu równań otrzymuje się równanie warstwic w postaci:

$$x = \frac{1}{3}\cos\varphi$$

$$y = \frac{1}{3}\sin\varphi$$

$$\theta = 0{,}0743\varphi - 0{,}0947\varphi^2$$

$$x = \frac{2}{3}\cos\Phi$$

$$y = \frac{2}{3}\sin\Phi$$

$$\theta = 1{,}3128\Phi - 1{,}6723\Phi^2$$

$$x = r\cos\frac{\pi}{16}$$

$$y = r\sin\frac{\pi}{16}$$

$$\theta = 0{,}2370\ r - 1{,}2980\ r^2 + 2{,}0610\ r^3.$$

Rozwiązanie przedstawiono na rysunku 9. W nawiasach podano wartości funkcji obliczone z rozwiązania analitycznego. Błąd maksymalny rzędu 2% jest porównywalny z dokładnością obliczeń (zaokrąglenia wyników pośrednich i danych tablicowych).

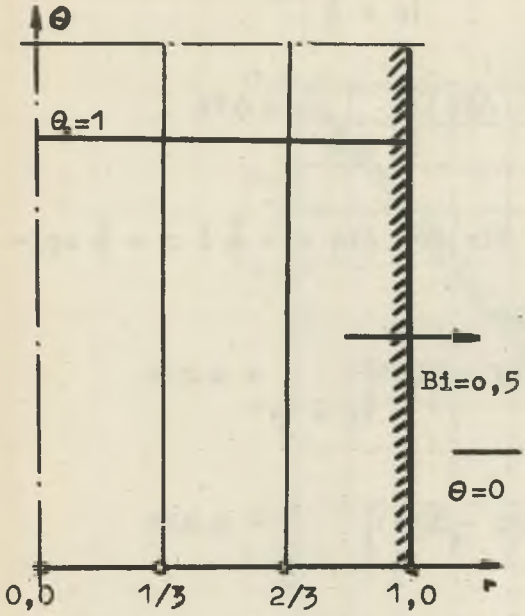
Przykład 3

Znaleźć niestacjonarny rozkład temperatur w nieskończonym walcu o promieniu R=1, jeżeli w chwili $\tau = 0$ temperatura zredukowana w rozpatrywanym obszarze wynosiła $\theta|_{\tau=0} = 1$, zaś przepływ ciepła do otoczenia o temperaturze $\Theta=0$ określony jest wartością liczby Biota Bi = 0,5. W osi walca $\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0$.

Do rozwiązania zadania przyjęto metodę warstwicową z wędrującym warunkiem początkowym. Problem rozwiązano dwukrotnie, przyjmując w pierwszej wersji interwał czasu od-

powiadający zmianie liczby Fouriera $\Delta Fo_1 = 0{,}50$ a w drugiej $\Delta Fo_2 = 0{,}25$.

Problem jest osiowo-symetryczny i $\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 0$.



Rys. 10. Dobór węzłów i warunki dla walca nieskończonego

W obszarze walca (rys.10) przyjęto cztery węzły w kierunku zmiennej r odpowiadające współrzędnym $r = 0$, $r = \frac{1}{3}R$, $r = \frac{2}{3}R$, $r = R$ (dwa brzegowe i dwa wewnętrzne).

Opis warstwicowy rozkładu temperatur w chwili $\tau = \tau_s$ jest więc wielomianem algebraicznym w postaci:

$$\theta(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3.$$

Wykorzystując warunek brzegowy dla $r = 0$ mamy:

$$a_1 = 0,$$

czyli

$$\theta(r) = a_0 + a_2 r^2 + a_3 r^3.$$

Zmienność temperatury w węzłach $r = \frac{1}{3}$ i $r = \frac{2}{3}$ interpolujemy liniowo:

$$\theta(Fo)\Big|_{r=\frac{1}{3}} = \theta(Fo - \Delta Fo)\Big|_{r=\frac{1}{3}} + m\,\Delta Fo$$

$$\theta(Fo)\Big|_{r=\frac{2}{3}} = \theta(Fo - \Delta Fo)\Big|_{r=\frac{2}{3}} + n\,\Delta Fo$$

Warunki ciągłości funkcji $\theta(r,Fo)$ dla $r = \frac{1}{3}$ i $r = \frac{2}{3}$ opisane są równaniami:

$$a_o + \frac{1}{9}a_2 + \frac{1}{27}a_3 = \theta(Fo - \Delta Fo)\Big|_{r=\frac{1}{3}} + m\,\Delta Fo$$

$$a_o + \frac{4}{9}a_2 + \frac{8}{27}a_3 = \theta(Fo - \Delta Fo)\Big|_{r=\frac{2}{3}} + n\,\Delta Fo$$

Równanie różniczkowe w postaci:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}$$

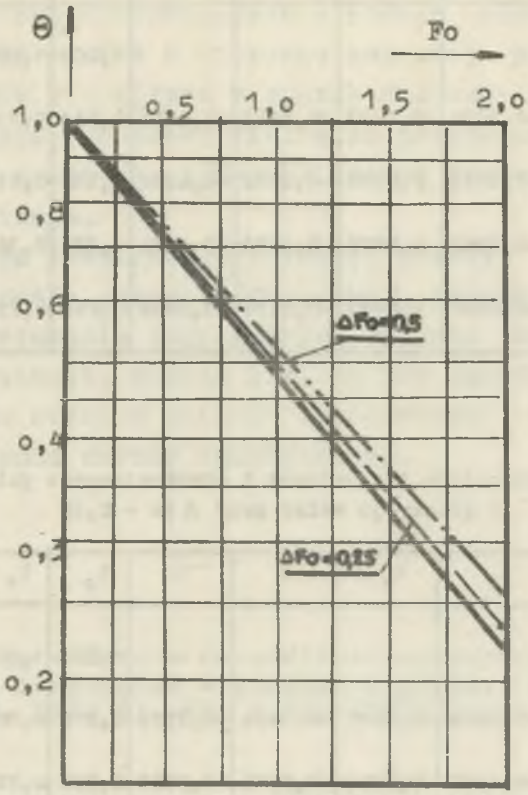
prowadzi do warunków:

$$2a_2 + 2a_3 + 3\left(\frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3\right) = m$$

$$2a_2 + 4a_3 + \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}a_2 + \frac{4}{3}a_3\right) = n,$$

zaś z warunku brzegowego dla r = 1 mamy:

$$-a_1 - 2a_2 - 3a_3 = \frac{1}{2}(a_0 + a_2 + a_3).$$



Rys. 11. Temperatura w osi

Eliminując z układu równań niewiadome m i n otrzymujemy liniowy układ równań rzędu 3, w którym macierz główna nie zmienia się w czasie, zaś wektor wyrazów wolnych obliczany jest każdorazowo na podstawie rozwiązań dla chwili (Fo $-\Delta$Fo).

W tabeli 1 zebrano wartości współczynników i temperatury w węzłach obszaru dla Fo = 0,50 Fo $\in$ [0,2], zaś w tabeli 2 te dame wielkości dla ΔFo = 0,25. Porównanie obu rozwiązań z rozwiązaniem analitycznym (temperatura w osi walca) przedstawiono na rysunku 11.

Tabela 1

Wartości współczynników wielomianów i niestacjonarne pole temperatur w przekroju walca przy $\Delta Fo = 0,5$

Fo	a_0	a_2	a_3	m	n	t_0	t_1	t_2	t_3
0,00						1,000	1,000	1,000	1,000
0,50	0,7506	-0,1091	-0,0293	-0,5243	-0,6122	0,751	0,738	0,694	0,612
1,00	0,5315	-0,1133	0,0050	-0,4382	-0,4232	0,532	0,619	0,482	0,423
1,50	0,3706	-0,0842	0,0072	-0,3152	-0,2936	0,371	0,361	0,335	0,294
2,00	0,2680	-0,0587	0,0052	-0,2194	-0,2038	0,268	0,251	0,233	0,214

Tabela 2

Wartości współczynników wielomianów i niestacjonarne pole temperatur w przekroju walca przy $\Delta Fo = 0,25$

Fo	a_0	a_2	a_3	m	n	t_0	t_1	t_2	t_3
0,00	-	-	-	-	-	1,000	1,000	1,000	1,000
0,25	0,8760	-0,0899	-0,0610	-0,5424	-0,7524	0,876	0,864	0,819	0,725
0,50	0,7354	-0,1412	-0,0042	-0,5774	-0,5900	0,735	0,720	0,671	0,590
0,75	0,6072	-0,1339	0,0089	-0,5080	-0,4804	0,607	0,593	0,551	0,482
1,00	0,4993	-0,1126	0,0091	-0,4231	-0,3958	0,499	0,486	0,552	0,396
1,25	0,4095	-0,0917	0,0070	-0,3478	-0,3268	0,410	0,399	0,370	0,325
1,50	0,3343	-0,0768	0,0071	-0,2859	-0,2646	0,334	0,328	0,304	0,265
1,75	0,2757	-0,0634	0,0059	-0,2359	-0,2182	0,276	0,269	0,249	0,218
2,00	0,2263	-0,0524	0,0051	-0,1943	-0,1790	0,226	0,220	0,204	0,189

Jak widać z przedstawionych wykresów przypadku $\Delta Fo = 0,25$ uzyskano dużą zgodność z rozwiązaniem analitycznym. W obu przypadkach procedura jest zbieżna, zaś błąd metody wynika bezpośrednio z przyjętego interwału czasu i rośnie ze zwiększeniem liczby powtórzeń (podobnie jak w większości metod przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych). Natomiast ilość węzłów w kierunku zmiennej przestrzennej w tym przypadku nie wpływa w sposób widoczny na dokładność rozwiązania, ponieważ wielomian przyjętego stopnia wystarczająco dokładnie opisywał zmianę temperatury w kierunku promieniowym.

W metodach typu różnicowego istnieje prosty, a przy tym uniwersalny sposób oceny błędu metody, polegający na kilkakrotnym rozwiązaniu tego samego zadania na coraz gęściejszych siatkach. Wydaje się, że ten sposób oszacowania błędu może również znaleźć zastosowanie w przypadku oceny dokładności metody warstwicowej.

LITERATURA

1. MOCHNACKI B. - Metoda warstwicowa numerycznego modelowania pola temperatur w ciałach stałych. Rozpr. hab. Nr 111 Z.N. Pol. Śl. En. z 42. (1971).

METODA WARSTWICOWA NUMERYCZNEGO MODELOWANIA POLA TEMPERATUR W CIAŁACH STAŁYCH (UOGÓLNIENIE METODY)

S t r e s z c z e n i e

Podstawy teoretyczne modelowania warstwicowego pola temperatur przedstawione w pierwszej części pracy, uogólniono na krzywoliniowe układy współrzędnych. Rozwiązano również

przykłady liczbowe ilustrujące sposób wykorzystania uogólnionego wariantu metody.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТВЁРДЫХ ТЕЛАХ (обощение метода)

Р е з ю м е

Теоретические основы метода моделирования температурных полей в твёрдых телах, представлены в первой части работы, обощено на криволинейные системы координат. Представлены тоже численные примеры использования общего метода к решении задач теплопроводности.

A NEW NUMERICAL METHOD OF MODELING OF TEMPERATURE FIELD IN SOLID BODIES (generalization of method)

S u m m a r y

Theoretical base of modeling of field temperature according the method presented in the primary part of the article, is generalized on the arbitraty systems of coordinates. There are also presented the numerical examples of utilization of this generalized variant of method.