ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1971

Seria: ENERGETYKA z. 40 Nr kol. 311

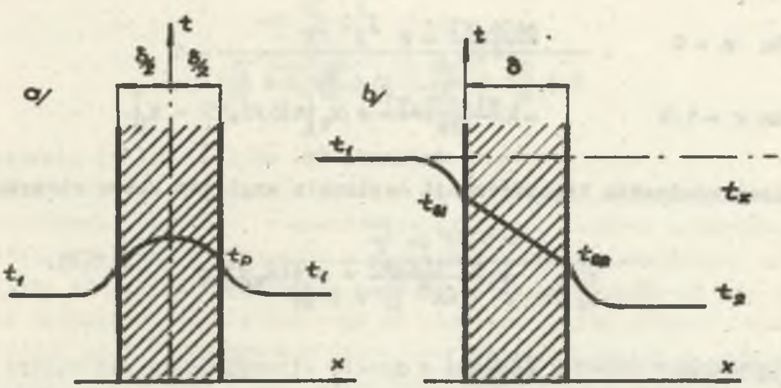
ANDRZEJ GDULA
Katedra Kotłów i Maszyn Cieplnych

WŁASNOŚCI DYNAMICZNE GRUBOŚCIENNEJ PŁASKIEJ PRZEGRODY CIEPLNEJ

Streszczenie. W pracy przedstawiono matematyczny model procesu przenikania ciepła przez płaską grubościenną przegrodę cieplną. Podano sposób wyznaczenia parametrów dynamicznych modelu. Określono dynamiczny błąd aproksymacji.

1. Wstęp

Płaskie przegrody są podstawowymi elementami konstrukcji w większości obiektów cieplnych. Ponieważ grubościenna przegroda jest typowym elementem o parametrach rozłożonych dla wyznaczenia matematycznego modelu obiektu cieplnego konieczne jest zastąpienie przegrody uproszczonym modelem o parametrach skupionych.



Rys. 1. Schemat płaskiej przegrody cieplnej w przypadku symetrycznego (a) i niesymetrycznego (b) nagrzewu ściany

W przeważającej większości dotychczasowych prac [2] uproszczony model przegrody budowany jest przez podział jej na szereg warstw o jednakowej grubości przy założeniu równomierności rozkładu temperatury w każdej warstwie.

Dokładność aproksymacji przy pomocy takiego modelu zwiększa się ze wzrostem liczby warstw, jednak przy zbyt dużej liczbie warstw model staje się niepraktyczny w użyciu.

W niektórych pracach zauważa się próby zastąpienia przegrody szeregiem kilku warstw o wzrastającej grubości. Ten sposób pozwala na dokładne zastąpienie przegrody cieplnej modelem składającym się z trzech, a dla przegród grubszych z co najwyżej sześciu warstwach. Prace te jednak w pełni nie określają optymalnego podziału ścianki na warstwy.

W przedłożonej pracy przedstawiono matematyczny model przegrody cieplnej w przypadku podziału przegrody na szereg warstw o wzrastającej grubości. Zagadnienie rozwiązano dla symetrycznego i niesymetrycznego nagrzewu ściany.

2. Model przegrody cieplnej w przypadku symetrycznego nagrzewu

Pole temperatur w płycie $t(x,\tau)$ opisuje równanie Fouriera-Kirrchoffa

$$a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau} \tag{1}$$

dla $\tau < 0$ $\quad t_z = t(x,\tau) = 0$ (2)

dla $\tau > 0$ $\quad t_z = t_1 \cdot 1(\tau)$ (3)

dla $x = 0$ $\quad \frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x} = 0$ (4)

dla $x = \delta/2$ $\quad -\lambda\frac{\partial t(\delta/2,\tau)}{\partial x} = \alpha_1\left[t(\delta/2,\tau) - t_1\right].$ (5)

Po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a względem czasu otrzymuje się:

$$a\frac{d^2\, t(x,s)}{dx^2} = s\, t(x,s) \tag{6}$$

dla $x = 0$ $\quad \frac{dt(0,s)}{dx} = 0$ (7)

dla $x = \delta/2$ $\quad -\lambda\frac{dt(\delta/2,s)}{dx} = \alpha_1\left[t(\delta/2,s) - t_1\right].$ (8)

Rozwiązanie ogólne równania (6) przedstawi się:

$$t(x,s) = A\ \mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}\,x + B\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,x \tag{9}$$

stąd

$$\frac{d\,t(x,s)}{dx} = A\sqrt{\frac{s}{a}}\, sh\sqrt{\frac{s}{a}}\, x + B\sqrt{\frac{s}{a}}\, ch\sqrt{\frac{s}{a}}\, x\,. \tag{10}$$

Z warunku brzegowego (7) oraz równania (10) otrzymuje się:

$$B\sqrt{\frac{s}{a}} = 0 \tag{11}$$

stąd

$$B = 0\,. \tag{12}$$

Z warunku brzegowego (8) oraz równania (10) i (9) otrzymuje się:

$$A\sqrt{\frac{s}{a}}\, sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta/2 = \frac{\alpha_1}{\lambda}\left[\frac{t_1}{s} - A\, ch\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta/2\right] \tag{13}$$

stąd

$$A = \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda}\,\frac{t_1}{s}}{\sqrt{\frac{s}{a}}\, sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta/2 + \frac{\alpha_1}{\lambda}\, ch\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta/2}\,. \tag{14}$$

Po wstawieniu (12) i (14) do (9) otrzymuje się:

$$t(\delta/2,s) = t_p(s) = \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda}\, ch\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta/2}{\sqrt{\frac{s}{a}}\, sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta/2 + \frac{\alpha_1}{\lambda}\, ch\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta/2}\,. \tag{15}$$

W celu otrzymania transmitancji ściany w postaci ilorazu wielomianów operatorowych należy podstawić w równaniu (15) rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji hiperbolicznych sh i ch

$$sh\sqrt{\frac{s}{a}}\,\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{s}{a}}\,\frac{\delta}{2} + \frac{\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,\frac{\delta}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,\frac{\delta}{2}\right)^5}{5!} + \ldots$$

$$ch\sqrt{\frac{s}{a}}\,\frac{\delta}{2} = 1 + \frac{\frac{s}{a}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{s}{a}\right)^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^4}{4!} + \ldots$$

stąd otrzymuje się:

$$t_p(s) \; \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda}\left(1 + \frac{\frac{s}{a}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{s}{a}\right)^2\left(\frac{\delta}{2}\right)^4}{4!} + \ldots\right.}{\frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{s}{a}\left[\frac{\frac{\delta}{2}}{1!} + \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda}\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}{2!}\right] + \frac{s^2}{a^2}\left[\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda}\left(\frac{\delta}{2}\right)^4}{4!}\right] + \ldots} \; \frac{t_1}{s}$$

po przekształceniach transmitancja przegrody

$$\frac{t_p(s)}{t_1(s)} = \frac{1 + T_{11}s + T_{12}s^2 + \ldots + T_{1n}s^n + \ldots}{1 + T_{21}s + T_{22}s^2 + \ldots + T_{2m}s^m + \ldots}, \tag{16}$$

gdzie:

$$T_{1n} = \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2n}}{a^n(2n)!} \tag{17}$$

$$T_{2m} = \frac{\frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{\frac{\alpha_1}{\lambda}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2m}}{(2m)!}}{a^m\,\frac{\alpha_1}{\lambda}}. \tag{18}$$

Otrzymane w postaci wzoru (16) transmitancja przegrody płaskiej nagrzewanej symetrycznie stanowi iloraz nieskończonych szeregów operatorowych. Jednak ze względu na szybką zbieżność obu szeregów dopuszczalne jest ograniczenie się do kilku pierwszych wyrazów zaniedbując pozostałe jako pomijalne małe. Ponadto można zauważyć, że wartości stałych czasowych licznika są niższe od wartości stałych czasowych mianownika. Z tego względu można w liczniku zaniedbać o jeden wyraz więcej niż w mianowniku jako pomijalnie mały. Stąd w przypadku ograniczenia się do trzech pierwszych wyrazów szeregu we wzorze (16) otrzymuje się:

$$\frac{\Delta t_p(s)}{\Delta t_1(s)} = \frac{1 + T_{11}s + T_{12}s^2}{1 + T_{21}s + T_{22}s^2 + T_{23}s^3}.$$

Wyprowadzoną w postaci wzoru (16) transmitancję przegrody można wyprowadzić również drogą pośrednią z pomocą równania czasowego, przy czym ta droga wyprowadzenia transmitancji umożliwia oszacowanie wielkości błędu stosowanego przybliżenia. Poniżej przedstawiono wyprowadzenie transmitancji ściany z pomocą równania czasowego.

Na podstawie danych z literatury [4] równanie pola temperatur w płycie przy ujemnej skokowej zmianie temperatury otoczenia określa równanie.

$$T = \sum_{n=1}^{n=\infty} An \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta/2}\right) \exp\left(-\mu_n^2 Fo\right), \tag{19}$$

gdzie:

$$T = \frac{t(x, Fo) - t_z}{t_{(0)} - t_z}$$

t_z – temperatura otoczenia

$t(0)$ – temperatura początkowa płyty

Fo – liczba Fouriera

$$Fo = \frac{a\tau}{(\delta/2)^2}$$

$a = \frac{\lambda}{C\rho\varrho}$ współczynnik wyrównania temperatur

$Bi = \frac{\alpha\delta/2}{\lambda}$ liczba Biota.

Podstawiając w równaniu (19) $x = \delta/2$ otrzymuje się równanie: temperatury na powierzchni płyty

$$T_p = \sum_{n=1}^{n=\infty} An \cos\mu_n \exp(-\mu_n^2 Fo). \tag{20}$$

Stąd po podstawieniu $Fo = \frac{a\tau}{(\delta/2)^2}$ oraz przy zerowych warunkach początkowych i jednostkowej dodatniej wartości skoku temperatury otoczenia

$$t_p(\tau) = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos\mu_n \exp\left[-\frac{4\mu_n^2 a}{\delta^2}\tau\right]. \tag{21}$$

Wartości stałych A_n oraz wartości μ_n można odczytać z tablic [4] lub też wyznaczyć z równania, przy czym μ_n są kolejnymi pierwiastkami równania

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \frac{1}{Bi} \mu_n$$

oraz

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} .$$

Z przebiegu zmienności μ_n można zauważyć, że w przybliżeniu

$$\mu_n \approx \mu_1 + (n - 1)\, 3{,}14$$

(przy czym w zakresie $0 \leqslant Bi \leqslant \infty$, μ_1 zmienia się w granicach od 0 do 1,57) oraz szybkie zmniejszanie się współczynnika $A_n \times \cos . \mu_n$ ze wzrostem wskaźnika n. Ponieważ szybkość zbieżności w czasie poszczególnych wyrazów szeregu (21) jest proporcjonalna do kwadratu μ_n szereg (21) staje się szybko zbieżny w czasie. Równocześnie, jeśli uwzględni się szybkie zmniejszanie się współczynnika A_n nie popełniony zostanie większy błąd, jeśli począwszy od pewnego wskaźnika n = i, wszystkie dalsze wyrazy szeregu zostaną zastąpione przebiegiem czasowym członu o wskaźniku i, lub też zostaną pominięte.
Tak np. dla $Bi \leqslant 2{,}0$

$$\mu_4^2 \leqslant 100\, \mu_1^2$$

oraz

$$A_4 \cos \mu_4 \leqslant 0{,}09$$

z czego wynika, że człon czwarty szeregu zanika w czasie 100 razy szybciej od pierwszego wyrazu i z uwagi na to, dostatecznie dokładnie można określić przebieg odpowiedzi czasowej temperatury powierzchni płyty, na skokową zmianę temperatury otoczenia, ograniczając się tylko do trzech pierwszych wyrazów szeregu lub też zastępując dalsze wyrazy szeregu przebiegiem wykładniczym, jak dla trzeciego wyrazu szeregu. Stąd wynikają dwa sposoby przedstawienia transmitancji przegrody

$$\frac{t_p(s)}{t_1(s)} = F_p(s) .$$

2.1. W przypadku pominięcia wyrazów szeregu o wskaźniku n > 3 otrzymuje się

$$t_p(\tau) = 1 - A_1\cos\mu_1 \exp\left(\frac{-4a\,\mu_1^2}{\delta^2}\tau\right) - A_2\cos\mu_2 \exp\left(-\frac{4a\,\mu_2^2}{\delta^2}\tau\right) -$$

$$- A_3\cos\mu_3 \exp\left(\frac{-4a\,\mu_3^2}{\delta^2}\tau\right)$$

po przekształceniu:

$$t_p(\tau) = 1 - A_1\cos\mu_1 - A_2\cos\mu_2 - A_3\cos\mu_3 + A_1\cos\mu_1\Big[1 +$$

$$- \exp\left(-\frac{4a\,\mu_1^2}{\delta^2}\tau\right)\Big] + A_2\cos\mu_2\left[1 - \exp\left(-\frac{4a\,\mu_2^2}{\delta^2}\tau\right)\right] +$$

$$+ A_3\cos\ _3\left[1 - \exp\left(-\frac{4a\,\mu_3^2}{\delta^2}\tau\right)\right].$$

Stąd po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a otrzymuje się

$$t_p(s) = \frac{1 - A_1\cos\mu_1 - A_2\cos\mu_2 - A_3\cos\mu_3}{s} + \frac{A_2\cos\mu_1}{s\left[\frac{\delta^2}{4a\,\mu_1^2}s + 1\right]} +$$

$$+ \frac{A_2\cos\mu_2}{s\left(\frac{\delta^2}{4a\,\mu_2^2}s + 1\right)} + \frac{A_3\cos\mu_3}{s\left(\frac{\delta^2}{4a\,\mu_3^2}s + 1\right)} \tag{22}$$

ponieważ

$$t_1(\tau) = 1(\tau) \quad \text{to} \quad t_1(s) = \frac{1}{s} \tag{23}$$

podstawiając (23) do (22) otrzymuje się (24)

$$\frac{t_p(s)}{t_1(s)} = 1 - A_1\cos\mu_1 - A_2\cos\mu_2 - A_3\cos\mu_3 + \frac{A_1\cos\mu_1}{\frac{\delta^2}{4a\,\mu_1^2}s + 1} +$$

$$+ \frac{A_2\cos\mu_2}{\frac{\delta^2}{4a\,\mu_2^2}s + 1} + \frac{A_3\cos\mu_3}{\frac{\delta^2}{4a\,\mu_3^2}s + 1}$$

$$\frac{t_p(s)}{t_1(s)} = K_1 + \frac{(1 - K_1)(T_4 s^2 + T_5 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \tag{24}$$

gdzie:

$$T_1 = \frac{\delta^2}{4\,\mu_1^2 a} \qquad T_2 = \frac{\delta^2}{4a\,\mu_2^2} \qquad T_3 = \frac{\delta^2}{4a\,\mu_3^2}$$

$$K_1 = 1 - A_1\cos\mu_1 - A_2\cos\mu_2 - A_3\cos\mu_3$$

$$T_4 = \frac{A_1T_2T_3\cos\mu_1 + A_2T_1T_3\cos\mu_2 + A_3T_1T_2\cos\mu_3}{A_1\cos\mu_1 + A_2\cos\mu_2 + A_3\cos\mu_3}$$

$$T_5 = \frac{A_1(T_2+T_3)\cos\mu_1 + A_2(T_1+T_3)\cos\mu_2 + A_3(T_1+T_2)\cos\mu_3}{A_1\cos\mu_1 + A_2\cos\mu_2 + A_3\cos\mu_3}.$$

2.2. Natomiast w przypadku zastąpienia przebiegów czasowych wyrazów o wskaźniku $n > 3$ przebiegiem wykładniczym jak dla trzeciego wyrazu szeregu, otrzymuje się:

$$t_p(\tau) = 1 - A_1\cos\mu_1\exp\left(-\frac{4a\,\mu_1^2}{\delta^2}\tau\right) - A_2\cos\mu_2\exp\left(-\frac{4a\,\mu_2^2}{\delta^2}\tau\right) -$$

$$- (1 - A_1\cos\mu_1 - A_2\cos\mu_2)\exp\left(-\frac{4a\,\mu_3^2}{\delta^2}\tau\right)$$

stąd po transformacji Laplace a otrzymuje się:

$$t_p(s) = \frac{A_1 \cos \mu_1}{s(\frac{\delta^2}{4a\,\mu_1^2}s+1)} + \frac{A_2 \cos \mu_2}{s(\frac{\delta^2}{4a\,\mu_2^2}s+1)} + \frac{1-A_1\cos\mu_1 - A_2\cos\mu_2}{s(\frac{\delta^2}{4a\,\mu_3^2}s+1)}$$

podstawiając $t_1(s) = 1/s$ otrzymuje się

$$\frac{t_p(s)}{t_1(s)} = \frac{T_4 s^2 + T_5 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \tag{25}$$

gdzie T_1, T_2, T_3 przyjmują wartości jak w poprzednim rozwiązaniu

$$T_4 = A_1 T_2 T_3 \cos\mu_1 + A_2 T_1 T_3 \cos\mu_2 + (1 - A_1\cos\mu_1 - A_2\cos\mu_2) T_1 T_2$$

$$T_5 = A_1(T_2+T_3)\cos\mu_1 + A_2(T_1+T_3)\cos\mu_2 + (1 - A_1\cos\mu_1 +$$

$$- A_2\cos\mu_2)(T_1+T_2).$$

3. Model przegrody cieplnej w przypadku niewymetrycznego nagrzewu przegrody (przy skokowej zmianie temperatury z jednej strony przegrody)

Pole temperatur w płycie $t(x,\tau)$ opisuje równanie

$$a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial(x,\tau)}{\partial\tau} \tag{26}$$

dla $\tau \leqslant 0$ $\quad t_z = t(x,\tau) = t_1$

dla $\tau > 0$ $\quad t_z = t_2$

dla $x = 0$ $\quad -\lambda\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x} = \alpha_1\left[t_1 - t(0,\tau)\right] \quad (27)$

dla $x = \delta$ $\quad -\lambda\frac{\partial t(\delta,\tau)}{\partial x} = \alpha_2\left[t(\delta,\tau) - t_2\right] \quad (28)$

po przeprowadzeniu transformacji Laplace'a względem czasu równań (26), (27) i (28) otrzymuje się

$$a\frac{d^2t(x,s)}{dx^2} = st(x,s) - t_1 \qquad (29)$$

$$-\frac{dt(0,s)}{dx} = \frac{\alpha_1}{\lambda}\left[\frac{t_1}{s} - t(0,s)\right] \qquad (30)$$

$$-\frac{dt(\delta,s)}{dx} = \frac{\alpha_2}{\lambda}\left[t(\delta,s) - \frac{t_2}{s}\right]. \qquad (31)$$

Rozwiązanie ogólne równania (29) przedstawi się:

$$t(x,s) - \frac{t_1}{s} = A\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}\,x + B\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,x\,. \qquad (32)$$

Po wyznaczeniu z równań (32) (30) (31) (10) stałych A i B i wstawieniu do (32) otrzymuje się:

$$t(x,s) - \frac{t_1}{s} = \frac{\frac{\alpha_2}{\lambda}(t_1-t_2)\left[\sqrt{\frac{s}{a}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}\,x + \frac{\alpha_2}{\lambda}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,x\right]}{s\left[\frac{s}{a}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}} + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\lambda}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda^2}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta\right]} \qquad (33)$$

po podstawieniu w równaniu (33) $x = 0$, $\frac{t_1-t_2}{s} = t_{1-2}(s)$ oraz $t(0,s) - \frac{t_1}{s} = \Delta t_{s1}(s)$ otrzymuje się równanie temperatury na powierzchni ściany w przypadku skokowej zmiany temperatury otoczenia na zewnątrz

$$\Delta t_{s1}(s) = \frac{\frac{\alpha_2}{\lambda}\sqrt{\frac{s}{a}}}{\frac{s}{a}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\lambda}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\lambda^2}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta}\,\Delta t_{12}(s) \qquad (34)$$

stąd po rozłożeniu w szereg potęgowy sh(z), ch(z)

$$\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta = \sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + \frac{\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta\right)^3}{3!} + \frac{\left(\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta\right)^5}{5!} + \ldots$$

$$\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta = 1 + \frac{\frac{s}{a}\,\delta^2}{2!} + \frac{\left(\frac{s}{a}\right)^2\delta^4}{4!} + \ldots$$

oraz po przekształceniach otrzymuje się

$$\Delta t_{s1}(s) = \frac{K_1}{1 + T_{11}s + T_{12}s^2 + \ldots T_{1n}s^n + \ldots}\Delta t_{12}(s), \tag{35}$$

gdzie

$$K_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\,\alpha_2\,\frac{\delta}{\lambda}}$$

$$T_{1n} = \frac{\frac{\delta^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\lambda}\,\frac{\delta^{2n}}{(2n)!} + \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\lambda^2}\,\frac{\delta^{2n+1}}{(2n+1)!}}{a^n\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\lambda} + \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\lambda^2}\,\delta\right)}. \tag{36}$$

Podstawiając następnie w równaniu (33) $x = \delta$ oraz $t(\delta,s) - \frac{t_1}{s} = \Delta t_{s2}(s)$ otrzymuje się równanie temperatury na powierzchni ściany w odpowiedzi na skokową zmianę temperatury otoczenia od strony tej powierzchni (od wewnątrz)

$$\Delta t_{s2}(s) = \frac{\frac{\alpha_2}{\lambda}\sqrt{\frac{s}{a}}\left[\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + \frac{\alpha_2}{\lambda}\sqrt{\frac{a}{s}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta\right]}{\frac{s}{a}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\lambda}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{s}{a}} + \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\lambda^2}\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta}\Delta t_{1-2}(s). \tag{37}$$

Stąd po rozłożeniu w szereg potęgowy sh i ch w liczniku oraz mianowniku, po dokonaniu uproszczeń otrzymuje się:

$$\Delta t_{s2}(s) = K_2\,\frac{1 + T_{21}s + T_{22}s^2 + \ldots + T_{2m}s^m + \ldots}{1 + T_{11}s + T_{12}s^2 + \ldots T_{1n}s^n + \ldots}\Delta t_{12}(s), \tag{38}$$

gdzie

$$K_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1\,\alpha_2\,\frac{\delta}{\lambda}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\,\alpha_2\,\frac{\delta}{\lambda}}$$

$$T_{2m} = \frac{\frac{\delta^{2m}}{(2m)!} + \frac{\alpha_1}{\lambda}\,\frac{\delta^{2m+1}}{(2m+1)!}}{a^m\left(1 + \frac{\alpha_1\delta}{\lambda}\right)}$$

T_{1n} określa wzór (36).

Podobnie jak dla przypadku ściany nagrzewanej symetrycznie transmitancje (35) i (38) przegrody nagrzewanej niesymetrycznie stanowią ilorazy nieskończonych wielomianów operatorowych. Jednak ze względu na szybką zbieżność obu wielomianów dopuszczalne jest ograniczenie się do kilku pierwszych wyrazów.

Można zauważyć również w przypadku transmitancji (38), że wartość stałych czasowych licznika jest mniejsza od wartości stałych czasowych mianownika, co pozwala zaniedbać jako pomijalnie mały jeden wyraz szeregu więcej w liczniku niż w mianowniku.

W przypadku ograniczenia się do trzech pierwszych wyrazów otrzymuje się:

$$\Delta t_{s1}(s) = \frac{K_1}{1 + T_{11}s + T_{12}s^2 + T_{13}s^2} \Delta t_{12}(s)$$

oraz

$$\Delta t_{s2}(s) = K_2 \frac{1 + T_{21}s + T_{22}s^2}{1 + T_{11}s + T_{12}s^2 + T_{13}s^3} \Delta t_{12}(s).$$

Wyprowadzone w postaci wzorów (35) i (38) transmitancje przegrody nagrzewanej niesymetrycznie można wyprowadzić również drogą pośrednią z pomocą równania czasowego.

Poniżej przedstawiono wyprowadzenie transmitancji przegrody z pomocą równania czasowego dla oszacowania błędu stosowanego przybliżenia.

Pole temperatur w płycie, w przypadku skokowej zmiany temperatury w pomieszczeniu, dla przyjętego na rysunku 1 układu współrzędnych przy warunkach początkowych $t(x,0) = t_0$, opisuje równanie (39).

$$\frac{t(x,\tau) - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{1 + Bi_1 \frac{x}{\delta}}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \Big(\cos \mu_n \frac{x}{\delta} + \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin \mu_n \frac{x}{\delta}\Big) \exp(-\mu_n^2\, Fo), \tag{39}$$

gdzie:

t_2 – temperatura w pomieszczeniu

t_1 – temperatura otoczenia

Fo – liczba Fouriera $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$.

Dla określenia zależności temperatury powierzchni od temperatury pomieszczenia, należy podstawić w równaniu (39) $x = \delta$. Ponadto, jeśli założy się że $\Delta t_{s2} = t_{s2} - t_1$ oraz $\Delta t_2 = t_2 - t_1$, otrzymuje się:

$$\Delta t_{s2}(\tau) = \frac{1 + Bi_1}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n(\cos\mu_n) + \tag{40}$$

$$+ \frac{Bi_1}{\mu_n} \sin\mu_n) \times \exp(-\mu_n^2 Fo)\,\Delta t_2 .$$

Wartości μ_n można odczytać z tablic [1] lub też wyznaczyć z równania, przy czym μ_n są kolejnymi pierwiastkami równania

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu^2 - Bi_1\,Bi_2}{\mu\left[Bi_1 + Bi_2\right]} .$$

Natomiast wartość stałej A_n należy wyznaczyć z wzoru:

$$A_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}\right)\frac{\sin\mu_n\cos\mu_n + \mu_n}{2\sin\mu_n} + \frac{Bi_1}{\mu_n}\sin\mu_n} .$$

W tym przypadku, podobnie jak w przypadku ściany obustronnie symetrycznie nagrzewanej, można zauważyć z przebiegu zmienności μ_n, że:

$$\mu_n \approx \mu_1 + (n - 1)\,3{,}14$$

oraz ze wzrostem wskaźnika n szybko maleje wyrażenie

$$A_n(\cos\mu_n + \frac{Bi_1}{\mu_n}\sin\mu_n)$$

z czego wynika, że ze wzrostem wskaźnika n, szereg staje się szybko zbieżny w czasie i tak jak poprzednio można stwierdzić, że nie zostanie popełniony większy błąd, jeśli od pewnego wskaźnika n = 1, wszystkie dalsze wyrazy szeregu zostaną zastąpione przebiegiem czasowym członu o wskaźniku 1 lub też zostaną zupełnie pominięte. Jednakże w przypadku ściany niesymetrycznie nagrzewanej, wartości μ_1 przy tych samych co dla ściany symetrycznej liczbach $Bi = Bi_1 = Bi_2$ są kilkakrotnie większe. Stąd też szybkość zbieżności w czasie poszczególnych wyrazów szeregu ze wzrostem wskaź-

nika n jest mniejsza w stosunku do pierwszego wyrazu niż w przypadku ściany płaskiej a wskaźnik i, ograniczający zakres dopuszczalnych uproszczeń będzie większy i wzrastający ze wzrostem liczby Biota.
Dla

$$Bi_1 = Bi_2 = 0{,}6; \quad \mu_4^2 \approx 90\,\mu_1^2$$

dla

$$Bi_1 = Bi_2 = 1{,}0; \quad \mu_5^2 \approx 95\,\mu_1^2$$

dla

$$Bi_1 = Bi_2 = 2{,}0; \quad \mu_6^2 \approx 80\,\mu_1^2$$

dla

$$Bi_1 = Bi_2 = 3{,}0; \quad \mu_7^2 \approx 100\,\mu_1^2$$

dla większych wartości liczb $Bi_1 = Bi_2$ dochodzących do 100

$$\mu_7^2 \approx 50\,\mu_1^2$$

co też w przypadku ograniczenia się do pierwszych sześciu wyrazów szeregu pozwoli otrzymać w miarę zadowalającą dokładność przybliżenia.
Na podstawie powyższych danych można przyjąć, że dla liczb

$$Bi_1 = Bi_2 \leqslant 0{,}6$$

uzyska się dostateczną dokładność, jeśli ograniczymy się do trzech pierwszych wyrazów ciągu. Dla liczb $Bi_1 = Bi_2 \leqslant 1$ do czterech, dla liczb $Bi_1 = Bi_2 \leqslant 2$ do pięciu, natomiast dla większych wartości liczb Bi do sześciu wyrazów. Jednocześnie z uwagi na wolniejszą zbieżność dalszych wyrazów szeregu w stosunku do pierwszego wyrazu, uzyska się znacznie większą dokładność przybliżenia, jeśli wyrazy o wskaźniku większym od 1 zastąpi się przebiegiem czasowym wyrazu o wskaźniku n = 1.

W ten sposób w przypadku ograniczenia się do trzech pierwszych wyrazów szeregu n, dla $Bi_1 = Bi_2 \leqslant 0{,}6$.

$$\Delta t_{s2}(\tau) = \frac{1 + Bi_1}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}} \Bigg[1 - \frac{\dfrac{A_1(\cos\mu_1 + \frac{Bi_1}{\mu_1}\sin\mu_1)}{1 + Bi_1}}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}} \exp\left(\frac{-\mu_1^2 a}{\delta^2}\tau\right) -$$

$$- \frac{\dfrac{A_2(\cos\mu_2 + \frac{Bi_1}{\mu_2}\sin\mu_2)}{1 + Bi_1}}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}} \exp\left(\frac{-\mu_2^2 a}{\delta^2}\tau\right) - \tag{41}$$

$$- \Bigg(1 - \frac{\dfrac{A_1(\cos\mu_1 + \frac{Bi_1}{\mu_1}\sin\mu_1)}{1 + Bi_1}}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}}$$

$$- \frac{\dfrac{A_2(\cos\mu_2 + \frac{Bi_1}{\mu_2}\sin\mu_2)}{1 + Bi_1}}{1 + Bi_1 \frac{Bi_1}{Bi_2}} \Bigg) \exp\left(\frac{-\mu_3^2 a}{\delta^2}\tau\right) \Bigg] \Delta t_2 .$$

Stąd po transformacji Laplace'a i podstawieniu $\Delta t_2(s) = \frac{\Delta t_2}{s}$ i dokonaniu przekształceń otrzymuje się:

$$\frac{\Delta t_{s2}(s)}{\Delta t_2(s)} = \frac{K_w(T_4 s^2 + T_5 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \tag{42}$$

gdzie:

$$T_1 = \frac{\delta^2}{\mu_1^2\, a} \quad T_2 = \frac{\delta^2}{\mu_2^2\, a} \quad T_3 = \frac{\delta^2}{\mu_3^2\, a}$$

$$K_w = \frac{1 + Bi_1}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}}$$

$$T_4 = \frac{A_1\left(\cos\mu_1 + \frac{Bi_1}{\mu_1}\sin\mu_1\right)T_2T_3}{K_w} + \frac{A_2\left(\cos\mu_2 + \frac{Bi_1}{\mu_2}\sin\mu_2\right)T_1T_3}{K_w} +$$

$$+\left[1 - \frac{A_1\left(\cos\mu_1 + \frac{Bi_1}{\mu_1}\sin\mu_1\right)}{K_w} - \frac{A_2\left(\cos\mu_2 + \frac{Bi_1}{\mu_2}\sin\mu_2\right)}{K_w}\right]T_1T_2$$

$$T_5 = \frac{A_1\left(\cos\mu_1 + \frac{Bi_1}{\mu_1}\sin\mu_1\right)}{K_w}(T_2+T_3) + \frac{A_2\left(\cos\mu_2 + \frac{Bi_1}{\mu_2}\sin\mu_2\right)}{K_w}(T_1+T_3) +$$

$$+\left[1 - \frac{A_1\left(\cos\mu_1 + \frac{Bi_1}{\mu_1}\sin\mu_1\right)}{K_w} - \frac{A_2\left(\cos\mu_2 + \frac{Bi_1}{\mu_2}\sin\mu_2\right)}{K_w}\right](T_1+T_2).$$

Dla wyznaczenia zależności temperatury na powierzchni ściany od wewnątrz w odpowiedzi na skokową zmianę temperatury zewnętrznej Δt_2 należy w równaniu czasowym (39) ściany podstawić $x = 0$.
Podstawiając $\Delta t_{s1} = t_{s1} - t_1$ otrzymuje się:

$$\Delta t_{s1}(\tau) = \left[\frac{1}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}} - \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \exp\left(-\mu_n^2 Fo\right)\right]\Delta t_2 .$$

Po przeprowadzeniu jak poprzednio przekształceń i podstawieniu otrzymuje się:

$$\frac{\Delta t_{s1}(s)}{\Delta t_2(s)} = \frac{K_o\,(T_{o4}s^2 + T_{o5}s + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)} . \qquad (43)$$

Ponieważ na podstawie równania (35) wynika, że licznik transmitancji (43) jest tożsamościowo równy Ko, stąd bezpiśrednio:

$$\frac{\Delta t_{s2}(s)}{\Delta t_2(s)} = \frac{K_o}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)} ,$$

gdzie:

T_1, T_2, T_3 przyjmują takie wartości, jak poprzednio

$$K_o = \frac{1}{1 + Bi_1 + \frac{Bi_1}{Bi_2}}.$$

W przypadku ograniczenia się do większej liczby wyrazów szeregu (39) transmitancję przegrody $F_1(s) = \frac{\Delta t_{s2}(s)}{\Delta t_2(s)}$ oraz $F_2 = \frac{\Delta t_{s4}(s)}{\Delta t_2(s)}$ można by wyznaczyć tak, jak dla poprzedniego przypadku.

4. Wnioski

W przedstawionym rozwiązaniu matematycznego modelu płaskiej przegrody cieplnej, dynamiczny błąd aproksymacji występuje jedynie tylko w początkowym odcinku przebiegu czasowego, równym 1/100 - 1/50 czasu przebiegu temperatury na powierzchni płyty do stanu quasi ustalonego ($\tau = 4\ T_{max}$), w odpowiedzi na skokową zmianę temperatury otoczenia płyty. Maksymalna wartość tego błędu z uwagi na niskie wartości współczynników A_n ze wzrostem wskaźnika n jest nieznaczna i nie przekracza kilku procent wartości odpowiedzi skokowej w stanie ustalonym. Do małych liczb Bi wartość błędu aproksymacji jest niższa, natomiast dla wyższych wartości liczb Biota wartość błędu aproksymacji będzie wyższa.

LITERATURA

[1] GRIGORIEW L., MONKOWSKIJ O.: Inzenernyje zadaczi niestacionarnogo teplooobmiena Energia 1968 r.

[2] KUZMIN M.P.: Elektromodelirowanie niekotorych niestacionarnych tepłowych procesow Energia 1964 r.

[3] ORDYNCEW W.M.: Opis matematyczny obiektów regulacji automatycznej WNT 1968 r.

[4] STANISZEWSKI B.: Wymiana ciepła zadania i przykłady PWN 1965 r.

[5] CERMAK J., PETERKA V., ZAVORKA J.: Dynamika regulowanych soustav Academia Praha 1968 r.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОЛСТОСТЕННОЙ ПЛОСКОЙ ТЕПЛОВОЙ ПРЕГРАДЫ

Р е з ю м е

В статье представлена математическая модель неограниченной толстостенной плоской теплавой преграды. Обозначены динамические параметры модели. Определена динамическая ошибка аппроксимации.

DYNAMIC PROPERTIES OF A THICK FLAT HEAT PARTITION

S u m m a r y

The paper presents the mathematical model of unsteady heat transfer through thick unlimited flat wall. The way of determining of model dynamic parameters are presented. Dynamic error of approximation is described.