ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1972

Seria: Energetyka z. 45 Nr kol. 359

Gerard KOSMAN
Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

NIEUSTALONE POLA TEMPERATUR W POWŁOCE O DOWOLNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM I PODŁUŻNYM

Streszczenie. Praca dotyczy zagadnień przybliżonego wyznaczania nieustalonych pól temperatur w złożonych elementach maszyn. Przedstawiono metodę analizy rozkładu temperatury w grubościennej powłoce o dowolnym przekroju poprzecznym i podłużnym. Rozwiązanie sformułowanego zagadnienia sprawdzono do odpowiedniego zagadnienia wariacyjnego, a to ostatnie rozwiązanie metodą Ritza. Omówiono wyniki obliczeń ustalonego pola temperatur w przekroju poprzecznym kadłuba turbiny parowej uzyskane rozpatrywaną metodą. W celu sprawdzenia otrzymanych zależności przeprowadzono obliczenia rozkładu temperatur w walcu a uzyskane wyniki porównano z rozwiązaniem dokładnych.

1. Wstęp

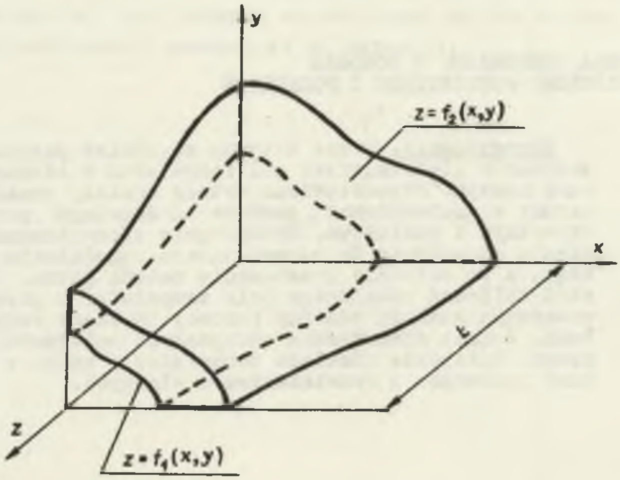
W trakcie badań teoretycznych nad zagadnieniem określenia optymalnych warunków rozruchu turbozespołów wyłonił się problem, który przy pewnych założeniach upraszczających sprowadzić można do określenia termosprężystego stanu naprężenia w grubościennej powłoce walcowej o dowolnym przekroju poprzecznym i podłużnym.

Rozpatrywana powłoka walcowa odwzorowuje w tym przypadku kadłub turbiny, którego przekrój poprzeczny jest zdeformowany obecnością kołnierzy. Ogólny charakter przedstawionego problemu - przyjęcie dowolnej powłoki grubościennej - powodowany jest różnorodnością form stosowanych rozwiązań konstrukcyjnych kadłubów turbin.

Celem niniejszej pracy jest ogólne rozwiązanie pierwszej części tego problemu - wyznaczenie nieustalonego pola temperatury w powłoce - oraz zastosowanie otrzymanych rezultatów do analizy warunków pracy kadłubów turbin cieplnych. W pracy rozpatrzono dwa przypadki warunków brzegowych. W przypadku pierwszym założono, że znany jest rozkład temperatury na brzegu powłoki, natomiast w przypadku drugim przyjęto, że wymiana ciepła między otaczającym ośrodkiem a powierzchnią powłoki określona jest prawem Newtona przy stałym współczynniku wnikania ciepła.

2. Sformułowanie problemu

Przedmiotem naszych rozważań będzie jednorodna, grubościenna powłoka o dowolnym przekroju poprzecznym i podłużnym, o której zakładamy tylko, że jest symetryczna względem płaszczyzn xz i yz (rys. 1). Pewne dalsze założenia dotyczące funkcji opisujących brzeg powłoki zostaną podane później. Oprócz symetrii kształtu powłoki przyjmiemy symetrię warunków brzegowych.



Rys. 1. Grubościenna powłoka o dowolnym przekroju poprzecznym i podłużnym

Rozkład temperatury $\vartheta(x,y,z,F_o)$ w powłoce określa równanie przewodzenia ciepła

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial F_o} = \nabla^2\vartheta. \tag{1}$$

Rozwiązanie równania (1) musi spełniać warunek początkowy

$$\vartheta(x,y,z,0) = \vartheta_0(x,y,z) \tag{2}$$

oraz jeden z następujących warunków brzegowych

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = Bi_i\left[\vartheta_{ci}(z,Fo) - \vartheta(x,y,z,Fo)\right]$$

$$\left[x,y,z\right] \in G_i \qquad (i = 1,2)$$

$$-\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=0} = Bi_2\left[\vartheta_{c2}(0,Fo) - \vartheta(x,y,0,Fo)\right] \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=L} = Bi_2\left[\vartheta_{c2}(L,Fo) - \vartheta(x,y,1,Fo)\right]$$

lub

$$\vartheta = \vartheta_i(x,y,z,Fo) \qquad [x,y,z] \in G_i \qquad (i = 1,2)$$

$$\vartheta = \vartheta_2(x,y,0,Fo) \tag{4}$$

$$\vartheta = \vartheta_2(x,y,1,Fo)$$

gdzie

G_1 – powierzchnia wewnętrzna powłoki,

G_2 – powierzchnia zewnętrzna powłoki,

Stosowana w powyższych równaniach bezwymiarowa temperatura ϑ zdefiniowana jest jako nadwyżka temperatury T ponad przyjętą temperaturę odniesienia T^* – do charakterystycznej różnicy temperatur ΔT.

3. Ogólne rozwiązanie zagadnienia

W celu rozwiązania opisanego wyżej zagadnienia brzegowego poddamy je najpierw przekształceniu Laplace'a.

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sFo} f(Fo)\, dFo, \tag{5}$$

dzięki czemu zmniejszy się liczba zmiennych niezależnych.
Równanie (1) przyjmuje po przekształceniach postać

$$L_T\bar{\vartheta} = -\nabla^2\bar{\vartheta} + s\bar{\vartheta} = \vartheta_0. \tag{6}$$

Po stransformowaniu warunków brzegowych otrzymujemy

$$Bi_i\bar{\vartheta} + \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial n} = Bi_i\,\bar{\vartheta}_{ci} \qquad [x,y,z] \in G_i \qquad (i = 1,2)$$

$$Bi_2\bar{\vartheta} \mp \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z} = Bi_2\,\bar{\vartheta}_{c2} \qquad \text{dla} \quad z=0 \text{ i } z=L \tag{7a}$$

lub

$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_i(x,y,z) \qquad [x,y,z] \in G_i \qquad (i = 1,2)$$
$$\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_2(x,y,z) \qquad \text{dla} \quad z=0 \quad \text{i} \quad z=L. \tag{7b}$$

Z uwagi na przyjętą symetrię warunków brzegowych powłoki względem płaszczyzn xz i yz w dalszych rozważaniach wystarczy rozpatrzeć tylko ćwiartkę powłoki.
W tym przypadku należy uzupełnić warunki brzegowe (7) warunkami symetrii pola temperatury

$$\left.\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{8}$$

Operator L_T w równaniu (6) jest operatorem dodatnim [5, 6]. Rozwiązanie tego równania można zatem sprowadzić co rozwiązania zagadnienia wariacyjnego na minimum funkcjonału

$$J\left[\bar{\vartheta}\right] = (L_T\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}) - 2(\bar{\vartheta}, \vartheta_0). \tag{9}$$

W zbiorze funkcji ciągłych w obszarze V + G wraz ze swoimi pochodnymi rzędu pierwszego i drugiego oraz spełniających warunki brzegowe (7) i (8).

Warunki brzegowe (7a) i (8) są pobocznymi warunkami brzegowymi badanego zagadnienia [5]. Dla tych warunków rozwiązanie równania (6) można zastąpić zagadnieniem na minimum funkcjonału (9) w pewnym szerszym zbiorze funkcji niekoniecznie spełniających poboczne warunki brzegowe.

Sumując powyższe, można ostatecznie sprowadzic rozwiązanie równania (6) z warunkami (7b) i (8) do zagadnienia minimum funkcjonału (9), który za pomocą elementarnych przekształceń można doprowadzić do postaci

$$J\left[\bar{\vartheta}\right] = \int_V \left[\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z}\right)^2 + s\bar{\vartheta}^2 - 2\vartheta_0\bar{\vartheta}\right]dv. \tag{10}$$

Dla tego funkcjonału warunek (8) jest poboczny i minimum należy szukać wśród funkcji spełniających tylko warunek (7b).

Zagadnienie brzegowe z warunkami (7a) i (8) sprowadza dię do zagadnienia minimum nieco innego funkcjonału

$$\begin{aligned} J\left[\bar{\vartheta}\right] = & \int_V \left[\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z}\right)^2 + s\bar{\vartheta}^2 - 2\vartheta_0\bar{\vartheta}\right]dv + \\ & + \int_{G_1} Bi_1\bar{\vartheta}(\bar{\vartheta}-2\bar{\vartheta}_{C1})dG + \int_{G_z} Bi_2\bar{\vartheta}(\bar{\vartheta}-2\bar{\vartheta}_{c2})dG \end{aligned} \tag{11}$$

w zbiorze funkcji niekoniecznie spełniających warunki brzegowe. W ostatniej zależności G_z oznacza sumę powierzchni zewnętrznej G_2 oraz powierzchni bocznych powłoki dla z=0 i z=l.

Do przybliżonego rozwiązania zagadnień wariacyjnych (10) i (11) zastosujemy metodę Ritza.

Wybierzmy układ funkcji liniowo niezależnych

$$\bar{V}_o(x,y,z,s), \quad V_1(x,y,z),\dots, \quad V_n(x,y,z),\dots \tag{12}$$

(zwanych funkcjami współrzędnymi) przedstawiających układ zupełny. W przypadku zagadnienia wariacyjnego (10) funkcja $\bar{V}_o$ musi spełniać niejednorodne warunki (7b), natomiast pozostałe funkcje V_i muszą spełniać jednorodne warunki (7b). Dla zagadnienia wariacyjnego (11) funkcje współrzędne nie muszą spełniać warunków brzegowych.

Rozwiązania zagadnienia wariacyjnego poszukiwać będziemy w formie kombinacji liniowej

$$\bar{\vartheta}_n = \bar{V}_o + \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i V_i. \tag{13}$$

Parametry $\bar{a}_i$ dobieramy tak, by funkcja (13) realizowała minimum funkcjonału $J\left[\bar{\vartheta}\right]$. Wstawiając (13) do funkcjonału $J\left[\bar{\vartheta}\right]$ otrzymujemy

$$J\left[\bar{\vartheta}\right] = \Phi(\bar{a}_1, \bar{a}_2,\dots \bar{a}_n),$$

gdzie Φ jest znaną funkcją parametrów $\bar{a}_i$. Wychodząc z warunku koniecznego na ekstremum funkcji n zmiennych dochodzimy do układu n równań

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{a}_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n). \tag{14}$$

Po przekształceniach układ ten można przedstawić w postaci

$$\left[B\right]\left[A\right] = \left[C\right]. \tag{15}$$

Elementy b_{ij} macierzy $\left[B\right]$ oraz c_j macierzy $\left[C\right]$ dla zagadnienia wariacyjnego (11) są określone następująco:

$$b_{ij} = b'_{ij} + s b''_{ij} = \int_V \left[\frac{\partial V_i}{\partial x}\frac{\partial V_j}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y}\frac{\partial V_j}{\partial y} + \frac{\partial V_i}{\partial z}\frac{\partial V_j}{\partial z}\right] dV + \\ + Bi_1 \int_{G_1} V_i V_j dG + Bi_2 \int_{G_z} V_i V_j dG + s \int_V V_i V_j dV \tag{16}$$

$$c_j = \int_V \left[\vartheta_o V_j - s\bar{V}_o V_j - \frac{\partial \bar{V}_o}{\partial x}\frac{\partial V_j}{\partial x} - \frac{\partial \bar{V}_o}{\partial y}\frac{\partial V_j}{\partial y} - \frac{\partial \bar{V}_o}{\partial z}\frac{\partial V_j}{\partial z}\right] dV +$$

$$+ Bi_1 \int_{G_1} V_j(\bar{\vartheta}_{c1} - \bar{V}_o)dG + Bi_2 \int_{G_z} V_j(\bar{\vartheta}_{c2} - \bar{V}_o)dG. \tag{17}$$

Dla zagadnienia wariacyjnego (10) należy w zależnościach (16) i (17) pominąć całki powierzchniowe.

Rozwiązanie równania (15) ma postać

$$\bar{a}_i(s) = \frac{1}{|B|}\sum_{j=1}^{n} c_j\, B_{ij}, \tag{18}$$

gdzie B_{ij} – dopełnienie algebraiczne elementu b_{ij} macierzy $[B]$.

Wstawiając zależność (18) do (13) i wykonując w tak otrzymanym równaniu odwrotne przekształcenie Laplace'a uzyskujemy wyrażenie określające nieustalone pole temperatury w kadłubie

$$\vartheta_n(x,y,z,Fo) = V_o(x,y,z,Fo) + \sum_{i=1}^{n} A_i(Fo)V_i(x,y,z), \tag{19}$$

gdzie

$$A_i(Fo) = \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{a}_i(s)\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left[c_j \frac{B_{ij}}{|B|}\right]. \tag{20}$$

W oparciu o wzór (16) określający elementy b_{ij} widać, że wyrażenie $B_{ij}/|B|$ jest funkcją wymierną właściwą ze względu na zmienną s. Stąd otrzymujemy

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B_{ij}}{|\ |}\right] = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B_{ij}}{\frac{d|B|}{ds}} e^{sFo}\Big|_{s=s_\nu},$$

gdzie s_ν są pojedynczymi miejscami zerowymi wyznacznika $|B|$. Występujące po prawej stronie wzoru (20) wyrażenie $sB_{ij}/|B|$ najwygodniej jest przedstawić w formie sumy stałej b^*_{ij} oraz pewnej funkcji wymiernej właściwej $B^*_{ij}/|B|$

$$\frac{sB_{ij}}{|B|} = b^*_{ij} + \frac{B^*_{ij}}{|B|}.$$

Po przekształceniach można funkcje $A_i(Fo)$ przedstawić w postaci

$$A_i(Fo) = \sum_{j=1}^{n}\left[-b^{*}_{ij}\, C'''_j(Fo) + \sum_{\vartheta=1}^{n}\left(\frac{d|B|}{ds}\right)^{-1}\Bigg|_{s=s_\vartheta}\left\{C'_j B_{ij}(s_\vartheta)e^{s_\vartheta Fo} + \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_0^{Fo}\left[B_{ij}(s_\vartheta)C''_j(\tau) + B^{*}_{ij}(s_\vartheta)C'''_j(Fo)\right]e^{s_\vartheta(Fo-\tau)}d\tau\right\}\right] \tag{21}$$

gdzie

$$C'_j = \int_V \vartheta_o V_o \, dv$$

$$C''_j(Fo) = \int_V\left[\frac{\partial V_o}{\partial x}\frac{\partial V_j}{\partial x} + \frac{\partial V_o}{\partial y}\frac{\partial V_j}{\partial y} + \frac{\partial V_o}{\partial z}\frac{\partial V_j}{\partial z}\right]dv +$$
$$- Bi_1\int_{G_1} V_j(\vartheta_{c1}-V_o)dG - Bi_2\int_{G_2} V_j(\vartheta_{c2}-V_o)dG \tag{22}$$

$$C'''_j(Fo) = \int_V V_o V_j \, dV.$$

Dla zagadnienia brzegowego pierwszego rodzaju (dla znanej temperatury na brzegu) należy w wyrażeniu określającym funkcję $C''_j(Fo)$ pominąć całki powierzchniowe.

3.1. Ustalony rozkład temperatury w powłoce

Zagadnienie ustalonego przewodzenia ciepła sprowadza się do poszukiwania rozkładu temperatury w postaci funkcji $\vartheta(x,y,z)$ spełniającej równanie

$$\nabla^2\vartheta = 0 \tag{23}$$

oraz jeden z warunków brzegowych (3) lub (4) przy jednoczesnym uwzględnieniu warunków symetrii pola temperatury (8).

Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia brzegowego można sprowadzić do rozwiązania odpowiedniego zagadnienia wariacyjnego, a to ostatnie rozwiązać podobnie jak dla stanu nieustalonego. Wygodniej jest jednak wykorzystać warunek, że dla $Fo \to \infty$ podane poprzednio formuły powinny opisywać stan ustalony. Zgodnie z teorią przekształceń Laplace'a, jeżeli istnieje granica oryginału, gdy $Fo \to \infty$, to

$$\lim_{Fo \to \infty} f(Fo) = \lim_{s \to 0} s\,\bar{f}(s).$$

Stosując podany związek graniczny do zależności (13) otrzymujemy wyrażenie określające ustalony rozkład temperatury w kadłubie

$$\vartheta_n(x,y,z) = V_o(x,y,z) + \sum_{i=1}^{n} a_i\, V_i(x,y,z), \tag{24}$$

gdzie

$$a_i = \lim_{s \to 0} s.\bar{a}_i(s).$$

W przypadku analizy pola temperatur dla znanej wartości temperatury na brzegu kadłuba funkcja V_o musi spełniać niejednorodne warunki (4), natomiast pozostałe funkcje V_i muszą spełniać jednorodne warunki (4). Dla zagadnienia brzegowego z warunkami (3) i (8) funkcje współrzędne nie muszą spełniać warunków brzegowych.

Uwzględniając (18) otrzymujemy

$$a_i = \frac{1}{|B'|} \sum_{j=1}^{n} c_j'' \, B_{ij}'$$

tzn. stałe a_i są rozwiązaniem układu n równań o postaci

$$\left[B'\right]\left[A\right] = \left[C''\right]. \tag{25}$$

Współczynniki b_{ij}' macierzy $\left[B'\right]$ określa formuła (16). Natomiast współczynniki c_j'' należy obliczyć z zależności (22). Ponieważ dla stanu ustalonego V_o, ϑ_{c1}, ϑ_{c2} nie są funkcjami czasu, współczynniki c_j'' będą stałe.

4. Wyznaczenie pola temperatur w przekroju poprzecznym kadłuba

Omówione w poprzednim punkcie ogólne zależności określające dowolny, trójwymiarowy rozkład temperatury w kadłubie wykorzystamy obecnie do rozpatrzenia jednego z przypadków szczególnych - analizy pola temperatur w przekroju poprzecznym kadłuba.

4.1. Założenia szczegółowe

Rozpatrzmy wycinek kadłuba o jednostkowej długości, powstały przez wycięcie z kadłuba powierzchniami prostopadłymi do osi z oddalonymi o 1 jednostkę. Powierzchniami bocznymi ograniczającymi wycinek są powierzchnie walcowe, których kierownicami są granice przekroju poprzecznego kadłuba, a tworzące równoległe do osi z.

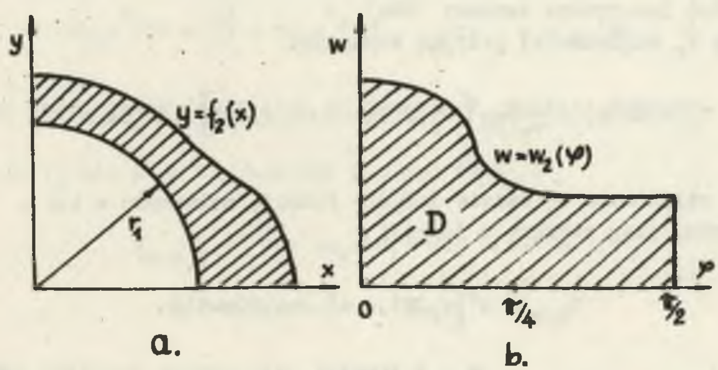
Zakładamy, że w przekroju podłużnym rozpatrywanego wycinka izotermy są równoległe do osi z, tzn. gradient temperatury w kierunku osiowym jest równy zeru:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0. \tag{26}$$

Rozpatrywany problem został zatem w tym przypadku sprowadzony do zagadnienia przestrzenie dwuwymiarowego.

Jako charakterystyczny rozmiar liniowy przyjęto wewnętrzny promień kadłuba r_1. Uwzględniając kształt przekroju poprzecznego kadłuba (rys. 2) wygodnie jest wprowadzić do rozważań współrzędne biegunowe ϱ, φ, gdzie $\varrho = r/r_1$. Wprowadzając dodatkowo w miejsce zmiennej ϱ zmienną w, określoną przez związek

$$w = \ln \varrho , \tag{27}$$



Rys. 2. Przekrój poprzeczny kadłuba turbiny

można analizowany przekrój kadłuba sprowadzić do obszaru D przedstawionego na rys. 2.

Dla podanych założeń szczegółowych warunki brzegowe omówione w punkcie 2 przyjmują postać

$$\vartheta = \vartheta_1 \quad \text{dla} \quad w = 0$$
$$\vartheta = \vartheta_2 \quad \text{dla} \quad w = w_2(\varphi) \tag{28a}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi = 0 \quad \text{i} \quad \varphi = \pi/2 . \tag{28b}$$

lub

$$\mathrm{Bi}_1 \vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \mathrm{Bi}_1 \vartheta_{c1} \quad \text{dla} \quad w = 0$$

$$\mathrm{Bi}_2 \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \mathrm{Bi}_2 \vartheta_{c2} \quad \text{dla} \quad w = w_2(\varphi)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi = 0 \quad \text{i} \quad \varphi = \pi/2. \tag{29b}$$

4.2. Wybór funkcji współrzędnych

W przypadku zagadnienia brzegowego z warunkami (28) funkcja V_0 musi spełniać niejednorodne warunki (28a), natomiast pozostałe funkcje V_i muszą spełniać jednorodne warunki (28a).

Funkcję V_0 najprościej przyjąć w postaci

$$V_0(w,\varphi,\mathrm{Fo}) = \frac{w}{w_2(\varphi)}\left[\vartheta_2(\varphi,\mathrm{Fo}) - \vartheta_1(\varphi,\mathrm{Fo})\right] + \vartheta_1(\varphi,\mathrm{Fo}). \tag{30}$$

Dla stanu ustalonego V_0 będzie jedynie funkcją zmiennych w i φ .

Rozpatrzmy ciąg złożony z funkcji

$$V_{k,m} = w^k\left[w_2(\varphi) - w\right] \cos 2(m-1)\varphi \tag{31}$$

$$(k,m = 1,2,3,\dots).$$

Funkcje te spełniają jednorodne warunki (28a). Jeżeli dodatkowo zachodzą związki

$$\left.\frac{dw_2}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = 0 \quad \left.\frac{dw_2}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pi/2} = 0, \tag{a}$$

to funkcje $V_{k,m}$ spełniają warunki (28b). Należy dodać, że ostatnie związki są prawie zawsze spełnione.

Funkcje V_i dla $i \geqslant 1$ wybieramy z ciągu funkcji $V_{k,m}$ przyjmując tylko te wyrazy, dla których k=m. Otrzymujemy stąd

$$V_i(w,\varphi) = w^i\left[w_2(\varphi) - w\right]\cos 2(i-1)\varphi. \quad (i \geqslant 1) \tag{32}$$

W przypadku zagadnienia brzegowego z warunkami (29) funkcje współrzędne nie muszą spełniać warunków brzegowych. Należy jednak zauważyć, że wtedy zbieżność metody Ritza jest powolniejsza. Trzeba więc według możliwości obierać funkcje współrzędne spełniające również poboczne warunki brzegowe.

Funkcję V_0 przyjmujemy w postaci

$$V_0(w,\varphi,Fo) = \frac{Bi_2 e^{w_2}(Bi_1 w+1)}{Bi_1+Bi_2 e^{w_2}+Bi_1 Bi_2 e^{w_2} w_2}\left[\vartheta_{c2}(Fo) - \vartheta_{c1}(Fo)\right] + \vartheta_{c1}(Fo). \tag{33}$$

Funkcja ta spełnia następujące warunki

$$\begin{aligned} Bi_1\vartheta - \frac{\partial\vartheta}{\partial w} &= Bi_1\vartheta_{c1} \qquad \text{dla} \quad w = 0 \\ Bi_2 e^{w_2}\vartheta + \frac{\partial\vartheta}{\partial w} &= Bi_2 e^{w_2}\vartheta_{c2} \qquad \text{dla} \quad w = w_2(\varphi). \end{aligned} \tag{34}$$

Jeżeli są spełnione związki (a), to funkcja V_0 spełnia również warunki (29b).

Funkcje V_i dla $i \geqslant 1$ wybieramy z ciągu funkcji

$$V_{k,m} = w^{k-1}(w^2+m_k w+n_k)\cos 2(m-1)\varphi \qquad (k,m = 1,2,3,\dots) \tag{35}$$

przyjmując tylko te wyrazy, dla których k = m

$$V_i(w,\varphi) = w^{i-1}(w^2+m_i w+n_i)\cos 2(i-1)\varphi\,. \tag{36}$$

Współczynniki m_i, n_i dobieramy tak, by funkcje V_i spełniały jednorodne warunki (34). Stąd otrzymujemy

dla i = 1

$$n_1 = -\frac{w_2(2+w_2e^{w_2}Bi_2)}{Bi_1+Bi_2e^{w_2}+w_2e^{w_2}Bi_1Bi_2}$$

$$m_1 = Bi.n_1 \tag{37a}$$

dla i > 1

$$n_i = 0$$

$$m_i = -w_2\left(1+\frac{1}{i+w_2e^{w_2}Bi_2}\right) \tag{37b}$$

Jeżeli spełnione są związki (a), to funkcje V_i spełniają również warunki (29b).

4.3. Wzory obliczeniowe

Dla podanych w punkcie 4.1 założeń szczegółowych formuła (19) określająca n-te przybliżenie nieustalonego pola temperatur w przekroju poprzecznym kadłuba przyjmuje postać

$$\vartheta_n)w,\varphi,Fo) = V_o(w,\varphi,Fo) + \sum_{i=1}^{n} A_i(Fo)V_i(w,\varphi). \tag{38}$$

Upraszczają się znacznie wyrażenia (16) i (22). Uwzględniając, że jakobian przekształcenia

$$x = e^w\cos\varphi; \quad y = e^w\sin\varphi$$

jest równy

$$\frac{\partial(w,\varphi)}{\partial(x,y)} = e^{2w}$$

otrzymujemy

$$b_{ij} = b'_{ij} + sb''_{ij} = \int_D \left[\frac{\partial V_i}{\partial w}\frac{\partial V_j}{\partial w} + \frac{\partial V_i}{\partial \varphi}\frac{\partial V_j}{\partial \varphi}\right] dw d\varphi + \delta_{1i}\,\delta_{1j}\,Bi_1 \int_0^{\pi/2} n_1^2 d\varphi +$$

$$+ Bi_2 \int_0^{\pi/2} V_i(w_2,\varphi)V_j(w_2,\varphi)e^{w_2}\sqrt{1+w_2'^2}\,d\varphi + s\int_D V_i V_j e^{2w} dw d\varphi \qquad (39)$$

$$C'_j = \int_D \vartheta_o V_o e^{2w}\, dw d\varphi$$

$$C''_j(Fo) = \int_D \left[\frac{\partial V_o}{\partial w}\frac{\partial V_j}{\partial w} + \frac{\partial V_o}{\partial \varphi}\frac{\partial V_j}{\partial \varphi}\right] dw d\varphi - \delta_{1j}B_i \int_0^{\pi/2} n_1\left[\vartheta_{c1} - V_o(0,\varphi,Fo)\right] d\varphi +$$

$$- Bi_2 \int_0^{\pi/2} V_j(w_2,\varphi)\left[\vartheta_{c2} - V_o(w_2,\varphi,Fo)\right] e^{w_2}\sqrt{1+w_2'^2}\,d\varphi \qquad (40)$$

$$C'''_j(Fo) = \int_D V_o V_j e^{2w}\, dw d\varphi.$$

Funkcje $A_i(Fo)$ określa wyrażenie (21).

Dla stanu ustalonego funkcje $A_i(Fo)$ w równaniu (38) należy zastąpić stałymi a_i wyznaczonymi z układu równań (25).

5. Przykłady zastosowań

5.1. Rozkład temperatury w walcu

W celu sprawdzenia podanej metody przeprowadzono, w oparciu o otrzymane zależności, obliczenia rozkładu temperatury w nieskończenie długim walcu, a otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniem dokładnym. Do obliczeń szczegółowych przyjęto walec o promieniach $r_1 = 0{,}28$ m i $r_2 = 0{,}4$ m. Temperatura powierzchni wewnętrznej $T_1 = 200^oC$, natomiast temperatura powierzchni zewnętrznej określona jest wzorem

$$T_2 = T_1 + \Delta T\,\frac{2\varphi}{\pi},$$

gdzie $\Delta T = 100$ deg.

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych temperatury na brzegach są odpowiednio równe

$$\vartheta_1 = 0 \qquad \vartheta_2 = \frac{2\varphi}{\pi}.$$

W ostatnich zależnościach przyjęto $T^* = T_1 = 200^oC$.

Rozkład temperatury w walcu opisuje formuła

$$\vartheta_n(w,\varphi) = V_o(w,\varphi) + \sum_{i=1}^{n} a_i\, V_i(w,\varphi). \tag{42}$$

Uwzględniając, że

$$w_2 = \ln r_2/r_1 = \ln 0{,}4/0{,}28 = 0{,}3567$$

zależności (30) i (32) przyjmują postać

$$V_o = \frac{w.\varphi}{0{,}1783.\pi}$$

$$V_i = w^i(0{,}3567 - w)\cos 2(i-1)\varphi\,. \tag{43}$$

Dla w_2 = const. współczynniki b'_{ij} określone przez związki (39) przyjmują dla $i \neq j$ wartości zerowe. W tym przypadku układ równań (25) sprowadza się do postaci

$$a_i = -\frac{C''_i}{b'_{ii}}$$

Wartości pierwszych czterech współczynników a_i zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Współczynniki a_i dla walca

i	1	2	3	4
b'_{ii}	0,0239	0,000628	0,00005501	0,00000537
c''_i	0	-0,00103	0	-0,0000626
a_i	0	1,645	0	11,68

W oparciu o podane związki można określać kolejne przybliżenia rozkładu temperatury w walcu. Np. drugie przybliżenie rozkładu temperatury opisuje zależność

$$T(w,\varphi) = 100\left[\frac{w\,\varphi}{0,1783\pi} + 1,645\; w^2(0,3567-w)\cos 2\varphi\right] + 200. \tag{44}$$

Rozkład temperatur wyznaczony z ostatniej zależności porównano z rozwiązaniem dokładnym uzyskanym ze wzorow podanych w pracy [1]

$$T = 100\left[\frac{w}{0,7137} - 0,4053\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos 2(i-1)\varphi}{(2i-1)^2}\,\frac{\operatorname{sh} 2(2i-1)w}{\operatorname{sh} 0,7134(2i-1)}\right] + 200. \tag{45}$$

W obliczeniach szczegółowych uwzględniono dziesięć wyrazów szeregu.

Z porównania wyników obliczeń wynika, że wartości temperatur wyznaczone metodą przybliżoną minimalnie różnią się od wartości dokładnych. Błąd względny rozwiązania przybliżonego w większości punktów nie przekracza 0,3%, a bardzo często jest znacznie mniejszy. Tylko dla $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi/2$ błąd ten jest większy i maksymalnie osiąga wartość 1,7%.

5.2. Pole temperatur w przekroju poprzecznym kadłuba cz. WP turbiny 13 K 215

Rozpatrywany przykład obliczeniowy dotyczy analizy ustalonego rozkładu temperatury w kadłubie wewnętrznym cz. WP turbiny 13 K 215 przy obciążeniu nominalnym 215 MW.

Badany przekrój poprzeczny wspomnianego kadłuba znajduje się w obrębie stopnia regulacyjnego. Wymiary geometryczne przekroju podano na rys. 3. Funkcję $W_2(\varphi)$ opisującą powierzchnię zewnętrzną kadłuba zestawiono w tablicy 2.

Jako charakterystyczny wymiar liniowy przyjęto wewnętrzny promień kadłuba $r_1 = 0,7$ m.

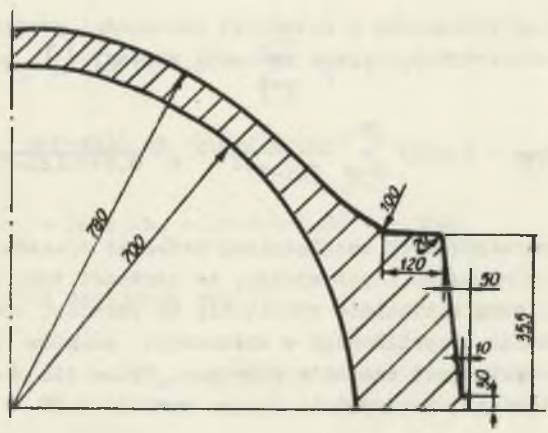
Tablica 2

Funkcja $w_2(\varphi)$ opisująca powierzchnię zewnętrzną kadłuba

φ	0	$\frac{\pi}{40}$	$2\frac{\pi}{40}$	$3\frac{\pi}{40}$	$4\frac{\pi}{40}$	$5\frac{\pi}{40}$	$6\frac{\pi}{40}$	$7\frac{\pi}{40}$	$8\frac{\pi}{40}$	$9\frac{\pi}{40}$	$\frac{\pi}{4} \div \frac{\pi}{2}$
w_2	0,2654	0,2503	0,2503	0,2559	0,2661	0,2654	0,1520	0,1272	0,1145	0,1094	0,1079

Na podstawie rozkładu temperatury pary podanego w pracy [2] oszacowano średnią temperaturę powierzchni wewnętrznej w rozpatrywanym przekroju jako równą $T_{wśr} = 492^{o}C$, a temperaturę powierzchni $T_{zśr} = 383^{o}C$.

Rozpatrywana turbina posiada układ regulacji ilościowej, kadłub wewnętrzny WP posiada cztery zawory regulacyjne, po dwa w części górnej i dolnej. Ten typ zasilania powoduje, że nawet przy obciążeniu nominalnym wskutek pewnej asymetrii kanałów prowadzących parę, zasilanie stopnia regulacyjnego nie jest równomierne, co powoduje powstanie różnic temperatur na powierzchni kadłuba.



Rys. 3. Przekrój poprzeczny kadłuba cz. WP turbiny 13K215

Zakładając, że temperatury na powierzchni są symetryczne względem prostopadłych osi przekroju wystarczy rozpatrywać jedynie ćwiartkę przekroju. W oparciu o dane zawarte w pracy [4] do dalszych obliczeń przyjęto, że różnica temperatur na powierzchni wewnętrznej wynosi 15 deg, a na powierzchni zewnętrznej 35 deg.

Przyjmując, że rozkład temperatury na obu powierzchniach jest liniowy otrzymujemy

$$T_1 = 30\,\frac{\varphi}{\pi} + 485$$

$$T_2 = 70\,\frac{\varphi}{\pi} + 366.$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych ($T^* = 485^{\circ}C$, $\Delta T = 30/\pi$ deg) temperatury na brzegach są odpowiednio równe

$$\vartheta_1 = \varphi \qquad \vartheta_2 = \frac{7}{3}\varphi - 12{,}45. \tag{46}$$

Rozkład temperatury w przekroju poprzecznym opisuje formuła (42). Funkcja $V_0(w,\varphi)$ określona związkiem (30) przyjmuje postać

$$V_0 = \frac{w}{w_2(\varphi)}\left[\frac{4}{3}\varphi - 12,45\right] + \varphi. \qquad (47)$$

Wartości elementów b'_{ij} oraz c''_j wyznaczone ze wzorów (39) i (40) dla i=j=4 zestawiono w tablicy 3.

Tablica 3

Elementy b'_{ij}, c''_j dla przekroju poprzecznego kadłuba

b'_{ij}				c''_j
0,0036107	0,036798	-0,0035613	0,0002275	0,04670
0,036798	-0,0010916	0,381952	0,0016235	-0,060545
-0,0035613	0,381952	0,00000122	-18,59311	0,0072495
0,0002275	0,0016235	-18,59311	0,000000434	-0,0010122

Rozwiązując układ równań (25) dla wyżej podanych współczynników otrzymujemy następujące wartości stałych a_i

n = 1

$a_1 = -12,9349$

n = 2

$a_1 = 1,61412 \quad a_2 = -1,42756$

n = 3

$a_1 = -10,566 \quad a_2 = -0,11929 \quad a_3 = 1,16911$

n = 4

$a_1 = 1,61709 \quad a_2 = -1,42768 \quad a_3 = -0,0001602 \quad a_4 = -0,029253.$

Korzystając z obliczonych stałych a_i można określić kolejne przybliżenia rozkładu temperatury w przekroju poprzecznym kadłuba. Np. pierwsze przybliżenie rozkładu temperatury opisuje formuła

$$T(w,\varphi) = \frac{30}{\pi}\left[\frac{w}{w_2}\left(\frac{4}{3}\varphi - 12,45\right) + \varphi - 12,934\, w(w_2-w)\right] + 485. \qquad (48)$$

6. Uwagi końcowe

Do przybliżonego rozwiązywania skomplikowanych - zarówno ze względu na złożoność kształtu, jak i złożoność warunków brzegowych - zadań nieustalonego przewodzenia ciepła stosuje się często metody numeryczne. Sformułowany problem można by np. rozwiązać uogólnioną, na dowolne ortogonalne układy współrzędnych krzywoliniowych, metodą bilansów elementarnych [3].

Zastosowana w niniejszej pracy przybliżona metoda analityczna ma tę wyższość nad metodą numeryczną, że pozwala na pełniejszą analizę wpływu różnych czynników na rozkład temperatury, co ma szczególne znaczenie przy określaniu warunków rozruchu turbozespołu. Dalszą zaletą wspomnianej metody jest większa - niż w metodzie numerycznej - możliwość uwzględnienia rzeczywistych kształtów kadłuba. Należy również dodać, że znacznie zmniejsza się ilość obliczeń niezbędnych do uzyskania końcowych rezultatów. Do realizacji obliczeń na maszynie cyfrowej opracowano ogólny program obliczenia współczynników b_{ij} oraz c_j dla dowolnej funkcji $w_2(\varphi)$ opisującej brzeg kadłuba oraz dowolnych warunków brzegowych i początkowych.

Ogólne rozwiązanie zagadnienia wyspecyfikowano dla przekroju poprzecznego kadłuba. W podobny sposób można opracować wzory obliczeniowe do wyznaczenia pola temperatur w przekroju podłużnym kadłuba.

LITERATURA

1. CARSLAW H.S., JEAGER J.C. - Conduction of Heat in Solids, Oxford, 1959.
2. KRAUSE M. - Obliczenie rozkładu temperatury pary w turbinie o mocy 200 MW. Praca wewn. Zamechu, Elbląg 1971 (nie opublikowana).
3. KUTARBA K., CHMIELNIAK T., KOSMAN G. - Badania nieustalonych pól temperatur w złożonych elementach maszyn. ABM, z. 3, 1971.
4. MAZANOWSKI P. - Badania pól temperaturowych w elementach turbin, praca dyplomowa, Gliwice 1970.
5. MICHLIN S.G., SMOLICKI C.L. - Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych, PWN, Warszawa 1970.
6. POŁOŻY G.W. - Metody przybliżonych obliczeń. WNT, Warszawa 1966.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ТОЛСТОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Р е з ю м е

Работа содержит некоторые результаты исследований неустановившихся полей температур в сложных элементах машин. Представлено метод определения распределения температур в толстостенных оболочках произвольного профиля.

Задача решается с помощью вариационного исчисления, стараясь определить экстремум соответствующего функционала при использовании метода Ритца. Подробно проанализировано распределение температур в поперечном сечении корпуса паровой турбины.

С целью сравнения результатов вычислений, полученных при применении рассматриваемого метода с точными результатами проведены вычисления распределения температур в цилиндрической оболочке.

NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELDS IN THICK-WALLED SHELLS

S u m m a r y

This paper contains some results of investigation of non - stationary temperature fields in machine parts of complicated form. The paper presents an approximate method for determining the temperature distribution in thick-valled shells.

The problem is solved by means of the variational calculus, by seeking for the extremum value of the relevant functional by means of the Ritz method. The temperature distribution in a cylinder of a steam turbine is analysed in detail.

In order to confront the results obtained by means of the present method and analytical solutions the one - dimensional temperature distribution is computed in a thick - walled cylindrical shell.