

Stefan Postrzednik

Instytut Techniki Ciepłej

PRZEPIY W CIEPŁA ORAZ POLE TEMPERATURY W PŁETWACH  
OPROMIENIOWANEGO EKRANU MEMBRANOWEGO

Streszczenie. W pracy wyznaczono dwuwymiarowe pole temperatury w opromienianej płetwie ekranu membranowego, w układzie bezwymiarowych zmiennych i parametrów. Podano metodę rozwiązania zagadnienia z nieliniowymi warunkami brzegowymi, związanymi z opromienianiem ekranu. Określono wpływ temperatury płomienia i warunków opromieniania na przepływ ciepła i pole temperatury w rozpatrywanym układzie.

Ważniejsze oznaczenia:

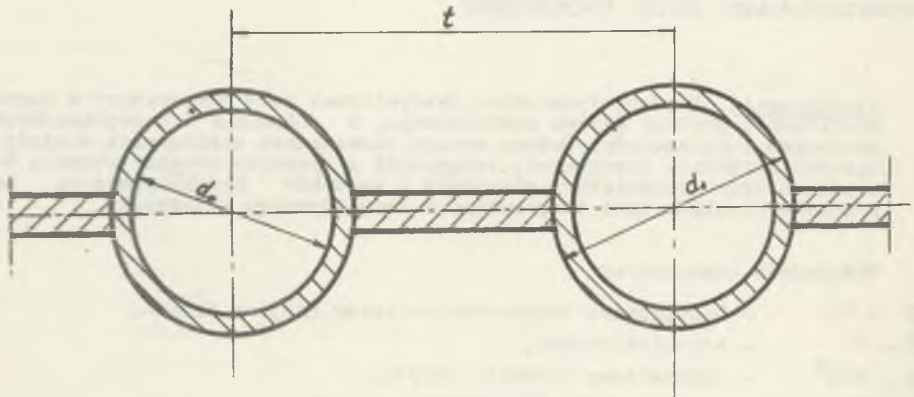
$T$	- °K	- bezwzględna temperatura w danym miejscu układu,
$\dot{Q}$	- W	- strumień ciepła,
$\dot{q}$	- W/m <sup>2</sup>	- jednostkowy strumień ciepła,
$\lambda$	- W/m deg	- współczynnik przewodzenia ciepła,
$C$	- W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup>	- stała związana z promieniowaniem,
(W)		- bezwymiarowy strumień ciepła,
$\theta$	}	- bezwymiarowe temperatury,
$\Theta$		
$a$	- m	- szerokość płetwy
$b$	- m	- grubość płetwy
$\delta$		- zredukowana grubość płetwy
$x$	- m	- współrzędne punktów przekroju płetwy
$y$	- m	
$\xi$		- zredukowane współrzędne punktów przekroju płetwy
$\eta$		
(Z)		- liczba promieniowania
S		- suma szeregu
U	}	- zmienne dyskretne
N		
A		

Stosowano indeksy:

1	- u powierzchni nasady płetwy
i	} - wskaźniki zmiennej indeksowanej
n	
b	- na powierzchni opromienianej płetwy
m	- dla wartości średniej
F	- dla płomienia.

### 1. Wstęp

W nowoczesnych rozwiązaniach konstrukcyjnych ściany komór spalania kotłów parowych utworzone są przez ekrany membranowe. Są to pewne powtarzalne elementy konstrukcyjne; rura wraz z dwoma żebrami (pletwami) znajdującymi się po przeciwnych stronach jej średnicy (rys. 1).



Rys.1. Fragment ekranu membranowego kotła

Układy takie odznaczają się wieloma zaletami w stosunku do zwykłych ekranów rurowych; umożliwiają bowiem wyposażenie komory w lżejsze i tańsze obmurze, poprawiają przejmowanie ciepła od płomienia w komorze, wpływają na zmniejszenie straty rozproszenia kotła, są nieodzowne w przypadku komór, w których panuje nadciśnienie.

W związku z zastosowaniem ekranów membranowych, powstają jednak pewne nowe problemy: występuje złożony stan naprężeń mechaniczno-termicznych całego układu oraz inny ilościowo i jakościowo przepływ ciepła w układzie.

U podstaw rozwiązania tych zagadnień leży konieczność wyznaczenia możliwie dokładnego pola temperatur w przekroju poprzecznym pletw łączących rury ekranu membranowego.

W dużych kotłach ciepło w komorze paleniskowej (w ok. 99,9 %) przepływa na drodze promieniowania od płomienia do ścian schładzających i jest przejmowane przez czynnik roboczy (odparowującą wodę).

Istotną sprawą jest tutaj określenie właściwych warunków brzegowych na granicy żebra opromieniowanego a bryłą płomienia wypełniającej komorę. Często przyjmuje się, że znany jest jednostkowy strumień ciepła  $\dot{q}_A$  wpływający do pletwy przez opromienioną jej powierzchnię.

Ponieważ zadaniem komory paleniskowej oprócz umożliwienia poprawnego spalania mieszanki paliwowo-powietrznej, jest odpowiednie schłodzenia spalin do właściwej temperatury  $T_w$  na wyjściu z komory, więc można określić

całkowitą ilość ciepła  $\dot{Q}_r$ , która winna być przejęta przez ekrany schładzające, a mianowicie:

$$\dot{Q}_r = \dot{n}_s \Delta(Mi)_s \left|_{T_a}^{T_w} \right. \text{ kW}, \quad (1.1)$$

gdzie

$\dot{n}_s$  -  $\frac{\text{kmol}}{\text{s}}$  - strumień spalin powstających w komorze podczas spalania,

$\Delta(Mi)_s \left|_{T_a}^{T_w} \right. \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}$  - zmiana molowej entalpii spalin w zakresie temperatur  $T_a$  i  $T_w$ ,

$T_a$  - °K - bezwzględna temperatura spalania adiatermicznego w komorze dla danego stosunku nadmiaru powietrza  $\lambda$ ,

$T_w$  - °K - bezwzględna temperatura spalin na wylocie z komory paleniskowej.

Jeżeli wyznaczona zostanie niezbędna powierzchnia ekranu membranowego  $A_e \text{ m}^2$ , wówczas strumień ciepła  $\dot{q}_A$  określić należy z równania

$$\dot{q}_A = \frac{\dot{Q}_r}{A_e} \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}. \quad (1.2)$$

W rzeczywistości jednak, jednostkowy strumień ciepła  $\dot{q}_A$  będzie wielkością zmienną względem rozpatrywanego miejsca w układzie. Zależał będzie od temperatury powierzchni opromieniowanej w danym miejscu, oraz od efektywnej, ze względu na promieniowanie, temperatury  $T_F$  płomienia w komorze spalania.

Płomień wypełniający komorę spalania kotła jest bryłą nieizotermiczną, można jednak wyznaczyć jego efektywną temperaturę  $T_F$  ze względu na wymianę ciepła przez promieniowanie [3]. Otrzymamy wtedy do rozwiązania problem z nieliniowymi warunkami brzegowymi.

## 2. Pole temperatury płetwy opromieniowanej

### 2.1. Sformułowanie zagadnienia

Analizowane zagadnienie zostanie rozwiązane przy następujących założeniach:

- pole temperatury w płetwie nie zmienia się wzdłuż długości płetwy (pole płaskie),
- własności materiałowe płetwy: gęstość  $\delta$ , współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  - nie zależą od temperatury,
- powierzchnie opromieniowane płetwy i rur ekranu są szare,

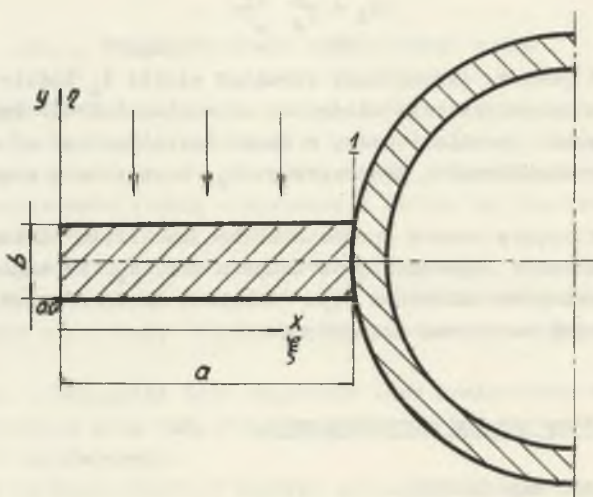
- opromieniowana zewnętrzna powierzchnia rury jest izotermiczna,
- płetwa od strony obmurza jest doskonale zaizolowana,
- strumień energii wymienianej przez promieniowanie zarówno między pło-  
mieniem, jak i rurą a płetwą można określić z równania Stefana-Boltzmar-  
na

$$\dot{q}_r = C \cdot [T_P^4 - T^4].$$

Na rys. 2 pokazany jest wybrany powtarzalny element układu wraz z jego geo-  
metrią. Interesującym nas obszarem jest płetwa o grubości  $b$  oraz szeroko-  
ści  $2a$  (na rys. 2 pokazana jest ze względu na symetrię połowa szerokoś-  
ci płetwy). Dla stanu ustalonego pole temperatur w przekroju poprzecznym  
płetwy opromieniowanej opisane jest przez podany niżej układ równań i wa-  
runków:

- równania różniczkowe Laplace'a dotyczące pola temperatury w płetwie

$$\nabla^2 T(x,y) = 0 \quad (2.1)$$



Rys. 2. Model geometryczny układu

- układ warunków brzegowych

$$a. \quad \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.2)$$

$$b. \quad \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (2.3)$$

$$c. \quad \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=b} = \dot{q}(x) \quad (2.4)$$

$$d. \quad T(x, y) \Big|_{x=a} = T_1. \quad (2.5)$$

Zgodnie z uwagami podanymi w punkcie 1, rozważone zostaną dwa przypadki:

I: gdy znany jest strumień jednostkowy (obciążenie cieplne powierzchni)  $\dot{q}_A$ , wtedy można przyjąć w miejsce warunku (2.4)

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=b} = \dot{q}_A = \text{idem}, \quad (2.4a)$$

gdzie

$\dot{q}_A$  określić należy z równania (1.2),

II: gdy strumień ciepła  $\dot{q}(x)$  dopływający w danym miejscu do opromienianej powierzchni płetwy wynika z warunków opromieniania tej powierzchni przez świecący płomień wypełniający komorę utworzoną przez ściany ekranu membranowego. Problem ten zostanie sprecyzowany w następnym rozdziale.

Równanie różniczkowe (2.1) oraz układ równań warunków brzegowych (2.2) do (2.5) wygodniej jest zapisać w formie związków wielkości bezwymiarowych. Wprowadzone zostaną następujące wielkości bezwymiarowe:

- zredukowane współrzędne geometryczne

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a} & 0 \leq \xi \leq 1 \\ \eta &= \frac{y}{a} & 0 \leq \eta \leq \delta \end{aligned} \quad \delta = \frac{b}{a} \quad (2.6)$$

- zredukowane sympleksy temperatur

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{T(x, y)}{T_F} \quad \Phi_1 = \frac{T_1}{T_F} \quad (2.7)$$

- zredukowany strumień ciepła

$$(W) = \frac{\dot{q}(x) \cdot a}{\lambda T_F}. \quad (2.8)$$

Uwzględniając związki (2.6) do (2.8) w równaniach (2.1) do (2.5) otrzymane równania bezwymiarowe

$$\nabla^2 \Phi(\xi, \eta) = 0 \quad (2.9)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\delta} = (W(\xi)) \quad (2.12)$$

$$\Phi(\xi, \eta) \Big|_{\xi=1} = \Phi_1. \quad (2.13)$$

Biorąc pod uwagę wspomniane wyżej dwa przypadki, można stwierdzić, że dla pierwszego z nich

$$(W)_A = \frac{\dot{q}_A \cdot a}{\lambda \cdot T_P} = \text{idem} \quad (2.14)$$

można przyjąć, iż jest wielkością znaną.

Znalezienie rozwiązania równania różniczkowego (2.9) z warunkami brzegowymi (2.10) do (2.14) jest rzeczą stosunkowo prostą. Należy dodatkowo zauważyć, że przypadek I może być traktowany jako pewien szczególny przypadek ogólniejszego zagadnienia II.

## 2.2. Ogólne rozwiązanie równania przewodnictwa ciepła

Dla przyjętego układu współrzędnych prostokątnych  $(x, y)$ , a tym samym współrzędnych  $(\xi, \eta)$  równanie (2.9) przybiera postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (2.15)$$

Równanie to spełnia następujący układ funkcji

$$\begin{aligned} & e^{u\eta} \sin(u\xi), \quad e^{u\eta} \cos(u\xi), \quad e^{-u\eta} \sin(u\xi), \\ & e^{-u\eta} \cos(u\xi), \quad \xi, \quad \eta, \quad \xi^2 - \eta^2, \quad \lambda. \end{aligned}$$

Całką ogólną równania (2.15) jest liniowa kombinacja powyższych funkcji, możemy więc napisać

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) = & A + B\xi + C\eta + D\xi\eta + E(\xi^2 - \eta^2) + \\ & + [F \sin(u\xi) + G \cos(u\xi)] [H e^{u\eta} + K e^{-u\eta}]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Występujące tutaj stałe  $A, B, C, D, E, F, G, H, K$  należy określić wykorzystując zadane warunki brzegowe. W tym celu na podstawie równania (2.16) określone zostaną wprawdzie odpowiednie potrzebne funkcje

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\eta} &= B + D\eta + 2E\xi + u \left[ F \cos(u\xi) - G \sin(u\xi) \right] \\ &\cdot \left[ H e^{u\eta} + K e^{-u\eta} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_{\xi} &= C + D\xi - 2E\eta + u \left[ F \sin(u\xi) + G \cos(u\xi) \right] \\ &\cdot \left[ H e^{u\eta} - K e^{-u\eta} \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

W oparciu o warunek brzegowy (2.10) oraz równanie (2.17) otrzymujemy równanie warunku w postaci

$$B + D\eta + u F \left[ H e^{u\eta} + K e^{-u\eta} \right] = 0. \quad (2.19)$$

Ponieważ  $\eta > 0$ , więc równanie to będzie spełnione tylko wtedy, gdy

$$B = 0, \quad D = 0, \quad F = 0. \quad (2.20)$$

Z równania (2.11) oraz (2.18) z uwzględnieniem (2.20) wynika równanie warunku w formie

$$C + U G \cos(u\xi) [H - K] = 0. \quad (2.21)$$

Równanie (2.21) określa nam związki

$$H = K, \quad C = 0. \quad (2.22)$$

Analogicznie równanie (2.13) i (2.16) dostarczają nam równania warunku

$$A + E(1 - \eta^2) + G \cos(u) \left[ H e^{u\eta} + K e^{-u\eta} \right] = \phi_1. \quad (2.23)$$

Na podstawie ostatniego równania łatwo ustalić, że  $E=0$ ,  $A=\phi_1$ ,  $\cos(u)=0$  z czego wynika, że parametr  $u$  może przyjmować pewne wartości dyskretne

$$u_n = \frac{2n-1}{2} \pi, \quad n=1,2,3,\dots \quad (2.24)$$

Po podstawieniu wyników (2.20), (2.22), (2.24) do równania (2.16) otrzymamy funkcję opisującą pole temperatur w przekroju poprzecznym płetwy w postaci

$$\phi(\xi, \eta) = \phi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n \cos\left(\frac{2n-1}{2} \pi \xi\right) \cosh\left(\frac{2n-1}{2} \pi \eta\right). \quad (2.25)$$

Nieokreślony dotąd szereg stałych  $G_n$ ,  $n=1,2,3,\dots$  wyznaczyć należy w oparciu o równanie warunku brzegowego (2.12), względnie w prostszej formie wykorzystując równanie (2.14).

Wykorzystując warunek brzegowy (2.12) i funkcję (2.25) otrzymujemy związek

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n u_n \sinh(u_n \delta) \cos(u_n \xi) = W(\xi). \quad (2.26)$$

Ponieważ funkcje  $\cos(u_n \xi)$  są ortogonalne w rozpatrywanym przedziale  $0 \leq \xi \leq 1$ , takie że

$$\int_0^1 \cos(u_n \xi) \cos(u_m \xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ \frac{1}{2} & \text{dla } n = m, \end{cases} \quad (2.27)$$

więc mnożąc obustronnie równanie (2.26) przez  $\cos(u_n \xi)$  oraz całkując w granicach 0 do 1 otrzymamy równanie

$$G_n u_n \sinh(u_n \delta) \int_0^1 \cos^2(u_n \xi) d\xi = \int_0^1 W(\xi) \cos(u_n \xi) d\xi,$$

z którego po uwzględnieniu (2.27) otrzymujemy wyrażenie do obliczenia stałych współczynników  $G_n$

$$G_n = \frac{2 \int_0^1 W(\xi) \cos(u_n \xi) d\xi}{u_n \sinh(u_n \delta)} \quad (2.28)$$

dla  $n=1,2,3,\dots$

Wyrazy  $G_n$  mogą być obliczone, jeżeli znana będzie postać funkcji  $W(\xi)$ .

Funkcja  $W(\xi)$  - ciągła w przedziale  $[0,1]$ , może być zawsze przedstawiona w postaci szeregu potęgowego nieskończonego.

Niechaj więc

$$W(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi^i, \quad (2.29)$$

gdzie  $a_i$  są stałymi współczynnikami rozwinięcia. Po podstawieniu wyrażenia (2.29) do (2.28) otrzymamy

$$G_n = \frac{2}{u_n \sinh(u_n \delta)} \sum_{i=0}^{\infty} a_i N_{i,n}, \quad (2.30)$$



gdzie

$$N_{i,n} = \int_0^1 \xi^i \cos(u_n \xi) d\xi \quad (2.31)$$

$$i=0,1,2,3,\dots \quad n=1,2,3,\dots$$

Dokonując w ostatniej całce (2.31) podstawienia  $z_n = u_n \xi$  można zapisać wyrażenie na  $N_{i,n}$  w postaci

$$N_{i,n} = \left(\frac{1}{u_n}\right)^{i+1} A_{i,n}, \quad (2.32)$$

gdzie

$$A_{i,n} = \int_0^{u_n} z_n^i \cos(z_n) dz_n. \quad (2.33)$$

Wykonując dwukrotne całkowanie przez części (2.33) otrzymamy formułę rekurencyjną do obliczania czynników  $A_{i,n}$

$$A_{i,n} = (u_n)^i (-1)^{n+i} - i(i-1)A_{i-2,n}. \quad (2.34)$$

Aby móc korzystać z tej formuły, trzeba obliczyć co najmniej kilka (dwa) pierwszych wyrazów:  $A_{i,n}$  dla  $i=0,1,2$ . Można je obliczyć z równania (2.33), otrzymujemy wtedy

$$A_{0,n} = \frac{1}{u_n} (-1)^{n+1}$$

$$A_{1,n} = \left(\frac{1}{u_n}\right)^2 \left[ u_n (-1)^{n+1} - 1 \right] \quad (2.35)$$

$$A_{2,n} = (-1)^{n+1} \left( u_n^2 - \frac{2}{u_n} \right)$$

$$A_{3,n} = (-1)^{n+1} \left( u_n^3 - \frac{6}{u_n} \right) + \frac{6}{u_n^2}$$

.....

W ten sposób określać można wszystkie współczynniki rozwiązania. Rozwiązanie (2.25) z uzupełnieniami (2.30) do (2.35) jest ogólnym rozwiązaniem problemu oznaczonego cyfrą II.

### 2.3. Rozkład temperatur w płetwie równomiernie ogrzewanej

Obecnie zostanie rozpatrzony pewien szczególny przypadek rozwiązania. Przyjmując, że  $a_1 = 0$  dla  $i=1,2,2,\dots$ , zaś  $a_0 \neq 0$  otrzymamy na podstawie równań (2.35) i (2.32)

$$N_{0,n} = \frac{1}{u_n^2} (-1)^{n+1},$$

a z równania (2.30)

$$G_n = \frac{2 a_0 (-1)^{n+1}}{u_n^3 \sinh(u_n \delta)}. \quad (2.36)$$

Pole temperatur będzie opisane wzorem

$$\phi(\xi, \eta) = \phi_1 + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^3 \sinh(u_n \delta)} \cos(u_n \xi) \cdot \cosh(u_n \eta). \quad (2.37)$$

Łatwo zauważyć, że otrzymane rozwiązanie (2.37) dotyczy przypadku oznaczonego w punkcie 2.1 cyfrą I, dla którego  $a_0 = (W)_A$  określone jest wzorem (2.14).

Z analizy równania (2.37) wynika, że najwyższa temperatura w układzie występuje w punkcie o współrzędnych  $\xi = 0$ ,  $\eta = \delta$  czyli na powierzchni opromienianej w osi symetrii płytki. Temperatura ta wynosi

$$\phi_{\max} = \phi(0, \delta),$$

czyli

$$\phi_{\max} = \phi_1 + 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{cth}(u_n \delta)}{u_n^3}. \quad (2.38)$$

Ze wzoru (2.38) wynika, że maksymalna temperatura  $\phi_{\max}$  w układzie jest proporcjonalna do wielkości bezwymiarowego zredukowanego strumienia ciepła  $(W)_A$ , co zapisujemy

$$\phi_{\max} = \phi_1 + (W)_A S, \quad (2.39)$$

gdzie

$$S = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{cth}(u_n \delta)}{u_n^3}. \quad (2.40)$$

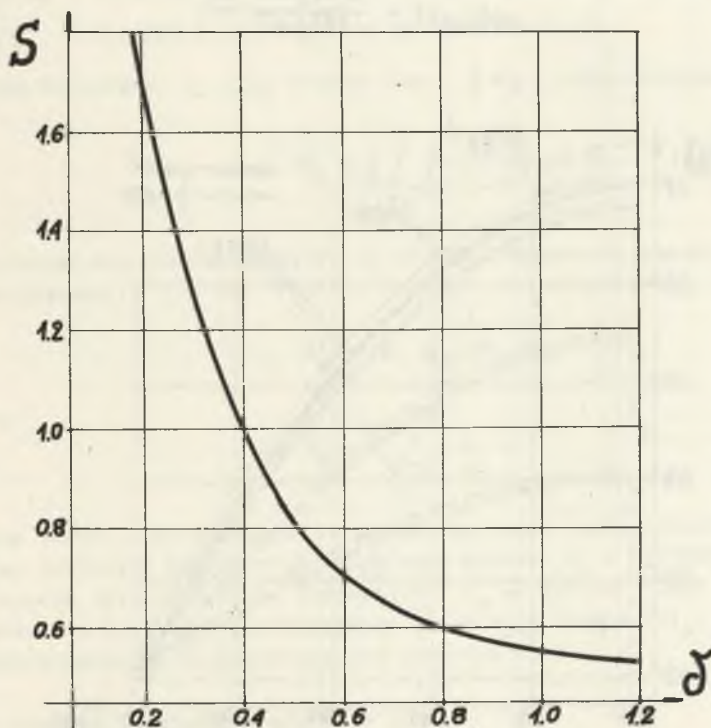
Wprowadzimy oznaczenie

$$b_n = \frac{\operatorname{cth}(u_n \delta)}{(u_n \delta)^3}, \quad (2.41)$$

wtedy

$$S = 2 \delta^3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n. \quad (2.42)$$

Ponieważ wszystkie wyrazy  $b_n > 0$ , więc szereg (2.42) jest szeregiem przemiennym. Z twierdzenia Leibniz'a dotyczącego szeregów przemiennych wynika, że każdy szereg taki jest zbieżny do granicy  $S$  zawartej w przedziale  $(b_1 - b_2) < S < b_1$ .



Rys. 3. Suma szeregu  $S$  określająca maksymalną temperaturę w układzie

Granice  $S$  tego szeregu można obliczyć na maszynie matematycznej, biorąc pod uwagę oczywiście tylko skończoną ilość wyrazów szeregu. Suma szeregu  $S$  jest funkcją wielkości  $\delta$ , przedstawiona jest na rys. 3.

Jeżeli sumę  $S$  szeregu (2.42) zastąpimy przez  $k$ -tą sumę cząstkową  $S_k$ , to popełniony błąd nie jest większy od wyrazu  $b_{k+1}$ , bo

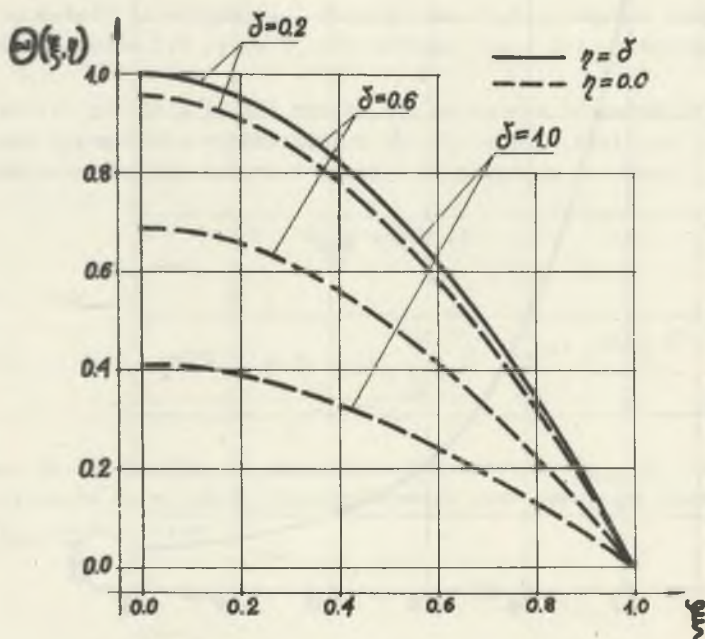
$$S - S_k = (-1)^k (b_{k+1} - b_{k+2} + \dots).$$

Maksymalny błąd względny może być oszacowany jako

$$\Delta = \frac{b_{k+1}}{S_k} 100\%. \quad (2.44)$$

Podana na rys. 3 zależność  $S(\delta)$  wyznaczona jest z błędem  $\Delta = 0,01\%$ . Na rysunku 4 pokazany jest przebieg temperatur  $\Theta(\xi, \eta)$  w płetwie (w zależności od współrzędnej  $\xi$ , dla różnych wartości współrzędnej  $\eta$ ) określonych względem wielkości  $(W)_A$

$$\Theta(\xi, \eta) df = \frac{\Theta(\xi, \eta) - \Theta_1}{(W)_A S}. \quad (2.45)$$



Rys. 4. Rozkład zredukowanej temperatury w płetwie ekranu membranowego

Po wykorzystaniu zależności (2.37) i (2.40) otrzymamy

$$\Theta(\xi, \eta) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^3 \sinh(u_n \delta)} \cos(u_n \xi) \cosh(u_n \eta)}{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{cth}(u_n \delta)}{u_n^3}}. \quad (2.46)$$

Wykorzystując podane wykresy (rys. 4 oraz rys. 3) można łatwo określić temperatury w dowolnym miejscu płetwy ekranu membranowego.

Interesującą wielkością będzie również średnia temperatura całej płetwy, można ją określić z równania

$$\bar{\phi}_m \delta \bar{c}_w \bar{\rho} = \int_0^1 \int_0^{\delta} c_w \rho \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.47)$$

gdzie

$\bar{c}_w, c_w$  - to średnie i rzeczywiste ciepło właściwe materiału płetwy,

$\bar{\rho}, \rho$  - średnia i rzeczywista gęstość materiału.

Przy założeniu  $c_w = \bar{c}_w = \text{idem}$  oraz  $\bar{\rho} = \rho = \text{idem}$  otrzymamy

$$\bar{\phi}_m = \frac{1}{\delta} \int_0^1 \int_0^{\delta} \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.48)$$

Po podstawieniu równania (2.37) do (2.48) i wykonaniu odpowiednich całkowań otrzymamy

$$\bar{\phi}_m = \phi_1 + \frac{1}{\delta} (W)_A S_m, \quad (2.49)$$

gdzie

$$S_m = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n^5}. \quad (2.50)$$

Szereg (2.50) jest szeregiem zbieżnym, co można łatwo udowodnić wykorzystując kryterium porównawcze. Jego suma wynosi  $S_m = 0,210598$ . Jak widać z równania (2.49), średnia temperatura  $\bar{\phi}_m$  w płetwie jest wprost proporcjonalna do wielkości zredukowanego strumienia ciepła  $(W)_A$ , a odwrotnie proporcjonalna do zredukowanej jej grubości  $\delta$ .

#### 2.4. Rozkład strumienia ciepła w płetwie

Jednostkowy strumień ciepła  $\dot{q}(x, y)$  dla wszystkich punktów wewnętrznego obszaru przekroju poprzecznego płetwy jest wielkością dwuwymiarową. Jedynie w pobliżu nasady żebra, strumień ten jest wielkością jednowymiarową  $\dot{q}_1(y)$ , a to ze względu na warunek  $\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{x=a} = 0$ .

Dla stanu ustalonego pola temperatury spełniona musi być oczywista relacja

$$\int_0^a q(x, y) \Big|_{y=b} dx = \int_0^b \dot{q}_1(y) dy \quad (2.51)$$

lub w formie bezwymiarowej

$$\int_0^1 w(\xi, \eta) \Big|_{\eta=\delta} d\xi = \int_0^\delta w_1(\eta) d\eta, \quad (2.52)$$

gdzie

$$w_1(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{q}_1(y)}{T_F} \Big|_{x=a}. \quad (2.53)$$

Z drugiej strony strumień  $\dot{q}_1(y)$  można określić jako

$$\dot{q}_1(y) = -\lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a} \quad (2.54)$$

lub w formie bezwymiarowej

$$w_1(\eta) = - \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}. \quad (2.55)$$

Uwzględniając równanie (2.25) i (2.55), wykonując odpowiednie działania, otrzymujemy

$$w_1(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n u_n (-1)^{n+1} \cosh(u_n \eta), \quad (2.56)$$

gdzie współczynniki  $G_n$  określać trzeba z równania (2.28).

Jeżeli współczynniki  $G_n$  zostaną określone z równania (2.30), wówczas

$$w_1(\eta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sinh(u_n \delta)} \sum_{i=0}^{\infty} (a_i N_{i,n}) \cosh(u_n \eta), \quad (2.57)$$

zaś jeżeli z równania (2.36), to

$$w_1(\eta) = 2a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n^2 \sinh(u_n \delta)} \cosh(u_n \eta). \quad (2.58)$$

Z równania (2.57) i (2.58) wynika, że bezwymiarowy strumień ciepła  $w_1(\eta)$  osiąga swą maksymalną wartość w punkcie  $\eta=\delta$ . W stosunku do wartości strumienia średniego  $(w)_{1,m}$  zdefiniowanego jako

$$(w)_{1,m} = \int_0^\delta w_1(\eta) d\eta.$$

Wartość strumienia maksymalnego  $W_{1,max}$  wynosi

$$s_1 = \frac{W_{1,max}}{W_{1,m}}$$

Korzystając z zależności (2.58) otrzymujemy

$$s_1 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{th}(u_n \delta)}{u_n^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n^3}}$$

Wielkość  $s_1$  jest zależna w tym przypadku tylko od stosunku  $\delta$ , grubości do szerokości płetwy.

### 3. Wpływ temperatury płomienia na pole temperatur w płetwie

3.1. Metoda wyznaczenia rozkładu temperatur w układzie z nieliniowym warunkiem brzegowym

W rzeczywistości zredukowany strumień ciepła ( $\dot{W}$ ) jest zależny od miejsca na opromieniowanej powierzchni płetwy, zależy on od temperatury płomienia  $T_P$ , temperatury zewnętrznej powierzchni płetwy  $T(x,b)$  oraz stopnia zacinienia płetwy przez sąsiednie rury odparownika. W pierwszym przybliżeniu można stwierdzić, że średni strumień ciepła  $\dot{q}_b$  wpływający przez opromieniowaną powierzchnię płetwy może być obliczony z równania

$$\dot{q}_b = C [T_P^4 \cdot T_b^4], \quad (3.1)$$

gdzie

$T_b$  °K - jest średnią temperaturą opromieniowanej powierzchni płetwy,

$C \frac{W}{m^2 K^4}$  - stała promieniowania.

Równanie (3.1) może być zapisane w formie bezwymiarowej

$$(\dot{W})_b = (Z) [1 - \beta_b^4], \quad (3.2)$$

gdzie

$(\dot{W})_b = \frac{\dot{q}_b a}{\lambda T_P}$  - zredukowany strumień ciepła,

$(Z) = \frac{C T_F^3 a}{\lambda}$  - liczba kryterialna (odpowiednik liczby Biota dla konwekcji),

$\phi_b = \frac{T_b}{T_F}$  - simpleks temperaturowy.

Średnią wartość temperatury bezwymiarowej  $\phi_b$  można obliczyć z równania (2.37) według wzoru

$$\phi_b = \int_0^1 \phi(\xi, \delta) d\xi, \quad (3.3)$$

Podstawiając równanie (2.37) do (3.3) i wykonując wskazane działanie otrzymamy po uwzględnieniu, że  $a_0 = (W)_b$  wyrażenia

$$\phi_b = \phi_1 + (W)_b S_b, \quad (3.4)$$

przy czym

$$S_b = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{cth}(u_n \delta)}{u_n^4}. \quad (3.5)$$

Szereg  $S_b$  jest szeregiem zbieżnym, gdyż jego majorantą jest szereg bezwzględnie zbieżny o wyrazach określonych równaniem (2.41). Granica  $S_b$  tego szeregu jest funkcją zredukowanej grubości płetwy  $\delta$ . Zależność ta pokazana jest na rys. 5.

Po podstawieniu równania (3.4) i (3.2) otrzymamy zależność

$$(W)_b = (Z) \left\{ 1 - [\phi_1 + (W)_b S_b]^4 \right\}, \quad (3.6)$$

z której można wyznaczać nieznanne dotąd wartości  $(W)_b$ . Rozwiązania równania łatwiej dokonać wprowadzając podstawienie

$$(W)_b = (Z) k, \quad (3.7)$$

gdzie

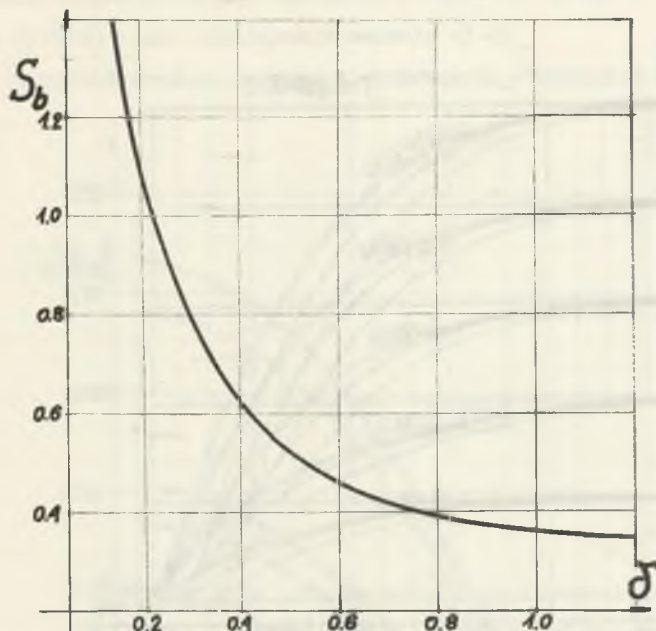
$$k = 1 - \phi_b^4.$$

Temperatura  $\phi_b$  określona jest równaniem (3.4), podstawiając więc równanie (3.7) do (3.4), a to z kolei do (3.6) otrzymamy ostatecznie

$$k - 1 + [\phi_1 + (Z) k S_b]^4 = 0. \quad (3.9)$$

Należy więc wpiery z równania (3.9) wyliczyć wielkość  $k(\phi_1, (Z), \delta)$ , a następnie można określić z równania (3.7) bezwymiarowy strumień ciepła  $(W)_b$ .





Rys. 5. Suma szeregu  $S_b$  określająca średnią temperaturę w układzie

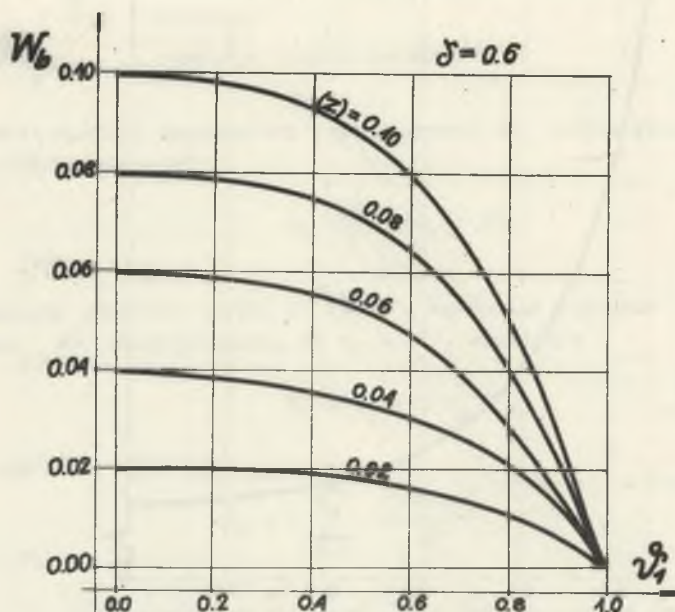
Równanie (3.9) jest wygodniejsze do rozwiązywania w stosunku do równania (3.6), gdyż w równaniu (3.9) bardzo łatwo zlokalizować pierwiastek  $k$ , dla dowolnych wartości  $\delta > 0$ ,  $(Z) > 0$  oraz  $0 \leq \phi_1 < 1$ , interesująca nas wartość pierwiastka  $k$  zawsze znajduje się w przedziale  $0 < k < 1$ , podczas gdy  $(W)_b > 0$  i rozwiązanie równania (3.6) wprost, jest bardziej pracochłonne.

Średnia wartość  $(W)_b$  jest więc zależna od liczby  $(Z)$ , simpleksu temperatur  $\phi_1$  oraz zredukowanej grubości płetwy  $\delta$  - rys. 6. Po określeniu wielkości  $(W)_b$  można następnie wyznaczyć z równania (2.49) średnią temperaturę  $\phi_m$  płetwy oraz z równania (2.39) temperaturę  $\phi_{max}$  maksymalną w obszarze przekroju płetwy, jako funkcja parametrów  $(Z)$ ,  $\phi_1$ ,  $\delta$ .

Celem znalezienia dokładniejszego rozwiązania należy obecnie wyznaczyć funkcję  $w(\xi)$  z równania

$$w(\xi) = (Z) \left[ 1 - \phi^4(\xi, \delta) \right]. \quad (3.10)$$

Wykorzystując równanie (2.37) oraz obliczone wartości  $(W)_b$  według równania (3.6).



Rys. 6. Średni zredukowany strumień ciepła  $(W)_b$

Przedstawiając dalej wyrażenie (3.10) w formie (2.29) możemy z równania (2.30) określić nowe poprawione współczynniki  $G_n$  rozwiązania ogólnego (2.25) oraz interesujące nas pozostałe parametry.

### 3.2. Przykład obliczeniowy

Dla ulustracji metody wykonano obliczenia dla następujących danych:

$$(z) = 0,1 \quad \psi_1 = 0,2 \quad \delta = 0,6.$$

Do obliczeń przyjęto skończoną ilość (dziesięć) wyrazów szeregu (2.29)  $i = 0,1,2,\dots,9$ . Średnią wartość zredukowanego strumienia ciepła  $(W)_m$  określano z równania

$$(W)_m = \int_0^1 W(\xi) d\xi,$$

zaś po uwzględnieniu zapisu (2.29) otrzymujemy

$$(W)_m = \sum_{i=0}^9 \frac{a_i}{1+i}. \quad (3.11)$$

Dla takich danych otrzymano następujące wartości wyrażeń:

$$K_0 = 0,98639 \text{ jako rozwiązanie zadania (3.9)}$$

$$W_b = 0,098639 \text{ średnia wartość zredukowanego strumienia ciepła,}$$

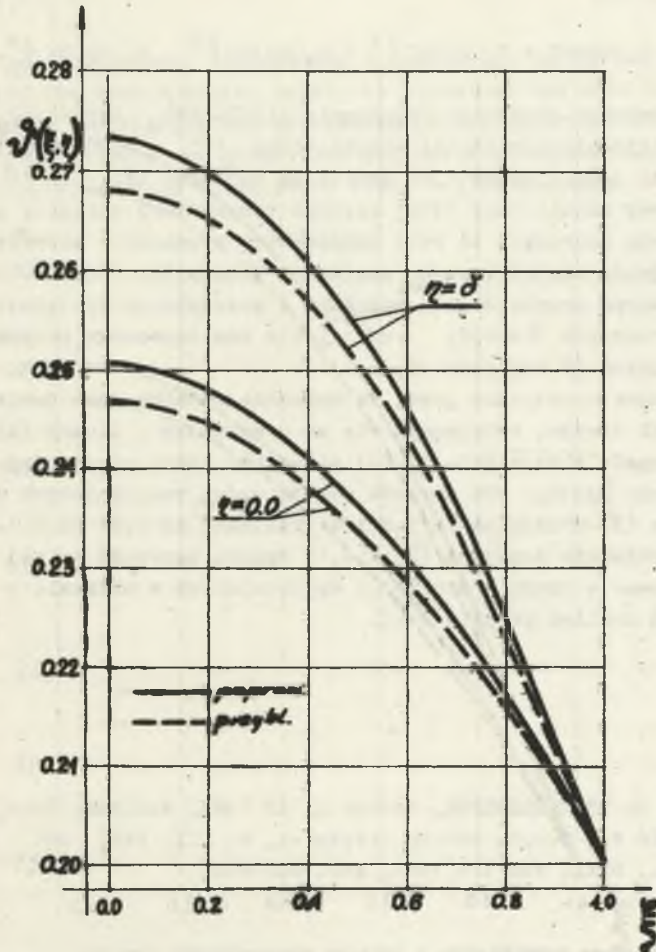


Fig. 7. Przykładowy rozkład temperatury w płycie

Współczynniki rozwinięcia strumienia  $W(\xi, \delta)$  w szereg

$$a_0 = 0,099482$$

$$a_1 = 0,0$$

$$a_2 = 0,000597$$

$$a_3 = - 0,000160$$

$$a_4 = - 0,000034,$$

przy czym dalsze zostały pominięte jako bardzo małe. Funkcja  $W(\xi, \delta)$  przybiera więc postać

$$W(\xi, \delta) = 0,099482 + 0,000597 \xi^2 - 0,000160 \xi^3 - 0,000034 \xi^4. \quad (3.12)$$

Poprawiona wartość średniego strumienia ciepła  $(W)_m$  określona wzorem (3.11) z uwzględnieniem (3.12) wynosi teraz  $(W)_m = 0,099963$ , co oznacza, że wartość ta jest o około 1,6% wyższa od wartości  $(W)_0$ .

Przykładowy analizowany tutaj rozkład temperatury pokazany jest na rys. 7. Należy zauważyć, że pole temperatury wyznaczone pierwszym przybliżeniem przyjmuje wartości nieco zaniżone. Maksymalna różnica temperatury między pierwszym przybliżeniem rozkładu a poprawionym występuje w punkcie o współrzędnych  $\xi = 0,0$ ;  $\eta = \delta$  i dla analizowanego przypadku różnica ta jest rzędu 2% względem  $\theta_1$ .

Cechą charakterystyczną jest, że pokazane różnice pola temperatury oraz strumieni ciepła, zwiększają się ze wzrostem liczby  $(Z)$ . Niezbędna ilość wyrazów rozwinięcia (2.29) winna być wtedy odpowiednio większa.

Praktycznie biorąc dla ekranów membranowych rzeczywistych komór kotłowych, liczba  $(Z)$  przyjmuje wartości w granicach od 0,01 do 0,1. W analizowanym przykładzie przyjęto  $(Z) = 0,1$ . Wyniki uzyskane na tej podstawie mogą informować o rzędzie wielkości występujących w układzie o maksymalnych błędach analizy przybliżonej.

#### LITERATURA

1. Advances in HEAT TRANSFER, Volume I, AP 1964, Academic Pres, New York,
2. OCHĘDUSZKO S., Teoria maszyn cieplnych, t. III, PWT, 1961,
3. HOEGER R., Mitl. VGB 111 1967, str. 402-410.

#### ТЕПЛОСЕМН И ПОЛЕ ТЕМПЕРАТУР В РЕБРАХ МЕМБРАННОГО ЭКРАНА

#### Резюме

В статье определено двумерное поле температуры в ребрах мембранного экрана, обменивающего тепло излучением.

Проблема решена с нелинейными краевыми условиями, связанными с теплообменным излучением. Определено тоже влияние температуры среды на тепловой ток и распределение температуры в плавнике мембранного экрана.

HEAT TRANSFER AND THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN THE  
MEMBRANOUS SCREEN FINS

S u m m a r y

The two-dimensional temperature distribution in the membranous screen fin, with the heat transfer mainly by radiation has been determined.

A method for solving the Fourier-Kirchhoff equation with the nonlinear boundary conditions was given. The influence of flames temperature on the heat transfer and the temperature field was considered.