

Jan Składzień

Instytut Techniki Ciepłej  
Politechniki Śląskiej

UPROSZCZONY MODEL MATEMATYCZNY  
PODGRZEWANIA WŁÓMU STRUGĄ SPALIN

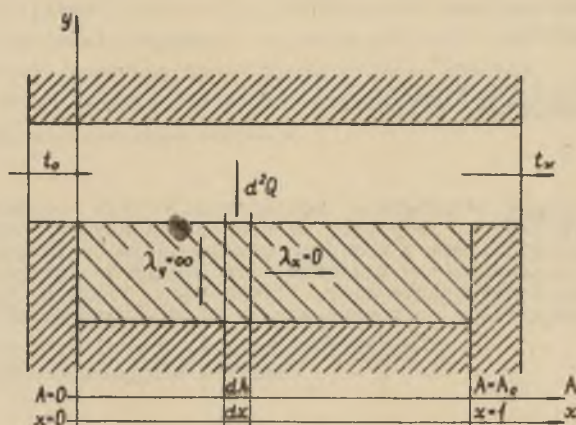
**Streszczenie.** W artykule rozpatrzono proces nagrzewania ciała stałego przez płyn. Przyjęto, że opór przewodzenia ciepła w nagrzewanej substancji jest w kierunku prostopadłym do kierunku przepływu płynu równy zero, zaś w kierunku równoległym do przepływu czynnika grzejącego nieskończenie duży. Przykładem takiego zjawiska jest wstępne nagrzewanie za pomocą spalin niewielkich kawałków wsadu metalowego.

### 1. Wstęp

Problem rozpatrywany w niniejszej pracy pojawił się przy analizie procesu wstępnego podgrzewania wsadu w piecu elektrycznym. W celu zaoszczędzenia energii elektrycznej oraz skrócenia czasu wytopu celowe jest podgrzewanie wsadu najpierw za pomocą palników gazowych, a dopiero potem przy użyciu łuku elektrycznego. W czasie nagrzewania palnikami gorące spaliny przepływają poprzez kolejne warstwy wsadu oddając mu określoną ilość ciepła. Przekazywanie ciepła odbywa się głównie na drodze konwekcji. Promieniowanie spalin można na ogół zaniedbać, gdyż udziały gazów trójatomowych w spalinach nie są zbyt duże oraz grubość warstwy spalin jest stosunkowo niewielka. Przy niezbyt wysokiej temperaturze podgrzania wsadu przepływ ciepła pomiędzy jego poszczególnymi kawałkami na drodze promieniowania jest również niewielki, zwłaszcza że temperatury poszczególnych elementów są zbliżone, przy równomiernym omywaniu wsadu przez spaliny. Ponieważ powierzchnie styku pomiędzy kawałkami metalu są zwykle bardzo małe, więc można przyjąć, że ciepło pochłonięte przez dany element, i równe spadkowi entalpii spalin, zostanie zużyte w całości na podniesienie jego temperatury. Ponieważ opór wnikania ciepła jest kilkaset razy większy od oporu przewodzenia, można z dużą dokładnością przyjąć, że temperatura w każdym punkcie dowolnego kawałka wsadu jest taka sama, różna dla różnych kawałków. Powyższe rozważania uzasadniają przyjęcie przedstawionego poniżej modelu.

## 2. Równania bilansu energii

Aby określić temperatury wsadu i spalin, które są funkcją położenia i czasu, należy ułożyć równania bilansu energii dla obu tych substancji. Schemat procesu wymiany ciepła w modelowym wymienniku przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Model teoretyczny rozpatrywanego wymiennika ciepła

Czynnik grzejący (np. spaliny) o temperaturze przy dopływie  $t_0$  ogrzewa ciało stałe o temperaturze początkowej  $\psi_0$ . Współczynnik przewodzenia ciepła w kierunku równoległym do kierunku przepływu spalin jest równy 0, zaś w kierunku poprzecznym do niego nieskończenie wielki. Przyjmując, że przepływ ciepła odbywa się jedynie na drodze konwekcji oraz pomijając straty ciepła na rzecz otoczenia, otrzymuje się następujące równania określające elementarną porcję energii  $d^2Q$  oddaną przez płyn w czasie  $d\tau$  na powierzchni  $dA$ :

$$\left. \begin{aligned} d^2Q &= \alpha(t - \psi) dA d\tau \\ d^2Q &= \dot{m}_{sp} c_p sp d\tau (-dt) \\ d^2Q &= \dot{m}_w c_p w \frac{dA}{A_0} d\psi \end{aligned} \right\} (1)$$

gdzie:

- $\alpha$  - współczynnik wnikania ciepła,
- $t$  - temperatura płynu grzejącego,
- $\psi$  - temperatura ogrzewanego ciała stałego,

- $\dot{m}_{sp} c_{p\ sp}$  - pojemność cieplna strugi płynu,  
 $\dot{m}_w c_{p\ w}$  - pojemność cieplna ciała stałego,  
 $A_0$  - całkowita powierzchnia przepływu ciepła.

Po przekształceniu równań (1) otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\alpha A_0}{\dot{m}_w c_{p\ w}} (t - v) \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= - \frac{\alpha}{\dot{m}_{sp} c_{p\ sp}} (t - v) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Przy obliczeniach cieplnych bardzo wygodne jest korzystanie z wielkości bezwymiarowych. Wprowadzenie ich pozwala uogólnić wyniki otrzymane bądź z obliczeń, bądź z doświadczeń. Skracca się również niejednokrotnie czas obliczeń numerycznych, gdyż przy takiej zmianie parametrów, przy której bezwymiarowe stałe nie ulegają zmianie, wyniki otrzymane w postaci bezwymiarowej również pozostają niezmienione. Przed rozwiązaniem układu równań różniczkowych cząstkowych (2) wygodnie jest wprowadzić bezwymiarowe temperatury, zmienne niezależne oraz stałe określone zależnościami:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{v - v_0}{t_0 - v_0}; & T &= \frac{t - v_0}{t_0 - v_0} \\ dr &= \frac{dt}{\tau_0}; & dx &= \frac{dA}{A_0} \\ a &= \frac{\alpha A_0 \tau_0}{\dot{m}_w c_{p\ w}}; & b &= \frac{\alpha A_0}{\dot{m}_{sp} c_{p\ sp}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

We wzorach powyższych początkowa temperatura wsadu  $v_0$  jest najniższą temperaturą w układzie, zaś temperatura płynu przy dopływie  $t_0$  najwyższą. Bezwymiarowe temperatury  $\theta = \theta(r, x)$  i  $T = T(r, x)$  będą więc przyjmowały wartości w granicach  $0 \div 1$ ,  $r$  jest bezwymiarowym czasem,  $x$  - bezwymiarową powierzchnią,  $\tau_0$  - czasem trwania procesu nagrzewania, zaś  $a$  i  $b$  - wielkościami charakterystycznymi dla danego procesu; łatwo sprawdzić, że wielkości  $a$  i  $b$  są bezwymiarowe. Po wykorzystaniu zależności (3) równania (2) przyjmują postać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial T} &= a(T - \theta) \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= - b(T - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Warunki początkowo-brzegowe dla układu (4) są następujące:

$$\theta \Big|_{r=0} = 0; \quad T \Big|_{x=0} = 1 \quad (5)$$

W następnym punkcie zostanie podane rozwiązanie układu równań (4) przy założeniu stałości wielkości  $a$  i  $b$ . Zakłada się zatem stałość współczynnika wnikania ciepła oraz pojemności cieplnych strumienia płynu i ogrzewanego ciała stałego.

### 3. Rozwiązanie równań bilansu energii. Obliczenie temperatur średnich

Równania różniczkowe (4) można przedstawić w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial r} + a \theta &= a T \\ \frac{\partial T}{\partial x} + b T &= b \theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Równania (6) można zaś sprowadzić po wykorzystaniu warunków (5) do równań całkowych:

$$\theta(r, x) = a e^{-ar} \int_0^r T(r, x) e^{ar} dr \quad (7)$$

$$T(r, x) = e^{-bx} \left[ 1 + b \int_0^x \theta(r, x) e^{bx} dx \right] \quad (8)$$

Podstawiając równanie (7) do (8) lub odwrotnie otrzymuje się równanie zawierające tylko jedną niewiadomą funkcję  $T$  lub  $\theta$ . Po wyrugowaniu  $\theta$  otrzymuje się:

$$T(r, x) = e^{-bx} \left[ 1 + a b e^{-ar} \int_0^x e^{bx} dx \int_0^r T(r, x) e^{ar} dr \right] \quad (9)$$

Równanie (9) można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń. Przyjmując jako zerowe przybliżenie funkcję  $e^{-bx}$  otrzymuje się kolejno następujące przybliżenia:

$$\left. \begin{aligned} T^0 &= e^{-bx} \\ T^1 &= T^0 + \frac{1}{1!} bxe^{-bx}(1 - e^{-ar}) \\ T^2 &= T^1 + \frac{1}{2!} b^2x^2e^{-bx}(1 - e^{-ar} - \frac{1}{1!} are^{-ar}) \\ T^3 &= T^2 + \frac{1}{3!} b^3x^3e^{-bx}(1 - e^{-ar} - \frac{1}{1!} are^{-ar} - \\ &\quad - \frac{1}{2!} a^2r^2e^{-ar}) \\ T^4 &= T^3 + \frac{1}{4!} b^4x^4e^{-bx}(1 - e^{-ar} - \frac{1}{1!} are^{-ar} - \\ &\quad - \frac{1}{2!} a^2r^2e^{-ar} - \frac{1}{3!} a^3r^3e^{-ar}) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ogólnie:

$$T^n = T^{n-1} + \frac{1}{n!} b^n x^n e^{-bx} \left[ 1 - e^{-ar} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(ar)^i}{i!} \right] \quad (10a)$$

Rozwiązanie równania (9) ma zatem postać:

$$T = e^{-bx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bx)^n}{n!} \left[ 1 - e^{-ar} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(ar)^i}{i!} \right] \quad (11)$$

Po podstawieniu zależności (11) do równania (7) otrzymuje się wyrażenie określające funkcję

$$\theta = e^{-bx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bx)^n}{n!} \left[ 1 - e^{-ar} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(ar)^i}{i!} \right] \quad (12)$$

Zależność (12) otrzymuje się również po podstawieniu (8) do (7) i po rozwiązaniu otrzymanego w ten sposób równania całkowego:

$$\theta(r, x) = e^{-bx} \left\{ 1 - e^{-ar} \left[ 1 - ab \int_0^x e^{ar} dr \int_0^x \theta(r, x) e^{bx} dx \right] \right\} \quad (13)$$

Rozwiązanie równania (13) metodą kolejnych przybliżeń daje następujące rezultaty:

$$\begin{aligned}
 \theta^0 &= e^{-bx} (1 - e^{-ar}) \\
 \theta^1 &= \theta^0 + \frac{1}{1!} bxe^{-bx} (1 - e^{-ar} - \frac{1}{1!} are^{-ar}) \\
 \theta^2 &= \theta^1 + \frac{1}{2!} b^2x^2e^{-bx} (1 - e^{-ar} - \frac{1}{1!} are^{-ar} - \frac{1}{2!} a^2r^2e^{-ar}) \\
 \theta^3 &= \theta^2 + \frac{1}{3!} b^3x^3e^{-bx} (1 - e^{-ar} - \frac{1}{1!} are^{-ar} - \\
 &\quad - \frac{1}{2!} a^2r^2e^{-ar} - \frac{1}{3!} a^3r^3e^{-ar}) \\
 \theta^4 &= \theta^3 + \frac{1}{4!} b^4x^4e^{-bx} (1 - e^{-ar} - \frac{1}{1!} are^{-ar} - \\
 &\quad - \frac{1}{2!} a^2r^2e^{-ar} - \frac{1}{3!} a^3r^3e^{-ar} - \frac{1}{4!} a^4r^4e^{-ar})
 \end{aligned} \tag{14}$$

Ogólnie:

$$\theta^n = \theta^{n-1} + \frac{1}{n!} b^n x^n e^{-bx} \left[ 1 - e^{-ar} \sum_{i=0}^n \frac{(ar)^i}{i!} \right] \tag{14a}$$

Średnią temperaturę ciała stałego po podgrzaniu ( $r = 1$ ) określa wzór:

$$\begin{aligned}
 \theta_{k \text{ sr}} &= \int_0^b e^{-bx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bx)^n}{n!} (1 - e^{-a} \sum_{i=0}^n \frac{a^i}{i!}) dx = \\
 &= \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (1 - e^{-a} \sum_{i=0}^n \frac{a^i}{i!}) \int_0^b e^{-z} z^n dz
 \end{aligned} \tag{15}$$

przy czym:

$$\begin{aligned}
 n = 0; \quad & \int_0^b e^{-z} z^n dz = 1 - e^{-b} \\
 n = 1, 2, \dots; \quad & \int_0^b e^{-z} z^n dz = n \int_0^b e^{-z} z^{n-1} dz - b^n e^{-b}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Średnią temperaturę płynu przy wypływie ( $x=1$ ) można wyznaczyć z zależności:

$$T_w \text{ \acute{s}r} = \int_0^1 \frac{1}{k=1} dr = e^{-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \left[ 1 - \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{n!} \int_0^a e^{-z} z^n dz \right] \quad (17)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} i = 0; \quad \int_0^a e^{-z} z^i dz &= 1 - e^{-a} \\ i = 1, 2, \dots; \quad \int_0^a e^{-z} z^i dz &= i \int_0^a e^{-z} z^{i-1} dz - a^i e^{-a} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Znając  $\theta_k \text{ \acute{s}r}$  można również obliczać temperaturę  $T_w \text{ \acute{s}r}$  bezpośrednio z bilansu energii:

$$(1 - T_w \text{ \acute{s}r}) \dot{m}_{sp} c_p \text{ sp } \tau_o = m_w c_{pw} \theta_k \text{ \acute{s}r} \quad (19)$$

a stąd:

$$T_w \text{ \acute{s}r} = 1 - \frac{b}{a} \theta_k \text{ \acute{s}r} \quad (20)$$

Po wyznaczeniu  $\theta_k \text{ \acute{s}r}$  i  $T_w \text{ \acute{s}r}$  można w prosty sposób wyznaczyć rzeczywiste temperatury średnie oraz ilość ciepła  $Q$  przekazanego przez płyn ciała stałego:

$$\left. \begin{aligned} v_k^* \text{ \acute{s}r} &= v_o^* + (t_o - v_o^*) \theta_k \text{ \acute{s}r} \\ t_w \text{ \acute{s}r} &= v_o^* + (t_o - v_o^*) T_w \text{ \acute{s}r} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$Q = m_w c_{pw} (v_k^* \text{ \acute{s}r} - v_o^*) = \dot{m}_{sp} c_p \text{ sp } \tau_o (t_o - t_w \text{ \acute{s}r}) \quad (22)$$

4. Przykłady liczbowe

a) Dla zilustrowania przeprowadzonych rozważań wykonano obliczenia cyfrowe dla konkretnego przypadku. Przyjęto:

$$\alpha = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ deg}}; \quad A_0 = 100 \text{ m}^2; \quad \tau_0 = 3000 \text{ s};$$

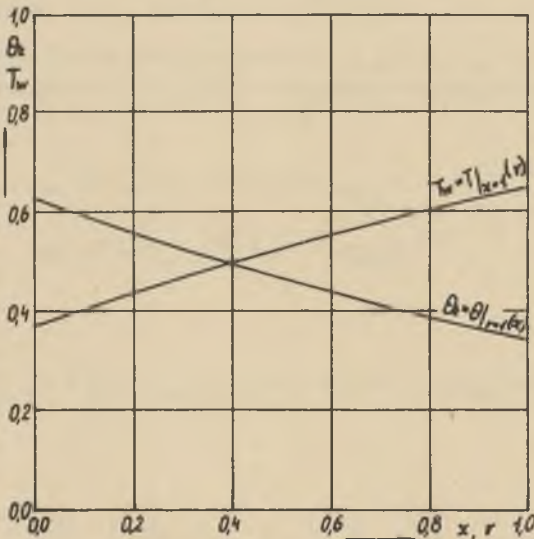
$$\dot{m}_{\text{sp}} c_{\text{p sp}} = 2000 \frac{\text{W}}{\text{deg}}; \quad m_{\text{w}} c_{\text{pw}} = 6000000 \frac{\text{J}}{\text{deg}}.$$

Wielkości powyższe są tego rzędu, jak w piecu elektrycznym ze wsadem podgrzewanym wstępnie za pomocą palników. Dla przyjętych danych bezwymiarowe stałe przyjmują postać:

$$a = 1; \quad b = 1$$

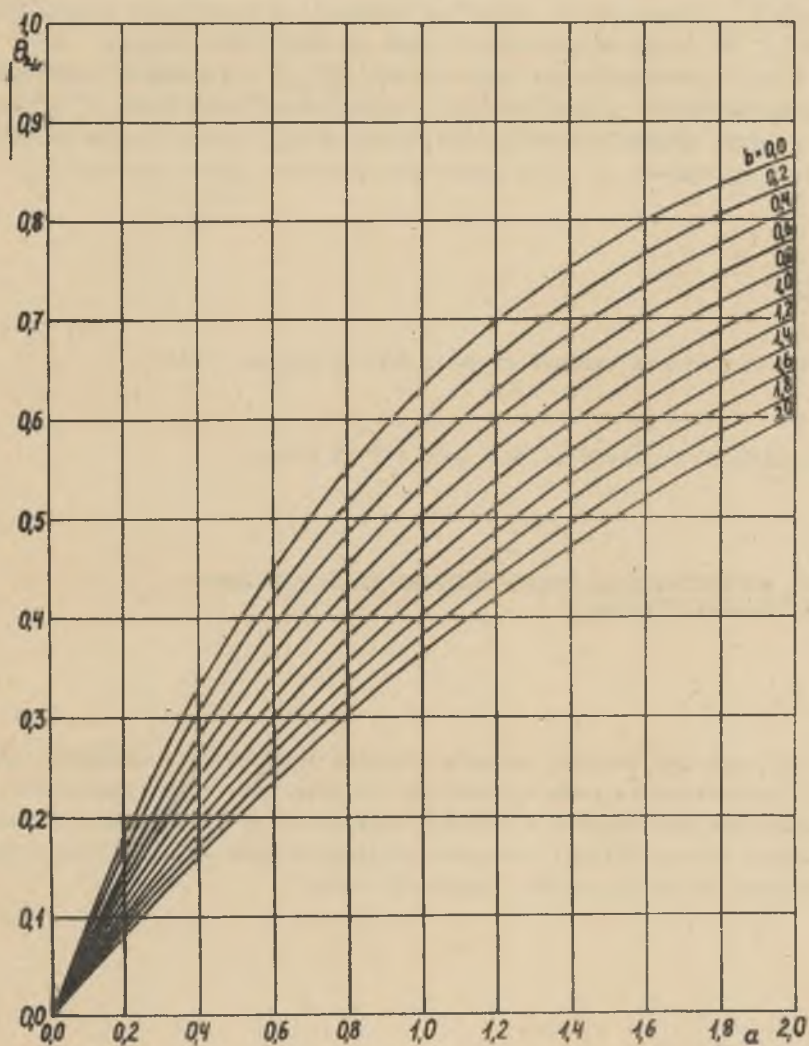
Przebieg temperatury spalin przy wypływie  $T(r, 1)$  oraz temperatury wsadu po podgrzaniu  $\theta(1, x)$  w funkcji wyrażonych bezwymiarowo odpowiednio: czasu i powierzchni bieżącej liczonej od wlotu spalin, pokazane są dla rozpatrywanego przypadku na rys. 2. Temperatury średnie wynoszą:

$$\theta_{\text{k śr}} = 0,47545; \quad T_{\text{w śr}} = 0,52455$$



Rys. 2. Wykresy charakterystycznych temperatur ( $a = b = 1$ )





Rys. 3. Wykresy zależności  $\theta_k \text{ sr} = \theta_k \text{ sr}(a, b)$

Obliczenie temperatur średnich jest stosunkowo proste za pomocą podanych zależności, gdyż szeregi określające te temperatury są szybko zbieżne do zera. W rozpatrywanym przykładzie liczbowym zaszła konieczność dokonania obliczeń jedynie czterech wyrazów, tzn. dla  $n$  równego 0, 1, 2 i 3.

b) Dla jedenastu wartości  $b = 0 \div 2$  wykonano obliczenia  $\theta_{k \text{ śr}}$  przy  $a$  zmiennym w granicach  $0 \div 2$ . Wyniki przedstawiono za pomocą wykresów  $\theta_{k \text{ śr}} = \theta_{k \text{ śr}}(a) |_{b=\text{idem}}$  na rys. 3. Mając do czynienia z konkretnym przypadkiem podgrzewania, np. wsadu metalowego, można po określeniu stałych  $a$  i  $b$  odczytać z rys. 3 bezwymiarową temperaturę  $\theta_{k \text{ śr}}$ , a następnie korzystając z zależności (20) można określić bezwymiarową temperaturę  $T_w \text{ śr}$ . Rzeczywiste średnie temperatury wsadu po zakończeniu procesu podgrzewania oraz spalin przy wpływie z pieca łatwo już wyznacza się ze wzorów (21).

#### LITERATURA

1. MADEJSKI J.: Teoria wymiany ciepła, PWN, Warszawa, 1963.

Praca wpłynęła do Redakcji w listopadzie 1973 roku

#### УПРОЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАГРЕВА ЖЕЛЕЗНОГО ЛОМА ПОТОКОМ ПРОДУКТОВ ГОРЕНИЯ

#### Р е з ю м е

В статье приведен процесс нагрева твердого тела потоком жидкости. Принято, что сопротивление теплопроводности нагреваемого тела равняется 0 в перпендикулярном направлении к течению жидкости и  $\infty$  в направлении течения. Примером такого явления является предварительный нагрев потоком продуктов горения небольших кусков железного лома.

THE SIMPLIFIED MATHEMATICAL MODEL  
OF HEATING OF THE METAL BLOCKS WITH  
THE HELP OF THE COMBUSTION PRODUCTS

S u m m a r y

In the paper there has been considered the problem of the heating of the solid body with the help of the fluid. It was assumed that the resistance of a heat conduction in the heated body is equal to 0 in the direction perpendicular to the flow of the fluid and  $\infty$  in the direction parallel to the flow. The example of such problem is the preheating of the small metal blocks with the help of the combustion products.