

Zbigniew Raczek  
Instytut Matematyki

ANALIZA STATECZNOŚCI CIEPLNEJ PRZEGRÓD WIELOWARSTWOWYCH  
NA PODSTAWIE WYBRANYCH PRZYKŁADÓW

Streszczenie. W pracy wskazano na możliwości zwiększenia stateczności cieplnej przegród budowlanych poprzez odpowiedni dobór kolejności warstw w złożonej ścianie osłonowej. Uzasadniono konieczność przeprowadzenia bardziej dokładnego obliczania stateczności cieplnej przy projektowaniu przegród typowych i podano przykłady liczbowe pokazujące wpływ kolejności warstw na stateczność cieplną przegrody.

Oznaczenia

$c$  - ciepło właściwe, J/kg K

$i$  - jedność urojona,

$s = \sqrt{c \rho \lambda \omega}$  - współczynnik przyswajania ciepła, W/m<sup>2</sup>K

$k$  - współczynnik przenikania ciepła, W/m<sup>2</sup> K,

$R$  - grubość warstwy, m

$\alpha$  - współczynnik przejmowania ciepła, W/m<sup>2</sup> K

$\lambda$  - współczynnik przewodzenia ciepła, W/m K

$\nu$  - współczynnik tłumienia amplitudy fali temperatury,

$\rho$  - gęstość, kg/m<sup>3</sup>

$\tau$  - czas, s

$\omega$  - częstotliwość kątowna fali temperatury, 1/s.

Indeksy:

$o$  - dotyczy powierzchni wewnętrznej przegrody,

$k$  - dotyczy  $k$ -tej warstwy przegrody,

$n$  - dotyczy zewnętrznej warstwy przegrody.

1. Wstęp

Podstawowe pojęcia dotyczące stateczności cieplnej ścian osłonowych przedstawione są w pracy [1]. Jak później wykazano [2], część rozumowania tej pracy dotycząca przegród wielowarstwowych okazała się niepoprawna.

W sposób prawidłowy zagadnienie to zostało rozwiązane w pracy [3]. Niestety, rozważania zawarte w tej pracy mają charakter czysto teoretyczny i nie odwołują się do jakichkolwiek przykładów liczbowych. Dlatego też odpowiedź na pytanie czy wpływ kolejności warstw na stateczność cieplną

przegrody złożonej ma sens praktyczny - pozostała sprawą otwartą. Celem niniejszego opracowania jest uzupełnienie tej luki.

Należy podkreślić, że samo zjawisko niustalonego przenikania ciepła przez przegrody budowlane jest bardziej bogate, aniżeli przedstawiony tutaj model matematyczny. Tym niemniej nawet analiza zubożonego w stosunku do rzeczywistości fizycznej modelu matematycznego może być podstawą do wysunięcia całego szeregu wniosków praktycznych.

## 2. Przedstawienie schematu obliczeń

Ściana osłonowa będzie tym bardziej stateczna pod względem cieplnym, im mniejsze będą wahania temperatury na jej powierzchni wewnętrznej. Stateczność cieplną ściany określać możemy za pomocą stosunku amplitudy fali temperatury w otoczeniu do amplitudy fali temperatury na powierzchni wewnętrznej przegrody. Stosunek ten nazywamy współczynnikiem tłumienia fali temperatury. Należy zatem dążyć do tego, żeby wartość współczynnika tłumienia fali była jak największa. Okazuje się [3], że można dobrać taką kolejność warstw w przegrodzie, dla której współczynnik ten będzie miał największą wartość.

Wraz ze zmianą usytuowania warstw w ścianie osłonowej zmienia się także wartość przesunięcia fali temperatury, to znaczy czasu, który upłynie od pojawienia się maksymalnej wartości temperatury w otoczeniu do chwili pojawienia się maksimum na powierzchni wewnętrznej ściany osłonowej. W podanych dalej przykładach wyznaczać będziemy i tę wielkość.

Przedstawiony w niniejszym punkcie schemat obliczeń opiera się na następujących, ogólnie przyjętych założeniach:

- 1) temperatura powietrza w otoczeniu zmienia się sinusoidalnie w ciągu doby [1],
- 2) stałe są wartości współczynników przejmowania ciepła po obu stronach przegrody,
- 3) na styku dwu warstw ściany złożonej nie występują opory cieplne,
- 4) ruch ciepła jest jednokierunkowy,
- 5) temperatura wewnątrz pomieszczenia nie zmienia się w czasie.

Po uwzględnieniu tych założeń współczynnik tłumienia amplitudy fali temperatury oraz przesunięcie fazy tej fali w wielowarstwowej ścianie osłonowej wyznaczyć możemy w zależności [3]

$$v = \sqrt{M^2 + N^2} \quad (1)$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arctg \frac{N}{M}, \quad (2)$$

gdzie

$$M = D_R + G_R \frac{\alpha_0}{\alpha_n} + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} (E_R + E_1) + \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2}} (P_R - P_1) \quad (3)$$

$$N = D_1 + G_1 \frac{\alpha_0}{\alpha_n} + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} (E_1 + E_R) + \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2}} (P_R + P_1), \quad (4)$$

a wielkości  $D_R, D_1, E_R, E_1, P_R, P_1, G_R, G_1$  są odpowiednio częściami rzeczywistymi i urojonymi elementów macierzy powstałej z prawostronnego pomnożenia  $n$  macierzy, z których każda reprezentuje jedną warstwę przegrody złożonej

$$\begin{bmatrix} D_R + iD_1 & E_R + iE_1 \\ F_R + F_1 & G_R + iG_1 \end{bmatrix} = \prod_{k=n}^1 \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \frac{R_k s_k}{\lambda_k} \sqrt{i} & \frac{1}{s_k} \operatorname{sh} \frac{R_k s_k}{\lambda_k} \sqrt{i} \\ s_k \operatorname{sh} \frac{R_k s_k}{\lambda_k} \sqrt{i} & \operatorname{ch} \frac{R_k s_k}{\lambda_k} \sqrt{i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

W celu przeprowadzenia obliczeń numerycznych wygodniej jest przedstawić funkcje hiperboliczne występujące w elementach macierzy prawej strony równania (5) jako liczby zespolone w postaci algebraicznej

$$\operatorname{ch} \frac{R_k s_k}{\lambda_k} \sqrt{i} = \operatorname{ch} \frac{R_k s_k}{\lambda_k \sqrt{2}} \cos \frac{R_k s_k}{\lambda_k \sqrt{2}} + i \operatorname{sh} \frac{R_k s_k}{\lambda_k \sqrt{2}} \sin \frac{R_k s_k}{\lambda_k \sqrt{2}} \quad (6)$$

$$\operatorname{sh} \frac{R_k s_k}{\lambda_k} \sqrt{i} = \operatorname{sh} \frac{R_k s_k}{\lambda_k \sqrt{2}} \cos \frac{R_k s_k}{\lambda_k \sqrt{2}} + i \operatorname{ch} \frac{R_k s_k}{\lambda_k \sqrt{2}} \sin \frac{R_k s_k}{\lambda_k \sqrt{2}} \quad (7)$$

Schemat (1 ÷ 7) był podstawą obliczeń dla przykładów omawianych w następujących punktach.

### 3. Przykład analizy stateczności cieplnej dla przegrody dwuwarstwowej

Dana jest przegroda dwuwarstwowa o łącznej grubości obu warstw równej 20 cm. Materiałem warstwy pierwszej jest beton z kruszywem kamiennym ( $S = 14,5 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ ,  $\lambda = 1,45 \text{ W/m K}$ ).

Warstwa druga zbudowana jest z betonu z żużlem granulowanym ( $s = 4,19 \text{ W/m K}$ ,  $\lambda = 0,32 \text{ W/m K}$ ).

Należy przeprowadzić analizę przenikania ciepła i stateczności cieplnej tej przegrody przy założeniu, że jej całkowita grubość pozostanie nie-



zmieniona, natomiast zmienne są grubości poszczególnych jej warstw. Współczynniki przejmowania ciepła wynoszą odpowiednio

$$\alpha_0 = 8,1 \text{ W/m}^2 \text{ K}, \quad \alpha_n = 23 \text{ W/m}^2 \text{ K}.$$

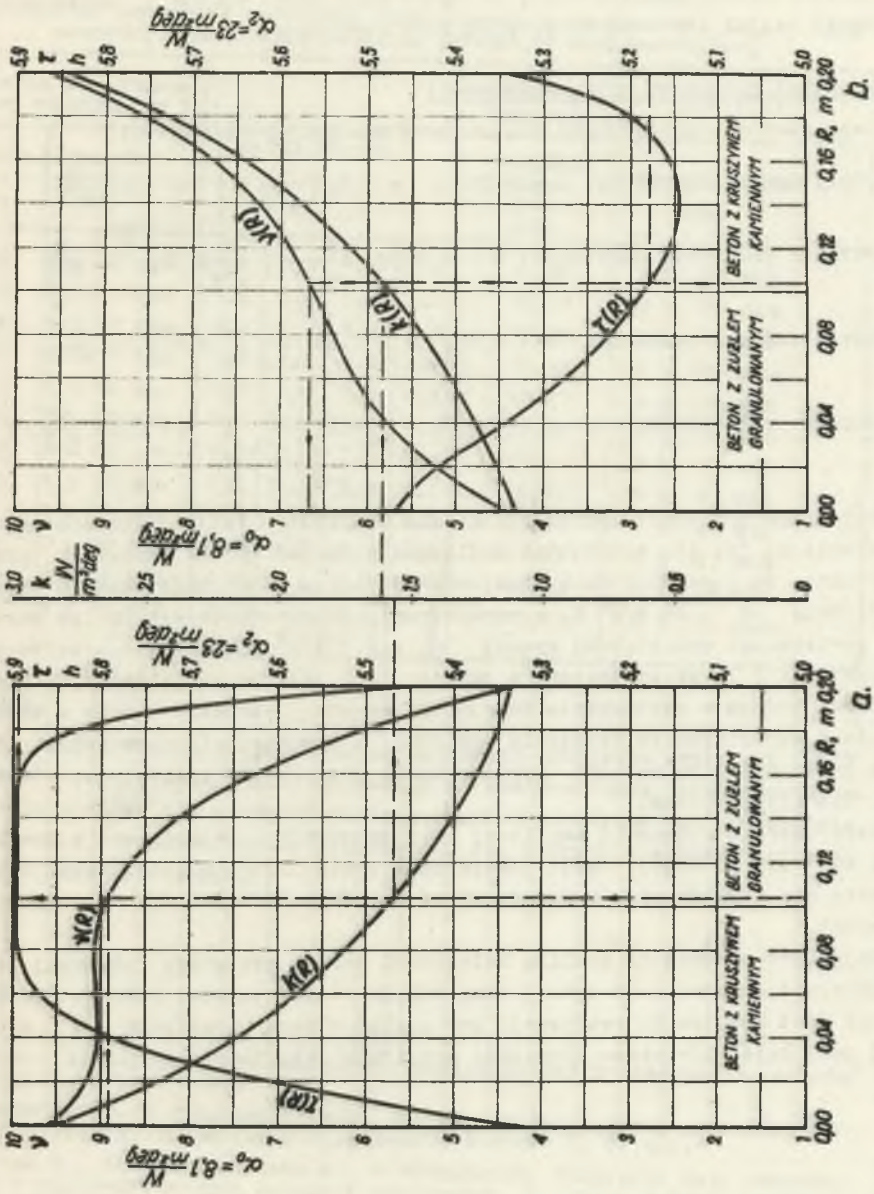
Analizę przedstawionego zagadnienia wykonano na podstawie schematu obliczeniowego (1 ÷ 7) i przedstawiono na rysunkach 1a i 1b. Na odciętych zaznaczono grubość warstwy przegrody złożonej znajdującej się po stronie wewnętrznej. Oś rzędnych zawiera trzy skale: współczynnika tłumienia amplitudy fali temperatury, przesunięcia fazy fali oraz współczynnika przenikania ciepła.

Wartości  $\nu(R)$ ,  $\tau(R)$  oraz  $k(R)$  dla odciętej 0,04 m na wykresach 1 przedstawiają odpowiednio współczynnik tłumienia, przesunięcia fazy oraz współczynnik przenikania ciepła dla przypadku, kiedy grubość warstwy wewnętrznej wynosi 0,04 m, zaś grubość warstwy zewnętrznej jest równa 0,16 m. Odcięta  $R = 0$  oznacza, że grubość warstwy wewnętrznej jest równa zero, że mamy do czynienia z przegrodą jedno-warstwową o grubości 0,2 m zbudowaną z materiału warstwy zewnętrznej. I analogicznie: odcięta  $R = 0,2$  oznacza, że mamy do czynienia z przegrodą jednowarstwową o grubości 0,2 m zbudowaną z materiału warstwy wewnętrznej. Rysunek 1-a opracowano dla wariantu, w którym po stronie wewnętrznej mamy warstwę zbudowaną z betonu z kruszywem kamiennym, natomiast po stronie napływu fali warstwę zbudowaną z betonu z żużlem granulowanym. Rysunek 1b przedstawia sytuację odwrotną: warstwa wewnętrzna zbudowana jest z betonu z żużlem granulowanym, natomiast warstwa zewnętrzna - z betonu z kruszywem kamiennym.

Jak łatwo jest zauważyć, wykresy te nie są względem siebie symetryczne, co oznacza że przepływ fal temperatury jest uzależniony od kolejności warstw w przegrodzie. Symetryczny jest jedynie wykres współczynnika przenikania ciepła  $k(R)$ , co jest zupełnie zrozumiałe, bo wartość tego współczynnika nie zależy od kolejności warstw w przegrodzie złożonej.

Z porównania rysunków 1a i 1b wynika, że ze względu na stateczność cieplną przegrody korzystniejszy jest układ, w którym warstwę wewnętrzną stanowi beton z kruszywem kamiennym, zaś warstwę zewnętrzną - beton z żużlem granulowanym.

Przy grubości warstw równej 0,1 m przy układzie warstw jak na rysunku 1a współczynnik tłumienia wynosi 9, podczas gdy przy usytuowaniu odwrotnym jest on równy 5,5. Należy dodać, że w warstwach zbudowanych z materiałów o skrajnie różnych własnościach cieplnych wpływ kolejności warstw na współczynnik tłumienia jest jeszcze większy. I tak np. dla warstwy złożonej ze styropianu ( $s = 0,32$ ,  $\lambda = 0,046$ ,  $R = 0,05$ ) po stronie zewnętrznej i betonu z kruszywem kamiennym (warstwa wewnętrzna  $R = 0,10$ ,  $\lambda = 1,45$ ) współczynnik tłumienia jest równy  $\nu = 22,6$  przy wartości



Rys. 1. Przykład analizy stateczności cieplnej dla przegrody dwuwarstwowej

przesunięcia fazy wynoszącej 4 godziny 47 minut. Przy odwrotnym ustawieniu warstw współczynnik tłumienia wynosi  $\nu = 14,5$  a przesunięcie fazy 3 godziny 28 minut. Widzimy więc, że wpływ kolejności warstw w przegrodzie złożonej na jej stateczność cieplną jest dość duży.

#### 4. Przykład przegrody czterowarstwowej

Dana jest ściana osłonowa zbudowana z następujących warstw:

- A. Płyta azbestocementowa:  $R = 0,05 \text{ m}$ ;  $s = 9,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ ;  $\lambda = 0,82 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$
- B. Beton z kruszywem kamiennym:  $R = 0,010 \text{ m}$ ;  $s = 4,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ ;  $\lambda = 1,4 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$
- C. Płyta wiórowo-cementowa:  $R = 0,05$ ;  $s = 3,84 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ ;  $\lambda = 0,14 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$
- D. Zaprawa żuźlowo-cementowa:  $R = 0,02$ ;  $s = 7,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ ;  $\lambda = 0,64 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$ .

Należy wyznaczyć współczynniki tłumienia amplitudy fali temperatury i przesunięcia faz dla wszystkich możliwych połączeń warstw przegrody przy założeniu, że współczynnik przejmowania ciepła po stronie napływu fali jest równy  $\alpha_m = 28 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , a współczynnik przejmowania ciepła po stronie powierzchni wewnętrznej wynosi  $\alpha_b = 8,1 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Wyniki obliczeń schematu (1 ÷ 7) przedstawiono w tabelicy 1. Z tabelicy tej widać wyraźnie, że każda zmiana w usytuowaniu kolejności warstw powoduje zmiany w wielkościach współczynnika tłumienia amplitudy i przesunięcia fazy fali. Należy podkreślić, że wartość współczynnika przenikania ciepła zostanie przy tym niezmienną.

Współczynnik tłumienia amplitudy fali temperatury zmienia się w granicach od 11,93 do 19,59, czyli prawie dwukrotnie. Przesunięcie fazy fali zmienia się w krańcowych przypadkach od 7 godzin 43 minut - do 8 godzin 43 minut.

Mając przeprowadzoną analizę kolejności warstw przegrody złożonej jak w tabelicy 1 - łatwo jest wybrać taką kolejność jej warstw, która z jednej strony jest możliwa do realizacji pod względem technologicznym - z drugiej zaś, daje największe tłumienie amplitudy fali temperatury.



Tablica 1

Współczynniki tłumienia amplitudy fali przesunięcia fazy tej fali dla wszystkich możliwych połączeń przegrody wielowarstwowej

Warstwą zewnętrzną jest warstwa nr 1		Kolejność usytuowania warstw				Warstwą zewnętrzną jest warstwa nr 4	
Współcz. tłum. ampl.	Przesunięcie fazy					Współcz. tłum. ampl.	Przesunięcie fazy
13,35	8 h 20 min	1.A	2.B	3.C	4.D	17,92	8 h 00 min
14,24	7 h 41 min	1.A	2.B	3.D	4.C	18,77	8 h 00 min
15,93	8 h 12 min	1.A	2.C	3.B	4.D	15,93	8 h 11 min
12,25	8 h 34 min	1.B	2.A	3.D	4.D	17,46	8 h 06 min
12,27	8 h 12 min	1.B	2.C	3.D	4.A	12,27	8 h 18 min
12,00	8 h 05 min	1.B	2.D	3.C	4.A	14,90	8 h 12 min
19,32	8 h 06 min	1.C	2.B	3.D	4.A	15,21	7 h 47 min
17,58	8 h 11 min	1.C	2.A	3.D	4.B	12,42	8 h 39 min
19,59	8 h 01 min	1.C	2.B	3.A	4.D	15,57	7 h 47 min
16,16	8 h 04 min	1.D	2.C	3.A	4.B	11,93	7 h 43 min
14,99	8 h 25 min	1.D	2.A	3.C	4.B	14,99	8 h 25 min
13,89	8 h 34 min	1.D	2.B	3.A	4.C	16,61	8 h 02 min

## 5. Wnioski

Fakt, że w podanych przykładach współczynnik tłumienia amplitudy fali zmienia się prawie dwukrotnie, przemawia za koniecznością prowadzenia tego rodzaju analizy dla przegród wielowarstwowych. Dotyczy to szczególnie projektowania typowych ścian osłonowych, dla których niezbędne są bardziej dokładne obliczenia.

## LITERATURA

1. Szkłower A.M - *Tiepłopieredacza pri periodiczeskich tiepłowych wozdijstwiach*, Moskwa 1961.
2. Tiemkin A.G. - *O tiepłopieredaczi czeres ogroždajuszczije stroitelnyje konstrukcji*, "Inżenierno fiziczeskij żurnał" No 6/1962.
3. Tomczak W., Bulzak-Mrozowska L., - *Wyznaczenie tłumienia fali temperatury w wielowarstwowych ścianach osłonowych*, Archiwum Budowy Maszyn, nr 1/1969.

## АНАЛИЗ ТЕПЛОУСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЕННЫХ ПЕРЕГОРОДОК НА ОСНОВЕ ИЗБРАННЫХ ПРИМЕРОВ

### Р а з и м е

В работе указаны возможности увеличения тепловой устойчивости строительных перегородок через соответствующий подбор последовательности слоёв в составной ограждающей стене.

Обоснована необходимость проведения более точного вычисления тепловой устойчивости при проектировании типовых перегородок и приведены примеры в числах, указывающие влияние последовательности слоёв на тепловую устойчивость преграды.

## ANALYSIS OF THERMAL STABILITY OF MULTILAYER WALLS ON THE GROUND OF SELECTED EXAMPLES

### S u m m a r y

The paper points out possibilities of increasing the thermal stability of partition walls by applying the successive layers of a composite screen wall in the right order. Reasons were given to demonstrate the necessity of a more accurate computation of thermal stability in the design of standard partitions, and numerical examples show that the thermal stability of the partition is influenced by the order of the layers.