ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1973
Seria: Energetyka z. 47 Nr kol. 372

Andrzej Witkowski

ZASTOSOWANIE QUASIORTOGONALNYCH WSPÓŁRZĘDNYCH DO OBLICZEŃ PRZEPŁYWU W WIEŃCACH SPRĘŻAJĄCYCH O PRZESTRZENNIE UKSZTAŁTOWANYCH KANAŁACH MIĘDZYŁOPATKOWYCH

Streszczenie. Praca stanowi dalsze rozwinięcie metody obliczeń quasitrójwymiarowego przepływu płynu nielepkiego przez przestrzenne kanały międzyłopatkowe sprężających kół wirnikowych, przedstawionej we wcześniejszej publikacji autora [5].

W celu uzyskania większej dokładności i szybkości obliczeń zastąpiono ortogonalne w przekroju merydionalnym wirnika tzw. quasiortogonalnymi [3]. Stwarza to w efekcie możliwość wyeliminowania dodatkowych prac wykreślnych między kolejnymi iteracjami oraz powiązania programów obliczeń pierwszego i drugiego przybliżenia dwuwymiarowego przepływu w jedną całość.

1. Wstęp

W pracy [5] równania równowagi przepływu uwzględnionego w przekroju merydionalnym wieńca sprężającego przedstawiono w układzie tzw. współrzędnych naturalnych, w którym jedna z osi m była styczna do linii prądu w badanym punkcie, a pozostałe (n,ϑ) były do niej prostopadłe (rys. 1).

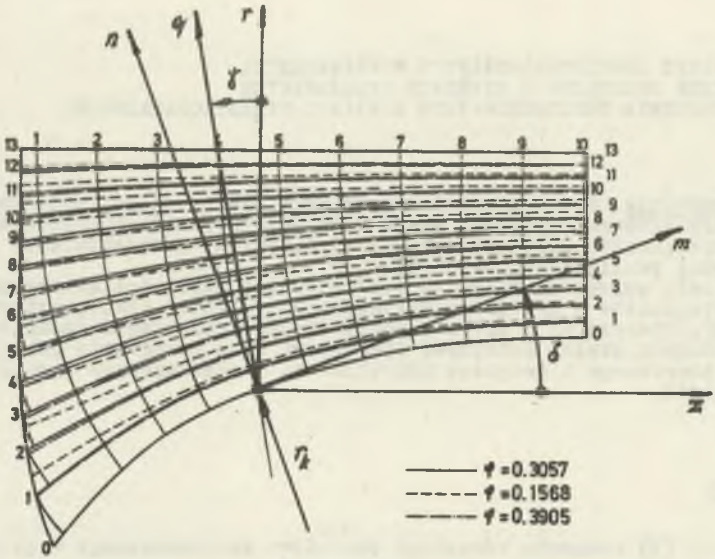
Wprowadzało to tę niedogodność, że ortogonalne do linii prądu zmieniały po każdej iteracji swój kształt i długość co wiązało się z koniecznością prowadzenia dodatkowych prac wykreślnych między kolejnymi przybliżeniami i ponownego wprowadzania uzyskanych stąd danych do maszyny.

W niniejszej pracy zastosowano za Katsanisem [3] w zastępstwie ortogonalnych szereg linii prostych nachylonych do linii prądu pod kątem różnym od normalnego i przebiegających od piasty do osłony zewnętrznej (rys. 1).

Proste te zwane w dalszym ciągu quasiortogonalnymi nie zmieniają swego kierunku oraz długości w procesie kolejnych przybliżeń co umożliwia opracowania programu obliczeń zapewniającego uzyskiwanie ostatecznych wyników rozkładu prędkości i ciśnień po jednorazowym wprowadzeniu danych do EMC. Umożliwia to zarazem potraktowanie programu obliczeń osiowosymetrycznego przybliżenia przepływu oraz w kanałach międzyłopatkowych jako całości.

Równania równowagi przepływu zawarte w pracy [3] wyprowadzone zostały dla promieniowego wieńca wirnikowego o ściśle promieniowym przebiegu łopatek.

W niniejszej pracy posłużono się quasitrójwymiarowym przybliżeniem przepływu dla bardziej ogólnego przypadku wieńca sprężającego z uwzględnieniem przestrzennego ukształtowania łopatek. W odróżnieniu od Katsanisa [3] wprowadzono ponadto pojęcie masowej siły łopatkowej [2].



Rys. 1. Quasiortogonalne q i współrzędne naturalne n,m w przekroju merydionalnym kanału międzyłopatkowego

2. Równania przepływu w przekroju merydionalnym

Równania równowagi przepływu izentropowego w układzie współrzędnych wirujących wraz z łopatkami ze stałą prędkością kątową ω (rys. 2) mają postać [2]:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = F_z - \frac{dw_z}{dt} \tag{1}$$

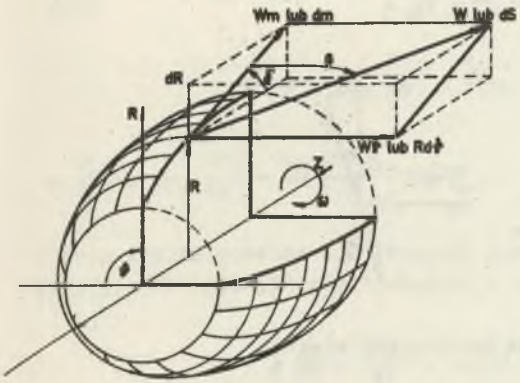
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} = F_r - \frac{dw_r}{dt} + \frac{w_\vartheta^2}{r} + \omega^2 r + 2\omega\, w_\vartheta \tag{2}$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{r\partial\vartheta} = F_\vartheta - \frac{dw_\vartheta}{dt} - \frac{w_r w_\vartheta}{r} - 2\omega\, w_r\,. \tag{3}$$

Mnożąc obie strony równań (1), (2), (3) odpowiednio przez $w_z = \frac{dz}{dt}$, $w_r = \frac{dr}{dt}$, $w_\vartheta = \frac{rd_\vartheta}{dt}$ i dodając stronami otrzymujemy przy uwzględnieniu wzajem-

nej ortogonalności wektorów siły masowej $\overline{F}$ i prędkości $\overline{w}$, równanie energii w postaci

$$\frac{1}{2}\frac{dw^2}{dt} = \omega^2 r \frac{dr}{dt} - \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dt} = \frac{\omega^2}{2}\frac{d(r^2)}{dt} - \frac{di}{dt}. \tag{4}$$



Rys. 2. Osiowosymetryczna powierzchnia prądu

Całkując ostatnie równanie wzdłuż linii prądu począwszy od krawędzi wlotowej oraz pamiętając o zależnościach: $c_m = w_m$, $c_\vartheta = \omega \cdot r + w_\vartheta$ oraz $c^2 = w^2 + 2\omega r c_\vartheta - \omega^2 r^2$, otrzymujemy równanie bilansu energii przepływu względnego w układzie wirującym

$$i = hc_1 - \omega r_1 c_{\vartheta 1} + \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{w^2}{2}. \tag{5}$$

Jeżeli odległość mierzoną wzdłuż quasiortogonalnej oznaczymy przez q, to gradient ciśnienia w kierunku tej osi można wyznaczyć z zależności

$$\frac{dp}{dq} = \frac{\partial p}{\partial r}\frac{dr}{dq} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{dq}. \tag{6}$$

Z trójkątów prędkości wynikają zależności

$$w_r = w_m \cdot \sin\delta$$
$$w_z = w_m \cdot \cos\delta. \tag{7}$$

Pochodna prędkości w_r i w_z względem czasu t dla ustalonego przepływu

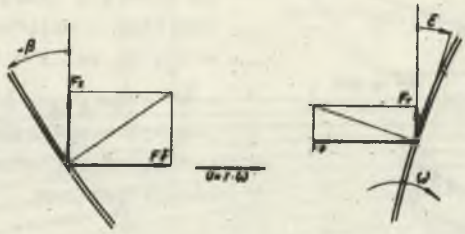
$$\frac{dw_r}{dt} = \frac{dw_m}{dt}\sin\delta + w_m \cos\delta \frac{d\delta}{dt} \tag{8}$$

$$\frac{dw_z}{dt} = \frac{dw_m}{dt}\cos\delta - w_m \sin\delta \frac{d\delta}{dt}, \tag{9}$$

gdzie

$$\frac{dw_m}{dt} = \frac{dw_m}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} = \frac{dw_m}{dm} \cdot w_m \tag{10}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta}{dm}\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{r_k} \cdot w_m \, . \tag{11}$$



Rys. 3. Siły działające na łopatkę wirnika

Ponadto pomiędzy siłami łopatkowymi (rys. 3) występują zależności

$$\begin{aligned} F_z &= F_\vartheta \cdot \operatorname{tg} \beta_0 \\ F_r &= F_\vartheta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon \, . \end{aligned} \tag{12}$$

Siłę obwodową F_ϑ wyznaczamy z równania (3), które przy założeniu, że przepływ jest osiowosymetryczny przyjmie postać

$$F_\vartheta = \frac{dw_\vartheta}{dt} + \frac{w_\vartheta \cdot w_r}{r} + 2\omega \cdot w_r \, , \tag{13}$$

gdzie

$$\frac{dw_\vartheta}{dt} = \frac{dw_\vartheta}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} = w_m \cdot \frac{dw_\vartheta}{dm} \, , \tag{14}$$

wówczas

$$F_\vartheta = w_m \cdot \frac{dw_\vartheta}{dm} \cdot \frac{w_\vartheta \cdot w_r}{r} + 2 \cdot \omega \cdot w_r \, . \tag{15}$$

Kąt β_0 jest to kąt łopatkowy uzyskany w przecięciu cylindrycznym i obliczany jest z zależności [5]: $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta_0 \cdot \cos\delta + \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \sin\delta$. Wprowa-

dzamy równania (1), (2) oraz zależności (8), (9), (10), (11), (12) i (15) do równania (6) i otrzymujemy

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dq} = \Big[w_m^{\,2}\cos\delta \cdot \frac{1}{r_k} + \frac{(w_\vartheta + \omega r)^2}{r} - \frac{dw_m}{dm} w_m \sin\delta +$$

$$+ \operatorname{tg}\varepsilon \left(w_m \frac{dw_\vartheta}{dm} + \frac{w_\vartheta \cdot w_r}{r} + 2\omega w_r\right)\Big] \frac{dr}{dq} - \tag{16}$$

$$- \Big[\operatorname{tg}\beta_o\left(w_m \frac{dw_\vartheta}{dm} + \frac{w_\vartheta \cdot w_r}{r} + 2\omega w_r\right) - \frac{dw_m}{dm} w_m \cos\delta - w_m^{\,2} \sin\delta \frac{1}{r_k}\Big] \frac{dz}{dq} .$$

W celu wyeliminowania z ostatniego równania gradientu ciśnienia $1/\varrho \cdot \frac{dp}{dq}$, równanie energii (5) różniczkujemy w kierunku quasiortogonalnej q:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dq} = \frac{dh_{01}}{dq} - \frac{d\omega\lambda_1}{dq} + \omega^2 r \frac{dr}{dq} - w \frac{dw}{dq} \tag{17}$$

i wprowadzamy do równania (16).
Uwzględniając ponadto, że $dr/dq = \cos\gamma$, $\frac{dz}{dq} = \sin\gamma$ oraz

$$\begin{aligned} w_m &= w\cos\beta \\ w &= w\sin\beta \\ w_r &= w \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta , \end{aligned} \tag{18}$$

otrzymujemy ostateczną postać równania równowagi przepływu względnego w kierunku q,

$$\frac{dw}{dq} = - w \Big[\frac{\cos^2\beta}{r_k}(\cos\delta \cos\gamma + \sin\delta \sin\gamma) + \frac{\sin^2\beta \cdot \cos\gamma}{r} +$$

$$+ (\operatorname{tg}\varepsilon \cos\gamma - \operatorname{tg}\beta_o \sin\gamma)\cos\beta \cdot \left(\frac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{r} + \frac{d}{dm}\sin\beta\right) +$$

$$+ (\cos\delta \cdot \sin\gamma - \sin\delta \cdot \cos\gamma)\cos\beta \frac{d}{dm}\cos\beta\Big] - \tag{19}$$

$$- 2\omega \sin\beta \cos\gamma - (\operatorname{tg}\varepsilon \cos\gamma - \operatorname{tg}\beta_o \sin\gamma)\left(\cos\beta \sin\beta \frac{dw}{dm} + 2\omega \cos\beta \sin\delta\right) -$$

$$- (\cos\delta \sin\gamma - \sin\delta \cos\gamma)\cos^2\beta \frac{dw}{dm} + \frac{\omega}{w}\frac{dh_{01}}{dq} - \frac{\omega}{w}\frac{d\lambda_1}{dq} .$$

Zmienne zależne od kształtu geometrycznego kanału wirnikowego zgrupowane przy w i jako wyraz wolny oznaczono dwoma parametrami P i Q i otrzymano zależność

$$\frac{dw}{dq} = -Pw - Q . \tag{20}$$

Jeżeli dowolne proste q zastąpimy z kolei ortogonalnymi do linii prądu n, wówczas kąt γ (rys. 2) będzie odpowiadał kątowi β i równanie (19) przyjmie postać równania (35) wyprowadzonego w pracy [5].

3. Równanie ciągłości

Niezależnie od równania równowagi przepływu w kierunku q (19) powinno być również spełnione równanie ciągłości. Natężenie przepływającego czynnika przez powierzchnię stożkową o tworzącej q powinno być równe natężeniu założonemu w danych początkowych.

Stosownie do rysunku 1 równanie ciągłości ma postać

$$\dot{m} = Z \cdot \int_0^q \varrho \cdot w \cdot \cos\beta \cos(\delta-\gamma)\left(\frac{2\pi r}{z} - t_\vartheta\right) dq , \tag{21}$$

gdzie t_ϑ stanowi grubość profilu łopatki mierzoną w kierunku obwodowym.

4. Metoda rozwiązania

W pierwszej kolejności wyznacza się numerycznie wielkości δ, β, r_k, ε, $\frac{d}{dm}\sin\beta$, $\frac{d}{dm}\cos\beta$ i $\frac{dw}{dm}$ występujące w równaniu (19). W tym celu należy wstępnie wykreślić quasiortogonalne w przekroju merydionalnym wirnika, wzdłuż których wyznaczone będą następnie radienty prędkości po przybliżonym określeniu rozkładu linii prądu. Początkowy rozkład linii prądu wyznaczamy dzieląc quasiortogonalne na równą liczbę odcinków. Stosownie do doświadczeń uzyskanych w pracy [5] krzywiznę linii prądu należy wyznaczyć stosując metodę najmniejszych kwadratów. Do wyznaczenia pierwszych pochodnych rekomenduje się sprawdzoną metodę [5] "cubic spline fit" [4]. Następnym krokiem jest numeryczne całkowanie równania (19), które ma postać ogólną

$$\frac{dw}{dq} = f(w,q) . \tag{22}$$

Funkcja f jest znana jedynie dla skończonej liczby wartości q. Przyjmując wartości prędkości względnej przy piaście, rozkład prędkości wzdłuż linii quasiortogonalnych wyznaczamy w przybliżeniu z zależności

$$w_{i(k+1)} = w_{ik} + \left(\frac{dw}{dq}\right)_{ik} \Delta q_{ik} , \qquad (23)$$

gdzie wskaźnik i oznacza numer quasiortogonalnej, k numer linii prądu, a Δq_{ik} odległości między sąsiednimi liniami prądu, mierzone wzdłuż osi q. Obliczenia przeprowadza się przybliżoną metodą Rungego Kutty [1] dostosowaną do przyjętego modelu przepływu w pracy [5].

5. Quasitrójwymiarowe przybliżenie przepływu

Rozkład linii prądu wyznaczony w wyniku obliczeń osiowosymetrycznego przybliżenia przepływu determinuje obrotowe powierzchnie prądu, na których przeprowadza się z kolei analizę przepływu w kanałach międzyłopatkowych zgodnie z metodą podaną w pracy [6]. Wyniki obliczeń pierwszego przybliżenia dwuwymiarowego przepływu stanowią zarazem dane dla obliczeń drugiego przybliżenia przepływu z pominięciem jakichkolwiek prac wykreślnych pomiędzy kolejnymi przybliżeniami.

W efekcie po jednorazowym wprowadzeniu danych wejściowych do maszyny cyfrowej określających geometrię wieńca wirnikowego, parametry termodynamiczne czynnika w przekroju wlotowym oraz natężenie przepływu, można uzyskać rozkłady prędkości i ciśnień w kanałach międzyłopatkowych i wzdłuż powierzchni łopatek z dowolną, założoną dokładnością.

Uzyskane wyniki mogą w dalszym ciągu być wykorzystane do obliczeń następnego przybliżenia przepływu w przekroju merydionalnym, a te z kolei do ponownych obliczeń rozkładu prędkości i ciśnień w kierunku obwodowym. Powtarzając kolejno cały cykl obliczeń można uzyskać pełną zgodność wyników obliczeń pierwszego i drugiego przybliżenia dwuwymiarowego przepływu.

6. Wnioski

Zastąpienie linii ortogonalnych w przekroju merydionalnym wirnika przez tzw. linie quasiortogonalne umożliwia zintegrowanie programu obliczeń osiowosymetrycznego przybliżenia przepływu i rozkładu prędkości i ciśnień w kanałach międzyłopatkowych. Przez wyeliminowanie żmudnych, bo wymagających dużej precyzji, prac wykreślnych między kolejnymi przybliżeniami uzyskuje się możliwość wielokrotnego skrócenia czasu obliczeń przy równoczesnym wielokrotnym zwiększeniu ich dokładności. Pełne zautomatyzowanie obliczeń przepływu płynu idealnego umożliwi w dalszej kolejności uwzględnienie w obliczeniach wpływu lepkości czynnika i występowania warstwy przyściennej. Należy jednakże zaznaczyć, że przedstawiony program obliczeń wymagać będzie zastosowania maszyny cyfrowej o większej pamięci

i szybkości działania niż stosowana dotychczas maszyna cyfrowa Odra 1204 [5], [6].

WYKAZ OZNACZEŃ

c [m/s] – prędkość przepływu w układzie bezwzględnym
F [N/m^3] – siła łopatkowa wywierana na jednostkę masy czynnika
h_c [J/kg] – entalpia spoczynkowa
i [J/kg] – entalpia statyczna czynnika
m [m] – odległość mierzona wzdłuż linii prądu począwszy od krawędzi wlotowej łopatki w przekroju merydionalnym wirnika
$\dot{m}$ [kg/s] – strumień masy
m [m] – odległość mierzona wzdłuż ortogonalnej w przekroju merydionalnym wirnika
p [N/m^2] – ciśnienie statyczne
q [m] – odległość mierzona wzdłuż ortogonalnej
r [m] – promień mierzony od osi obrotu, współrzędna
r_k [m] – promień krzywizny linii prądu
R [$\frac{J}{kg,grd}$] – stała gazowa
T [^oK] – temperatura bezwzględna
t – czas
t [m] – podziałka łopatek
t_ϑ [m] – grubość profilu łopatkowego w kierunku obwodowym
W [m/s] – prędkość przepływu czynnika w układzie względnym
Z – liczba łopatek wirnika
β [^{o},rad] – kąt między kierunkiem prędkości względnej, a rzutem osi maszyny w płaszczyźnie stycznej do powierzchni prądu
γ [^{o}] – kąt zawarty między linią quasiortogonalną a kierunkiem promieniowym
ε [rad] – kąt odchylenia powierzchni łopatki od kierunku promieniowego w płaszczyźnie prostopadłej do osi
ϑ [rad] – współrzędna kątowa
$\varkappa$ – wykładnik adiabaty, stopień reakcyjności kanału łopatkowego
$\lambda = r.c_\vartheta$ – zawirowanie strugi
ϱ [kg/m^3] – gęstość czynnika
Δ – różnica skończona
τ – stopień przewężenia przekroju przepływowego kanału międzyłopatkowego wirnika
φ – wskaźnik wydajności

ψ – wskaźnik spiętrzenia

ω [1/s] – prędkość kątowa

Wskaźniki

o – parametry całkowite lub spoczynkowe

i – numer quasiortogonalnej (ortogonalnej)

j – kolejny numer iteracji

k – numer linii prądu

m – składowa merydionalna w kierunku osi m

n – składowa w kierunku osi n

r – składowa promieniowa

z – składowa osiowa

ϑ – składowa obwodowa

1 – parametry w płaszczyźnie krawędzi wlotowej wirnika

2 – parametry w płaszczyźnie krawędzi wylotowej wirnika lub odniesione do średnicy zewnętrznej

LITERATURA

1. DEMIDOWICZ B.P., MARON I.A., SZUWAŁOWA E.I.: Metody numeryczne cz. II PWN, Warszawa 1965.

2. HAWTHORNE W.R.: Aerodynamic of Turbines and Compressors.Princeton University Press, 1964.

3. KATSANIS T.: Use of Arbitraty Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution in a Turbomachine. Technical Preprint prepared for Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers. Chicago Illinois November, 1965, NASA

4. WALSH I.L., AHLBERG J.H., NILSON E.N.: Best Approximation Properties of the Spline Fit. Jour. Math. and Mech. vol. 11. no 2 Mar. 1962, s. 225-234.

5. WITKOWSKI A.: Osiowosymetryczne pole prędkości i ciśnień w osiowym wieńcu sprężającym z merydionalnym przyspieszeniem strumienia. Zeszyty Naukowe Pol. Sl. Energetyka, zeszyt 31, Gliwice 1969.

6. WITKOWSKI A.: Rozkład prędkości i ciśnień w kanałach międzyłopatkowych osiowego wieńca sprężającego z merydionalnym przyspieszeniem strumienia. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Energetyka, zeszyt 45, Gliwice, 1972.

ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕЧЕНИЯ В КОМПРЕССОРНЫХ КОЛЕСАХ С ПРОСТРАНСТВЕННО ОФОРМЛЕННЫМИ МЕЖДУЛОПАТОЧНЫМИ КАНАЛАМИ

Р е з ю м е

В статье описано дальнейшее развитие метода расчёта квазитрёхразмерного невязкого течения в пространственных межлопаточных каналах компрессорных колес, который был опубликован автором раньше [5]. С целью получения большей точности и скорости расчётов на ЭЦВМ применена в меридиональной плоскости колеса так называемая квазиортогональная система координат [3]. Даёт это возможность элиминации дополнительных чертёжных работ между последовательными приближениями и интеграции первого и второго двухмерного решения.

USE OF QUASI-ORTOGONALS FOR CALCULATING FLOW THROUGH SPATIAL SHAPED BLADE-TO-BLADE PASSAGES OF COMPRESSOR IMPELLERS

S u m m a r y

This paper deals with further improvement [5] of a method of analysing quasi threedimensional nonviscous flow through spatial shaped blade-to--blade passages of the compressor impellers.

In order to obtain higher exactness and speed of computations the streamline coordynate system was replaced by quasi orthogonal coordinate system. By using this technique, it was possible to work out a computer programme that would calculate a streamline solution in the meridional plane without any intermediate graphical procedures.The meridional streamline analysis and the blade-to-blade analysis are mutually interrelated, and the two kinds of calculations could be successively repeated until the solution converges.