

✓
Jan SKŁADZIEM

Instytut Techniki Ciepłej

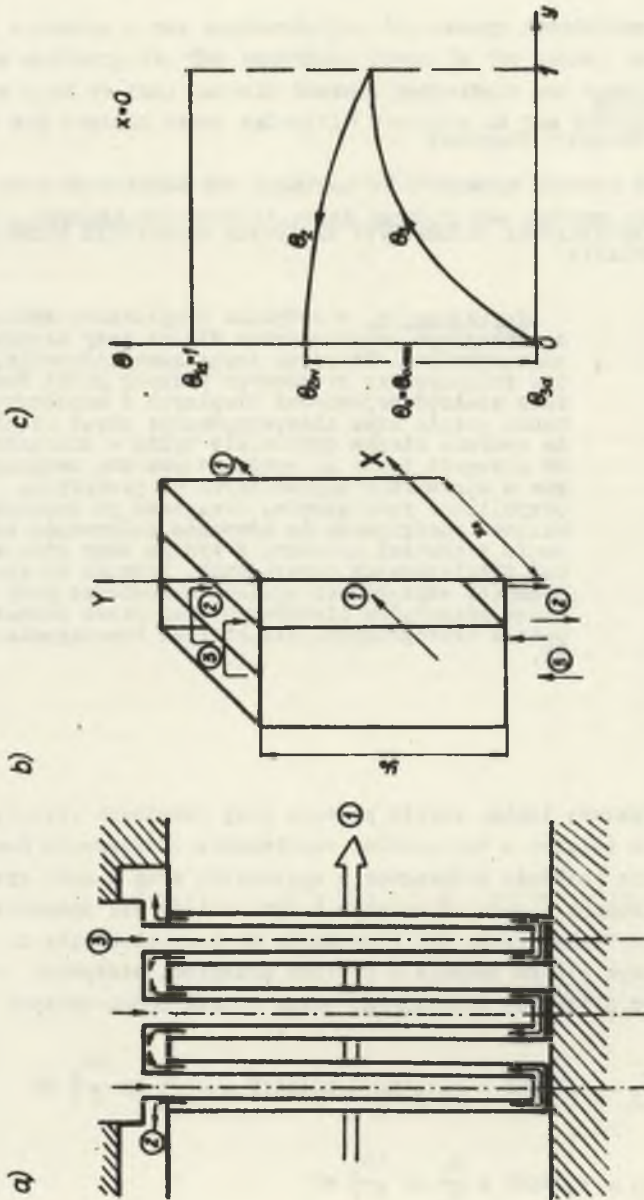
ANALIZA REKUPERATORA FIELDA PRZY KRZYŻOWYM PRZEPLYWIE CZYNNIKÓW
BEZ WYMIESZANIA

Streszczenie. W artykule rozpatrzono wymianę ciepła w konwekcyjnym rekuperatorze Fielda przy krzyżowym przepływie czynników. Przyjęto takie same założenia, jak w analizie rekuperatora krzyżowego podanej przez Nusselta. Założono stałość pojemności cieplnych i współczynników przenikania ciepła oraz niewystępowanie strat ciepła. Przyjęto, że wymiana ciepła odbywa się tylko w kierunku prostopadłym do przegród i nie ma wyrównywania się temperatury czynników w kierunkach poprzecznych do przepływu. W oparciu o przybliżone rozwiązanie, otrzymane po doprowadzeniu równań bilansu energijnego do równania całkowego, założono rozwiązanie w postaci szeregu. W wyniku tego otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych, łatwych do rozwiązania. Poprawność otrzymanych wyników sprawdzono przy pomocy prostych przykładów liczbowych oraz przez rozpatrzenie przypadków szczególnych, dla których rozwiązania są dobrze znane.

1. Wstęp

Rekuperatory Fielda często pracują przy krzyżowym przepływie czynników. Powstaje w związku z tym problem uogólnienia rozwiązania Nusselta [2] dla znalezienia rozkładu temperatur w wymienniku oraz w celu wyznaczenia ilości przekazanego ciepła. W związku z tym zakłada się uproszczony model rekuperatora Fielda (rys. 1). Przyjmując brak strat ciepła do otoczenia oraz przepływ ciepła jedynie w poprzek przegród, otrzymuje się dla stanu ustalonego z bilansu energijnego układ równań różniczkowych [4]:

$$\left. \begin{aligned} k_{1-2}(t_1 - t_2)dXdY - k_{2-3}(t_2 - t_3)dXdY &= -\frac{W_2}{x_0} dX \frac{\partial t_2}{\partial Y} dY \\ k_{2-3}(t_2 - t_3)dXdY &= \frac{W_2}{x_0} dX \frac{\partial t_3}{\partial Y} dY \\ k_{1-2}(t_1 - t_2)dXdY &= -\frac{W_1}{y_0} dY \frac{\partial t_1}{\partial X} dX \end{aligned} \right\} (1)$$



Rys. 1. Wymiennik Fielda z krzyżowym przepływem czynników
 a) schemat wymiennika, b) model teoretyczny, c) rozkład temperatur dla $x = 0$

gdzie

- k_{i-j} -- współczynnik przenikania ciepła od czynnika i-tego do j-tego,
- t_i -- temperatura i-tego czynnika,
- W_i -- pojemność cieplna strumienia materii i-tego czynnika ($W_2=W_3$),
- x_0, y_0 -- wymiary powierzchni wymiany ciepła $A = x_0 \cdot y_0$,
- X, Y -- współrzędne bezwzględne.

Rozpatrywany będzie klasyczny przepływ krzyżowy, tzn. przyjmuje się, że czynniki robocze płyną równoległymi strugami, pomiędzy którymi nie ma wzajemnego oddziaływania, a więc tym samym nie ma wyrównywania temperatur w przekrojach poprzecznych do kierunku przepływu. Powierzchnie wymiany ciepła zostały sprowadzone do dwóch prostokątów o wymiarach $x_0 \cdot y_0$.

Gdy nie ma wymiany ciepła między czynnikiem 2 i 3 ($k_{2-3} = 0$), zagadnienie sprowadza się do przypadku dwuczynnikowego krzyżowoprądowego rekuperatora, dla którego rozwiązanie jest dobrze znane [2]. Układ równań (1) jest słuszny, gdy przepływ ciepła występuje jedynie na skutek konwekcji. W niektórych przypadkach założenie to może być niezgodne z rzeczywistością ze względu na wpływ promieniowania [1].

Przyjmując współrzędne bezwymiarowe $x = \frac{X}{x_0}$, $y = \frac{Y}{y_0}$ oraz zmienne bezwymiarowe:

$$\theta_i = \frac{t_i - t_{3d}}{t_{1d} - t_{3d}} \quad (2)$$

gdzie $t_{3d} = t_3|_{y=0}$, $t_{1d} = t_1|_{x=0}$

otrzyma się

$$\left. \begin{aligned} (x+1)\theta_2 - \frac{1}{(k_{2-3})} \cdot \frac{\partial \theta_2}{\partial y} &= x\theta_1 + \theta_3 & (a) \\ \theta_3 + \frac{1}{(k_{2-3})} \cdot \frac{\partial \theta_3}{\partial y} &= \theta_2 & (b) \\ \theta_1 + \frac{1}{(k_{1-2})} \cdot \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= \theta_2 & (c) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gdzie

$$x = \frac{k_{1-2}}{k_{2-3}}, \quad (k_{1-2}) = \frac{k_{1-2} x_0 y_0}{W_1}, \quad (k_{2-3}) = \frac{k_{2-3} x_0 y_0}{W_2} \quad (4)$$

Warunki brzegowe dla układu równań (3) przyjmą postać:

$$\theta_1 \Big|_{x=0} = 1; \quad \theta_3 \Big|_{y=0} = 0; \quad \theta_2 \Big|_{y=1} = \theta_3 \Big|_{y=1} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0 \quad (5)$$

W dalszych rozważaniach wielkości k_{1-2} oraz W_1 , a tym samym \mathcal{L} , (K_{1-2}) i (K_{2-3}) będą traktowane jako niezmiennie dla danego wymiennika.

2. Rozwiązanie I zagadnienia

Układ równań różniczkowych (3) można rozwiązać w ogólnym przypadku jedynie w sposób przybliżony. W tym celu należy przekształcić równania (b) i (c) na równoważne, przy wykorzystaniu warunków brzegowych (5):

$$\theta_3 = (K_{2-3})e^{-(K_{2-3})y} \cdot \int_0^y \theta_2(x, \bar{y}) e^{(K_{2-3})\bar{y}} d\bar{y} \quad (d)$$

$$\theta_1 = e^{-(K_{1-2})x} \left[1 + (K_{1-2}) \cdot \int_0^x \theta_2(\bar{x}, y) e^{(K_{1-2})\bar{x}} d\bar{x} \right], \quad (e)$$

gdzie \bar{x} i \bar{y} (oraz później $\bar{\bar{y}}$) są pomocniczymi zmiennymi. Podstawiając zależności (d) i (e) do równania (a) otrzyma się ostatecznie rozwiązanie w postaci równania całkowego:

$$\begin{aligned} \theta_2(x, y) = & (K_{2-3})e^{(K_{2-3})y} \left\{ e^{-(K_{2-3})y} \cdot \int_0^1 \theta_2 e^{(K_{2-3})\bar{y}} d\bar{y} + \right. \\ & + \int_0^1 \left[e^{-(K_{1-2})x} (1 + (K_{1-2}) \cdot \int_0^x \theta_2 e^{(K_{1-2})\bar{x}} d\bar{x}) + \right. \\ & \left. \left. + (K_{2-3})e^{-(K_{2-3})\bar{y}} \cdot \int_0^{\bar{y}} \theta_2 e^{(K_{2-3})\bar{\bar{y}}} d\bar{\bar{y}} \right] e^{-(K_{2-3})\bar{y}} d\bar{y} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

W równaniu tym występuje szukana funkcja θ_2 , której wyznaczenie jest równoznaczne z rozwiązaniem zagadnienia, gdyż znajomość funkcji θ_2 w punkcie $y=0$ umożliwia znalezienie całkowitej ilości ciepła oddanej przez czyn-

nik 1. Równanie (6) można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń. Przyjmując jako zerowe przybliżenie wartość:

$$\theta_2^0 = 0 \tag{7}$$

otrzyma się

$$\theta_2^1 = \frac{x}{x+1} \cdot e^{-(K_{1-2})x} \left[1 - e^{-(x+1)(K_{2-3})} e^{(x+1)(K_{2-3})y} \right] \tag{8}$$

Podstawiając następnie θ_2^1 do równania (6) dostanie się:

$$\theta_2^2 = \theta_2^1 + (K_{2-3}) \frac{x}{x+1} \cdot e^{-(K_{1-2})x} e^{(x+1)(K_{2-3})y} \cdot \left\{ \begin{aligned} &a_1 + \\ &+ a_2 e^{-(x+1)(K_{2-3})y} + a_3 e^{-(x+2)(K_{2-3})y} + a_4 y + \\ &+ x \left[a_5 + a_6 e^{-(x+1)(K_{2-3})y} + a_7 y \right] \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{(K_{2-3})} \left[\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x+2)} e^{-(x+1)(K_{2-3})} - \frac{x+1}{x+2} e^{-(x+2)(K_{2-3})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x+1}{(x+2)^2} e^{-(2x+3)(K_{2-3})} \right] - \frac{1}{x+2} e^{-(x+1)(K_{2-3})} \\ a_2 &= \frac{1}{(x+1)(K_{2-3})} \\ a_3 &= \frac{1}{(x+2)(K_{2-3})} \left[\frac{1}{x+2} e^{-(x+1)(K_{2-3})} - 1 \right] \\ a_4 &= \frac{1}{x+2} e^{-(x+1)(K_{2-3})} \\ a_5 &= -x (K_{1-2}) e^{-(x+1)(K_{2-3})} \left[1 + \frac{1}{(x+1)(K_{2-3})} \right] \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

$$a_6 = \frac{\kappa (K_{1-2})}{(\kappa+1)(K_{2-3})} \quad \left. \vphantom{a_6} \right\} \quad (10)$$

$$a_7 = \kappa (K_{1-2}) e^{-(\kappa+1)(K_{2-3})}$$

W podobny sposób można otrzymać

$$\theta_2^3 = \theta_2^2 + (K_{2-3})^2 \frac{\kappa}{\kappa+1} e^{-(K_{1-2})x} e^{(\kappa+1)(K_{2-3})y} \left\{ \begin{array}{l} b_1 + \\ + b_2 e^{-(\kappa+1)(K_{2-3})y} + b_3 e^{-(\kappa+2)(K_{2-3})y} + b_4 e^{-(\kappa+2)(K_{2-3})y} + \\ + b_5 y + b_6 y^2 + x \left[b_7 + b_8 e^{-(\kappa+1)(K_{2-3})y} + b_9 e^{-(\kappa+2)(K_{2-3})y} + \right. \\ \left. + b_{10} y + b_{11} y^2 \right] + \frac{1}{2} x^2 \left[b_{12} + b_{13} e^{-(\kappa+1)(K_{2-3})y} + b_{14} y + b_{15} y^2 \right] \end{array} \right\} \quad (11)$$

gdzie $b_1 \div b_{15}$ są funkcjami współczynników $a_1 \div a_7$ oraz stałych κ , (K_{1-2}) i (K_{2-3}) .

Równanie (6) można również rozwiązywać przy konkretnych wartościach parametrów, otrzymując bezpośrednio liczbowe wielkości współczynników. Ilość kroków niezbędnych do osiągnięcia określonej dokładności zależy, jak widać na załączonych w dalszej części przykładach, od wartości (K_{1-2}) i (K_{2-3}) , a więc od wyrażonej bezwymiarowo powierzchni wymiany ciepła.

Mając dane kolejne przybliżenia temperatury θ_2 można następnie określić temperaturę czynnika ogrzewanego na wypływie z wymiennika:

$$\theta_0 = \theta_2 \Big|_{y=0} (x) = \theta_{2w}(x), \quad (12)$$

a tym samym ilość ciepła oddaną przez czynnik grzejący. Jednocześnie mając temperaturę θ_0 obliczoną w kolejnym przybliżeniu można oszacować dokładność i popełniony błąd. Dla $x = 0$ bowiem θ_0 powinno posiadać taką samą wartość, jak w przypadku stałej temperatury czynnika grzejącego równej t_{1d} . Wielkość tę można wyznaczyć z układu równań (1) przy założeniu $W_1 \rightarrow \infty$ a więc $(K_{1-2}) \rightarrow 0$ i wynosi ona [1], [4]:

$$\theta_0 \Big|_{x=0} = \theta_{0_{\max}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1+4/\kappa} \cdot \operatorname{ctgh} \left[\kappa (K_{2-3}) \sqrt{1/4+1/\kappa} \right]} \quad (13)$$

Z zależności (8), (9) i (11) widać, że dla $y=0$ funkcja θ_0 ma następujący charakter

$$\theta_0 = e^{-(K_{1-2})x} (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots), \quad (14)$$

gdzie α , β , γ ... są dla danego wymiennika wartościami stałymi. Średnia temperatura czynnika ogrzewanego na wylocie z wymiennika wyniesie więc

$$\begin{aligned} \theta_{0\text{śr}} = \int_0^1 \theta_0 dx = & \alpha \frac{1-e^{-(K_{1-2})}}{(K_{1-2})} + \beta \frac{1-e^{-(K_{1-2})} [(K_{1-2})+1]}{(K_{1-2})^2} + \quad (15) \\ & + \gamma \frac{2-e^{-(K_{1-2})} [(K_{1-2})^2 + 2(K_{1-2}) + 2]}{(K_{1-2})^3} + \dots \end{aligned}$$

Mając $\theta_{0\text{śr}}$ łatwo już można obliczyć ilość przekazanego ciepła Q :

$$\dot{Q} = W_2 \cdot \theta_{0\text{śr}} \cdot (t_{1d} - t_{3d}). \quad (16)$$

3. Przykłady liczbowe

Dla zilustrowania przeprowadzonych rozważań wykonano obliczenia dla dwóch przypadków:

a) $\kappa = 1$; $(K_{1-2}) = (K_{2-3}) = 0,1$

b) $\kappa = 1$; $(K_{1-2}) = (K_{2-3}) = 1$

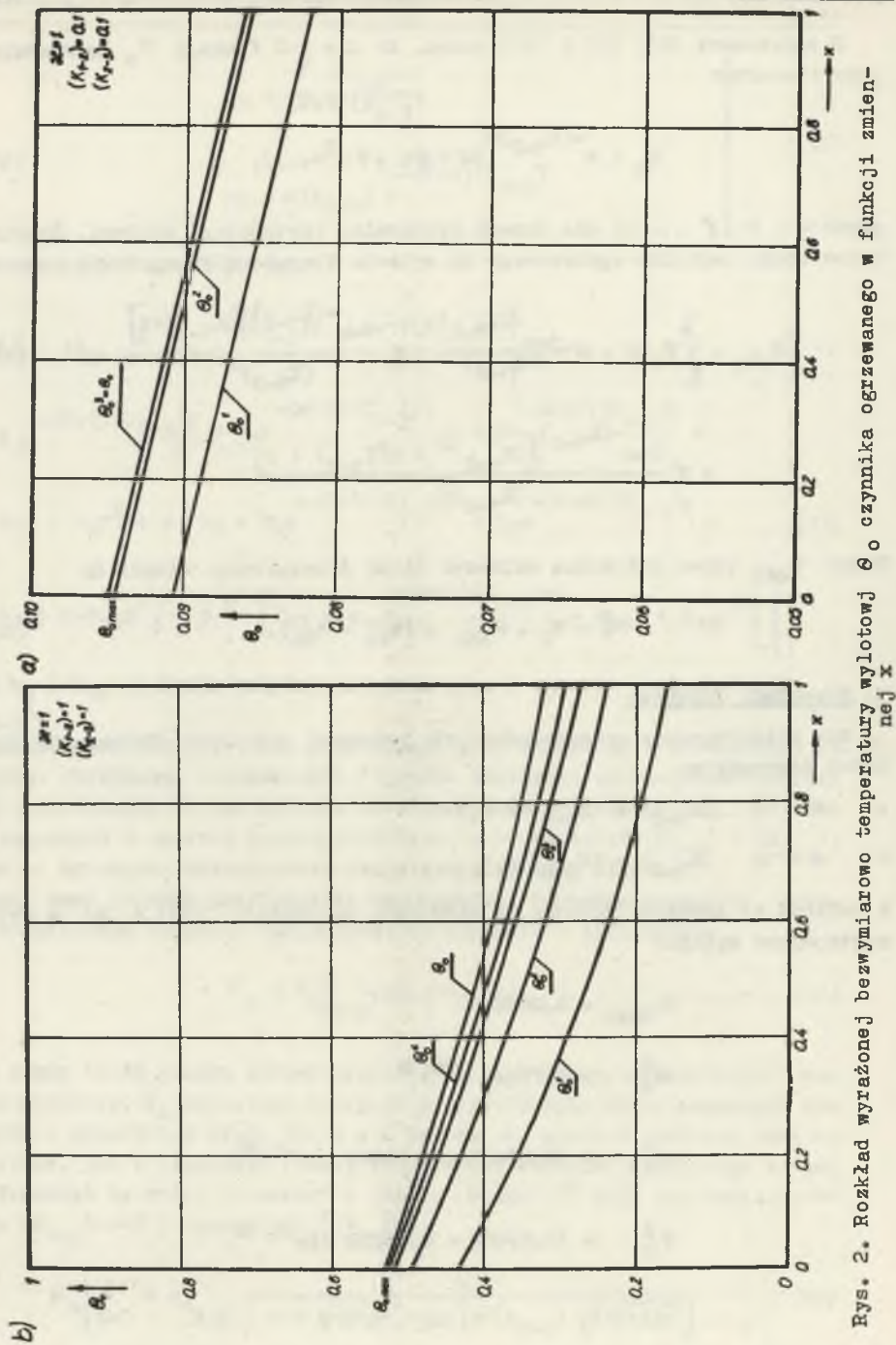
W zadaniu a) uzyskano kolejno na podstawie zależności (13) i (8) + (11) następujące wyniki:

$$\theta_{0\text{max}} = 0,09486$$

$$\theta_0^1 = 0,09064 e^{-0,1x}$$

$$\theta_0^2 = (0,09450 + 0,00042 x) e^{-0,1x}$$

$$\theta_0^3 = (0,09486 + 0,00050 x) e^{-0,1x}.$$



Na podstawie tych zależności wykonano wykresy przedstawione na rys. 2a. Równocześnie na ich podstawie można oszacować błąd względny:

$$\delta_0^1 = \frac{\theta_{0\max} - \theta_0^1|_{x=0}}{\theta_{0\max}}, \quad (17)$$

który wyniesie kolejno:

$$\delta_0^1 = 4,45\%; \quad \delta_0^2 = 0,38\%; \quad \delta_0^3 = 0,00\%.$$

Jak stąd widać, trzecie przybliżenie jest już bardzo dokładne. Średnia wartość $\theta_{0\text{śr}}$ obliczona na podstawie zależności (15) dla poszczególnych przybliżeń wyniesie:

$$\theta_{0\text{śr}}^1 = 0,08625; \quad \theta_{0\text{śr}}^2 = 0,09012; \quad \theta_{0\text{śr}}^3 = 0,09050$$

Będzie więc z dużą dokładnością:

$$\theta_{0\text{śr}} = 0,09050.$$

Dla danych w przykładzie a) można zatem stosunkowo łatwo znaleźć dość dokładne rozwiązanie. Nieco trudniej będzie w przypadku większej powierzchni ogrzewalnej, a zatem większych wartości liczb kryterialnych (K_{1-2}) i (K_{2-3}). Potrzeba wówczas większej ilości kolejnych przybliżeń, aby otrzymać żądaną dokładność. Np. w przypadku b) (rys. 2b) otrzyma się

$$\theta_{0\max} = 0,5303$$

$$\theta_0^1 = 0,4323e^{-x}$$

$$\theta_0^2 = (0,4961 + 0,1485x)e^{-x}$$

$$\theta_0^3 = (0,5167 + 0,2069x + 0,0202x^2)e^{-x}$$

$$\theta_0^4 = (0,5231 + 0,2350x + 0,0354x^2 + 0,0015x^3)e^{-x},$$

zaś błąd δ_0^1 wyniesie kolejno:

$$\delta_0^1 = 18,5\%; \quad \delta_0^2 = 6,5\%; \quad \delta_0^3 = 2,6\%; \quad \delta_0^4 = 1,4\%.$$

Wielkość θ_0^4 obliczono podstawiając zależność (11) określającą θ_2^3 do równania (6) i wykonując działania bezpośrednio na konkretnych liczbach. Widać przy tym, że końcowe obliczenia mimo znacznej pracochłonności w niewielkim tylko stopniu poprawiają dokładność. Średni względny przyrost temperatury czynnika grzewczego wyniesie kolejno:

$$\theta_{0\text{sr}}^1 = 0,2733; \quad \theta_{0\text{sr}}^2 = 0,3527; \quad \theta_{0\text{sr}}^3 = 0,3845; \quad \theta_{0\text{sr}}^4 = 0,3985.$$

Ostateczną wartość $\theta_{0\text{sr}}$ trudno tu ustalić z dużą dokładnością, gdyż nawet 4 przybliżenie obarczone jest stosunkowo pokaznym błędem. W celu ułatwienia obliczeń i jednocześnie zwiększenia ich dokładności powstaje konieczność znalezienia rozwiązania inną metodą.

4. Rozwiązanie II problemu

W wyniku rozwiązania I przy pomocy równań całkowych otrzymuje się zależności postaci:

$$\theta_2^1 = e^{-(K_{1-2})x} [\alpha(y) + \beta(y)x + \gamma(y)x^2 + \dots]. \quad (14a)$$

W związku z tym uzasadnione będzie założenie rozwiązania θ_2 układu równań różniczkowych (3) w postaci

$$\theta_2 = e^{-(K_{1-2})x} (B_1 + B_2x + B_3x^2 + \dots) = e^{-(K_{1-2})x} \sum_{i=1}^{\infty} B_i(y)x^{i-1} \quad (18)$$

Otrzyma się wówczas z równania (c) tego układu po zastosowaniu warunku brzegowego $\theta_1|_{x=0} = 1$:

$$\theta_1 = e^{-(K_{1-2})x} (1 + A_2x + A_3x^2 + \dots) = e^{-(K_{1-2})x} \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} A_{i+1}(y)x^i \right] \quad (19)$$

gdzie

$$A_{i+1}(y) = \frac{(K_{1-2})^i}{i!} B_i(y) \quad (20)$$

Warunki brzegowe przyjmują postać

$$\bigwedge_{n \in N} C_n \Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{dC_n}{dy} \Big|_{y=1} = 0. \quad (24)$$

Rozwiązania układu równań (23) po uwzględnieniu warunków brzegowych (24) przyjmują postać:

$$C_1(y) = 1 + C_{1,1} e^{\mu_1 y} + C_{1,2} e^{\mu_2 y}$$

$$B_1(y) = 1 + B_{1,1} e^{\mu_1 y} + B_{1,2} e^{\mu_2 y}$$

gdzie

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \kappa (\kappa_{2-3}) \cdot (1 \mp \sqrt{1+4/\kappa}) \quad (25)$$

$$C_{1,1} = \frac{-\mu_2 e^{\mu_2}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}}; \quad C_{1,2} = \frac{\mu_1 e^{\mu_1}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}}$$

$$B_{1,1} = C_{1,1} \left[1 + \frac{\mu_1}{(\kappa_{2-3})} \right]; \quad B_{1,2} = C_{1,2} \left[1 + \frac{\mu_2}{(\kappa_{2-3})} \right]$$

$$C_2 = \frac{(\kappa_{1-2})}{1!} + C_{2,1} e^{\mu_1 y} + C_{2,2} e^{\mu_2 y} + C_{2,3} y e^{\mu_1 y} + C_{2,4} y e^{\mu_2 y}$$

$$B_2 = \frac{(\kappa_{1-2})}{1!} + B_{2,1} e^{\mu_1 y} + B_{2,2} e^{\mu_2 y} + B_{2,3} y e^{\mu_1 y} + B_{2,4} y e^{\mu_2 y}$$

gdzie

$$C_{2,3} = \frac{-\kappa (\kappa_{1-2}) (\kappa_{2-3})^2 B_{1,1}}{2\mu_1 - \kappa (\kappa_{2-3})}; \quad C_{2,4} = \frac{-\kappa (\kappa_{1-2}) (\kappa_{2-3})^2 B_{1,2}}{2\mu_2 - \kappa (\kappa_{2-3})}$$

$$C_{2,0} = C_{2,3} e^{\mu_1 (1+\mu_1)} + C_{2,4} e^{\mu_2 (1+\mu_2)} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_{2,1} &= \frac{-\frac{(K_{1-2})}{1!} \mu_2 e^{\mu_2} + C_{2,0}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}}; & C_{2,2} &= \frac{\frac{(K_{1-2})}{1!} \mu_1 e^{\mu_1} - C_{2,0}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}} \\
 B_{2,1} &= C_{2,1} \left[1 + \frac{\mu_1}{(K_{2-3})} \right] + \frac{C_{2,3}}{(K_{2-3})}; & B_{2,2} &= C_{2,2} \left[1 + \frac{\mu_2}{(K_{2-3})} \right] + \frac{C_{2,4}}{(K_{2-3})} \\
 B_{2,3} &= C_{2,3} \left[1 + \frac{\mu_1}{(K_{2-3})} \right]; & B_{2,4} &= C_{2,4} \left[1 + \frac{\mu_2}{(K_{2-3})} \right]
 \end{aligned} \right\} (26)$$

$$C_3 = \frac{(K_{1-2})^2}{2!} + C_{3,1} e^{\mu_1 y} + C_{3,2} e^{\mu_2 y} + C_{3,3} y e^{\mu_1 y} + C_{3,4} y e^{\mu_2 y} + C_{3,5} y^2 e^{\mu_1 y} + C_{3,6} y^2 e^{\mu_2 y}$$

$$B_3 = \frac{(K_{1-2})^2}{2!} + B_{3,1} e^{\mu_1 y} + B_{3,2} e^{\mu_2 y} + B_{3,3} y e^{\mu_1 y} + B_{3,4} y e^{\mu_2 y} + B_{3,5} y^2 e^{\mu_1 y} + B_{3,6} y^2 e^{\mu_2 y}$$

gdzie

$$C_{3,5} = \frac{-\mathcal{K}(K_{1-2})(K_{2-3})^2}{4} \cdot \frac{B_{2,3}}{2\mu_1 - \mathcal{K}(K_{2-3})}$$

$$C_{3,6} = \frac{-\mathcal{K}(K_{1-2})(K_{2-3})^2}{4} \cdot \frac{B_{2,4}}{2\mu_2 - \mathcal{K}(K_{2-3})}$$

$$C_{3,3} = \frac{-\mathcal{K}(K_{1-2})(K_{2-3})^2}{2} \cdot \left\{ \frac{B_{2,1}}{2\mu_1 - \mathcal{K}(K_{2-3})} - \frac{B_{2,3}}{[2\mu_1 - \mathcal{K}(K_{2-3})]^2} \right\}$$

$$C_{3,4} = \frac{-\mathcal{K}(K_{1-2})(K_{2-3})^2}{2} \cdot \left\{ \frac{B_{2,2}}{2\mu_2 - \mathcal{K}(K_{2-3})} - \frac{B_{2,4}}{[2\mu_2 - \mathcal{K}(K_{2-3})]^2} \right\}$$

$$C_{3,0} = C_{3,3} e^{\mu_1(1+\mu_1)} + C_{3,4} e^{\mu_2(1+\mu_2)} + C_{3,5} e^{\mu_1(2+\mu_1)} + C_{3,6} e^{\mu_2(2+\mu_2)}$$

$$\begin{aligned}
 C_{3,1} &= \frac{-\frac{(K_{1-2})^2}{2!} \mu_2 e^{\mu_2} + C_{3,0}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}}, & C_{3,2} &= \frac{\frac{(K_{1-2})^2}{2!} \mu_1 e^{\mu_1} - C_{3,0}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}} \\
 B_{3,1} &= C_{3,1} \left[1 + \frac{\mu_1}{(K_{2-3})} \right] + \frac{C_{3,3}}{(K_{2-3})}, & B_{3,2} &= C_{3,2} \left[1 + \frac{\mu_2}{(K_{2-3})} \right] + \frac{C_{3,4}}{(K_{2-3})} \\
 B_{3,3} &= C_{3,3} \left[1 + \frac{\mu_1}{(K_{2-3})} \right] + \frac{2C_{3,5}}{(K_{2-3})}, & B_{3,4} &= C_{3,4} \left[1 + \frac{\mu_2}{(K_{2-3})} \right] + \frac{2C_{3,6}}{(K_{2-3})} \\
 B_{3,5} &= C_{3,5} \left[1 + \frac{\mu_1}{(K_{2-3})} \right], & B_{3,6} &= C_{3,6} \left[1 + \frac{\mu_2}{(K_{2-3})} \right].
 \end{aligned} \tag{27}$$

Dalsze rozwiązania będą miały jeszcze bardziej złożony charakter. Ogólnie funkcje C_n i B_n dla $n = 2, 3, \dots$ będą miały następującą postać

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{(K_{1-2})^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\mu_1 y} \sum_{i=1}^n C_{n,2i-1} y^{i-1} + e^{\mu_2 y} \sum_{i=1}^n C_{n,2i} y^{i-1} \\
 B_n &= \frac{(K_{1-2})^{n-1}}{(n-1)!} + e^{\mu_1 y} \sum_{i=1}^n B_{n,2i-1} y^{i-1} + e^{\mu_2 y} \sum_{i=1}^n B_{n,2i} y^{i-1} \\
 \bigwedge_{i=2,3,\dots,n} C_{n,2i-1} &= \frac{-\mathcal{K}(K_{1-2})(K_{2-3})^2}{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(i+k-2)!}{(i-1)!} \cdot \frac{B_{n-1,2(i+k)-3}}{[2\mu_1 - \mathcal{K}(K_{2-3})]^{k+1}} \\
 \bigwedge_{i=2,3,\dots,n} C_{n,2i} &= \frac{-\mathcal{K}(K_{1-2})(K_{2-3})^2}{n-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(i+k-2)!}{(i-1)!} \cdot \frac{B_{n-1,2(i+k)-2}}{[2\mu_2 - \mathcal{K}(K_{2-3})]^{k+1}} \\
 C_{n,0} &= e^{\mu_1} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n,2i+1} (1+\mu_1) + e^{\mu_2} \sum_{i=1}^{n-1} C_{n,2i+2} (1+\mu_2)
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 C_{n,1} &= \frac{-(K_{1-2})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\mu_2 e^{\mu_2} + C_{n,0}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}}; & C_{n,2} &= \frac{(K_{1-2})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\mu_1 e^{\mu_1} - C_{n,0}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}} \\
 \bigwedge_{i=1,2,\dots,n-1} B_{n,2i-1} &= C_{n,2i-1} \left[1 + \frac{\mu_1}{(K_{2-3})} \right] + \frac{i C_{n,2i+1}}{(K_{2-3})} \\
 \bigwedge_{i=1,2,\dots,n-1} B_{n,2i} &= C_{n,2i} \left[1 + \frac{\mu_2}{(K_{2-3})} \right] + \frac{i C_{n,2i+2}}{(K_{2-3})} \\
 B_{n,2n-1} &= C_{n,2n-1} \left[1 + \frac{\mu_1}{(K_{2-3})} \right] & B_{n,2n} &= C_{n,2n} \left[1 + \frac{\mu_2}{(K_{2-3})} \right].
 \end{aligned} \tag{28}$$

Przy obliczeniach cyfrowych na ogół wartości B_n i C_n szybko zdużają do zera i nie ma konieczności obliczania dużej liczby tych funkcji. Znając wartości B_n można następnie obliczyć średnią temperaturę czynnika ogrzewanego na wypływie z wymiennika z zależności:

$$\begin{aligned}
 \theta_{0\text{sr}} &= \int_0^1 \theta_2 \Big|_{y=0} dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Big|_{y=0} x^{n-1} dx = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \Big|_{y=0} \int_0^1 x^{n-1} e^{-(K_{1-2})x} dx,
 \end{aligned} \tag{29}$$

gdzie wartość $B_n \Big|_{y=0}$ określona jest na podstawie (25) i (28) zależnością

$$\begin{aligned}
 B_1 \Big|_{y=0} &= \theta_{0\text{max}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1+4/\alpha} \cdot \text{ctgh}[\alpha(K_{2-3})\sqrt{1+4/\alpha}]} \\
 \bigwedge_{n=2,3,\dots} B_n \Big|_{y=0} &= \frac{(K_{1-2})^{n-1}}{(n-1)!} B_1 \Big|_{y=0} - \frac{\alpha \sqrt{1+4/\alpha} C_{n,0}}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}} + \frac{C_{n,3} + C_{n,4}}{(K_{2-3})}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Ze wzoru (29) widać, że dodatkowym czynnikiem wskazującym na coraz mniejsze znaczenie dalszych wyrazów B_n jest fakt, że całka w przedziale $0 < 1$ z funkcji $x^{n-1} e^{-(K_{1-2})^x}$ maleje ze wzrostem n . Mając $\theta_{0, \text{śr}}$ jest już rzeczą łatwą określić ilość przekazanego ciepła na podstawie wzoru (16).

5. Przykłady liczbowe

Dla takich samych danych jak uprzednio wykonano obliczenia cyfrowe dla zobrazowania na konkretnych przykładach wyprowadzonych wzorów. Dla przypadku

$$a) \quad x = 1; \quad (K_{1-2}) = (K_{2-3}) = 0,1$$

po wykonaniu odpowiednich działań uzyska się kolejno:

$$B_1 \Big|_{y=0} = 0,09486; \quad B_2 \Big|_{y=0} = 0,00050; \quad B_3 \Big|_{y=0} = 0,000001 \approx 0$$

$$\theta_0 = e^{-0,1x}(0,09486 + 0,00050x); \quad \theta_{0, \text{śr}} = 0,09050.$$

Wynik więc jest tu identyczny, jak poprzednio. Wartość $B_3 \Big|_{y=0}$ jest już bardzo mała i w związku z tym nie ma potrzeby obliczania dalszych funkcji B_n . W przykładzie:

$$b) \quad x = 1; \quad (K_{1-2}) = (K_{2-3}) = 1$$

po wykonaniu obliczeń otrzyma się:

$$B_1 \Big|_{y=0} = 0,5303; \quad B_2 \Big|_{y=0} = 0,2614; \quad B_3 \Big|_{y=0} = 0,0594; \quad B_4 \Big|_{y=0} = 0,0086;$$

$$B_5 \Big|_{y=0} = 0,0009$$

$$\theta_0 = e^{-x}(0,5303 + 0,2614x + 0,0594x^2 + 0,0086x^3 + 0,0009x^4)$$

$$\theta_{0, \text{śr}} = 0,4149.$$

Ze względu na większą wartość powierzchni ogrzewalnej wyrażonej bezwymiarowo za pomocą liczb kryterialnych, konieczne jest tu wyznaczenie większej ilości wyrazów $B_n \Big|_{y=0}$ niż poprzednio. Warto zwrócić przy tym uwagę na fakt, że w przypadku b) zgodnie z warunkami podanymi w [1] temperatura θ_2 osiąga maksimum przy $x=0$ dla $0 < y < 1$. Na skutek istnienia maksimum wewnątrz przedziału, powstanie pewne "wybrzuszenie" ku górze na wykresie

$\theta_2 \Big|_{y=0} = f(y)$. Taka sytuacja jest niekorzystna ze względów ekonomicznych, gdyż wymaga ona dużej powierzchni ogrzewalnej w stosunku do osiąganych efektów. Widać zatem, że pomimo założenia zbyt dużej powierzchni wymiennika, a zatem zbyt dużych liczb kryterialnych (K_{1-2}) i (K_{2-3}) stosunkowo łatwo można osiągnąć dość dużą dokładność w obliczeniach.

Ciekawy jest fakt, że obliczenia dokonane przy założeniu, iż temperatura czynnika 1 jest funkcją jedynie zmiennej x , a więc że następuje całkowite wymieszanie tego czynnika, dają bardzo zbliżone wyniki. Np. obliczenia dla tych samych danych, jak w przypadku a) i b), wykonane na podstawie zależności podanych w [4], dają w rezultacie:

a) $\theta_{o_{sr}} = 0,09049$; b) $\theta_{o_{sr}} = 0,4116$,

a więc różnice są rzędu ułamka %. Można to łatwo wyjaśnić rozpatrując przepływ ciepła w przekrojach x -idem dla x bliskich 1 (przy x bliskim 0 przepływ ciepła w obu przypadkach będzie taki sam). Wówczas przy braku wymieszania dla $y \approx 1$ wymiana ciepła będzie mniejsza niż w 2 krańcowym przypadku ze względu na niższą temperaturę θ_1 . Dla $y \approx 0$ natomiast temperatura θ_1 będzie większa niż przy zupełnym wymieszaniu i większa zatem będzie ilość przekazywanego ciepła. Ponieważ te dwa zjawiska wzajemnie się częściowo kompensują, zatem wyniki w obu przypadkach będą się niewiele różniły, przy czym nieco wyższą wartość temperatury $\theta_{o_{sr}}$ otrzymuje się przy założeniu, że czynnik 1 płynie adiabatycznymi strugami.

6. Przypadki szczególne. Kontrola wyprowadzonych zależności

Pewnym sprawdzianem poprawności wyprowadzonych wzorów określających przebieg zmian temperatury może być rozpatrzenie przypadków szczególnych, dla których wyniki osiągnięte innymi metodami są ogólnie znane. Często przy obliczeniach elementów Fielda przyjmuje się stałość temperatury czynnika ogrzewanego. Odpowiada to przypadkowi, gdy $w_1 \rightarrow \infty$, a zatem $(K_{1-2}) \rightarrow 0$. Z zależności (18) + (21), (25) i (28) otrzyma się wówczas

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= 1 \\ \theta_2 &= 1 - \frac{\mu_2 e^{\mu_1} \mu_2^y - \mu_1 e^{\mu_2} \mu_1^y}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}} \\ \theta_3 &= 1 - \frac{\mu_2 e^{\mu_2} \mu_1^y - \mu_1 e^{\mu_1} \mu_2^y}{\mu_2 e^{\mu_2} - \mu_1 e^{\mu_1}} \end{aligned} \right\} (31)$$

Są to zależności identyczne z podanymi w [1] i [4]. Drugi charakterystyczny przypadek ma miejsce, gdy $k_{2-3} \rightarrow 0$. Odpowiada to dwuczynnikowemu reku-
peratorowi z krzyżowym przepływem czynników. Poszczególne wielkości cha-
rakteryistyczne przyjmą wówczas wartości:

$$x \rightarrow \infty ; \quad (K_{2-3}) = 0 ; \quad \mu_1 = 0 ; \quad \mu_2 = \kappa(K_{2-3}) = \frac{k_{1-2}^A}{W_2} = (K_{2-1}) \quad (32)$$

Po podstawieniu tych wartości do zależności (25) ÷ (28) oraz (20) otrzyma się kolejno:

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = (K_{1-2}) B_1 ; \quad B_1 = 1 - e^{-(K_{2-1})(1-y)}$$

$$A_3 = \frac{(K_{1-2})}{2} B_2 ; \quad B_2 = \frac{(K_{1-2})}{1!} \left\{ 1 - e^{-(K_{2-1})(1-y)} \left[1 + (K_{2-1})(1-y) \right] \right\}$$

$$A_4 = \frac{(K_{1-2})}{3} B_3 = \frac{(K_{1-2})^2}{2!} \left\{ 1 - e^{-(K_{2-1})(1-y)} \left[1 + (K_{2-1})(1-y) + \frac{(K_{2-1})^2}{2!} (1-y)^2 \right] \right\} \quad (33)$$

$$A_5 = \frac{(K_{1-2})}{4} B_4 ; \quad B_4 = \frac{(K_{1-2})^3}{3!} \left\{ 1 - e^{-(K_{2-1})(1-y)} \left[1 + (K_{2-1})(1-y) + \frac{(K_{2-1})^2}{2!} (1-y)^2 + \frac{(K_{2-1})^3}{3!} (1-y)^3 \right] \right\}$$

.....
Po wprowadzeniu nowej współrzędnej:

$$y^* = 1 - y$$

funkcje A_n zostaną opisane identycznymi zależnościami, jak podane np. w [2].

LITERATURA

1. KOSTOWSKI E. - Rozkład temperatur w opromienionym elemencie Fielda, ZNPS, Energetyka z. 28, 1968.
2. MADEJSKI J. - Teoria wymiany ciepła, PWN, 1963.
3. OKOŁO-KUŁAK W. - Trójczynnikiowe wymienniki ciepła, ZNPS, Mechanika z. 1, 1954.
4. SKŁADZIEN J. - Rozkład temperatur w rekuperatorze Fielda przy krzyżowym przepływie czynników, ZNPS, Energetyka z. 39, 1971.

АНАЛИЗ РЕКУПЕРАТОРА ФИЛЬДА В СЛУЧАЕ КЛАССИЧЕСКОГО КРЕСТОВОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ

Резюме

В статье приведен теплообмен в конвекционном рекуператоре Фильда в случае крестового течения теплоносителей. Рассмотрено точно такой случай как в проблеме Нуссельта. Принято постоянные теплоемкости и коэффициенты теплообмена. Пренебрежены потери тепла. Принято, что теплообмен осуществляется только в перпендикулярном направлении к стенке и отсутствует выравнивание температуры теплоносителей в поперечных к течению направлениях. Исходя из приближенного решения получено после сведения уравнения энергетического баланса к интегральному уравнению решение в виде ряда. В результате этого получено систему обыкновенных дифференциальных несложных для решений уравнений. Правильность полученных результатов проверено прямыми числовыми примерами, а также путём рассмотрения особых случаев, для которых решения хорошо известны.

THE ANALYSIS OF FIELD RECUPERATOR WITH UNMIXED CROSSFLOW

Summary

There has been considered heat exchange in the convective crossflow Field recuperator. It was assumed that heat transfer coefficients and capacity rates are constant and that heat exchange takes place only in perpendicular direction to the wall. It was neglected heat losses. It was assumed also that there isn't equalization of mediums temperatures in perpendicular direction to the flow. There are the same assumptions as in Nusselt analysis. With the help of integral equations the approached solution is obtained which suggests to assume particular form of the solu-

tions. After that there were obtained differential equations easy to solve. As the conclusions the derived relations have been used for solving the simple problems.