ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 129 Nr kol. 1474

Aleksander BACHMAN, Adam JANIAK, Janusz KOZŁOWSKI
Politechnika Wrocławska

JEDNOMASZYNOWY PROBLEM SZEREGOWANIA ZADAŃ CZASOWO ZALEŻNYCH PRZY KRYTERIUM MINIMALIZACJI SUMY OPÓŹNIEŃ

Streszczenie. W pracy rozpatrywano jednomaszynowy problem szeregowania zadań przy kryterium minimalizacji sumy opóźnień. Założono, że czasy wykonywania zadań są liniowo zależne od momentów rozpoczęcia ich wykonywania. Analizowano problemy z jednym wspólnym, dwoma oraz wieloma różnymi pożądanymi terminami zakończenia wykonania zadań. Dla szczególnych przypadków rozpatrywanego problemu skonstruowano optymalne algorytmy wielomianowe.

MINIMIZING THE TOTAL TARDINESS FOR THE SINGLE MACHINE SCHEDULING PROBLEM WITH DETERIORATING JOBS

Summary. In the paper we consider a single machine scheduling problem of minimizing the total tardiness. The job processing times are given as start time dependent linear functions. We present some optimal solutions for the special cases of the problem under consideration.

1. Wprowadzenie

W klasycznej teorii szeregowania czas wykonywania zadania jest stały. W problemach rozpatrywanych w niniejszej pracy czas wykonywania zadania jest zależny od momentu rozpoczęcia jego wykonywania. W literaturze naukowej znane są dwie grupy modeli opisujących taką zmianę czasu wykonywania zadania. Pierwsza odnosi się do funkcji niemalejących, natomiast druga do nierosnących. Pełny przegląd problemów z czasami wykonywania zadań zależnymi od momentu rozpoczęcia ich wykonywania zawarto w [2].

Do tej pory w literaturze naukowej nie rozpatrywano kryterium minimalizacji sumy opóźnień dla problemów szeregowania zadań czasowo zależnych. Jednakże kilka prac poświęcono pokrewnemu kryterium, tj. minimalizacji sumy czasów zakończenia wykonania. Problemy z tym kryterium były rozpatrywane tylko dla trzech modeli czasu wykonywania zadania. Każdy z nich stanowił pewną odmianę niemalejącej funkcji liniowej, opisanej dwoma parametrami: częścią stałą i współczynnikiem wzrostu. Przypadek z jednakowymi stałymi częściami czasu wykonywania był analizowany w [4]. Nie określono tam złożoności

problemu, jednakże udowodniono kilka jego własności (V-podobność oraz symetria rozwiązania optymalnego). W pracy [5] rozpatrywano przypadek, w którym stałe części czasów wykonywania były dla wszystkich zadań równe zero. Dla takiej sytuacji udowodniono, że optymalne uszeregowanie jest dane przez uporządkowanie zadań według nierosnących wartości ich współczynników wzrostu. Jeszcze inny przypadek liniowego modelu czasu wykonywania zadania był rozpatrywany w [1]. Założono tam, że współczynniki wzrostu wszystkich zadań są jednakowo proporcjonalne względem odpowiadających im stałych części czasu wykonywania. Dzięki temu udowodniono, że uszeregowanie zadań według niemalejących wartości ich stałych części czasów wykonywania jest optymalne.

W niniejszej pracy rozpatrywano również szczególne, wymienione powyżej, przypadki liniowego modelu czasu wykonywania zadania. Jednakże, w odróżnieniu od poprzednio wymienionych prac, gdzie minimalizacji podlegała suma czasów zakończenia wykonania, tutaj minimalizowano sumę opóźnień wykonania. Dokładne sformułowanie badanego problemu zamieszczono w rozdziale drugim. Rozdział trzeci, czwarty oraz piąty poświecono szczególnym przypadkom ogólnego problemu odpowiednio dla jednej wspólnej, dwóch oraz wielu różnych wartości pożądanych terminów zakończenia wykonania. W szóstym rozdziale zamieszczono krótkie podsumowanie.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest zbiór $J = \{1,...,n\}$ zawierający n niezależnych i niepodzielnych zadań do wykonania na pojedynczej maszynie. Czas wykonywania każdego zadania p_i jest dany jako niemalejąca funkcja liniowa zależna od momentu rozpoczęcia jego wykonywania $S_i \geq 0$:

$$p_i(S_i) = a_i + b_i S_i, \tag{1}$$

gdzie $a_i \geq 0$ oraz $b_i \geq 0$ oznaczają odpowiednio stałą część oraz współczynnik wzrostu czasu wykonywania zadania. Dla każdego zadania określony jest także pożądany termin zakończenia jego wykonania d_i. Zakładamy, że wszystkie zadania są dostępne w chwili zerowej $C_0 \geq 0$. Problem polega na znalezieniu takiego uszeregowania zadań, dla którego suma opóźnień $\sum_{i=1}^{n} T_i$ jest minimalna. Opóźnienie wykonania i-tego zadania jest określone następująco: $T_i = \max\{C_i - d_i, 0\}$, gdzie C_i oznacza czas zakończenia wykonania i-tego zadania.

Niech Π oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru J, natomiast niech $\pi \in \Pi$ będzie pewną permutacją zbioru J. Parametry zadania zajmującego w permutacji π pozycję i-tą będą oznaczane indeksem $\pi(i)$.

Aby wyznaczyć ogólne wyrażenie określające sumę opóźnień wszystkich zadań, w pierwszej kolejności wyznaczymy wyrażenie określające czas zakończenia wykonania $C_{\pi(i)}$ zadania zajmującego w permutacji π pozycję i-tą. Wykorzystując wzór (1), czasy zakończenia wykonania kolejnych zadań z permutacji π można wyznaczyć rekurencyjnie:

$$C_{\pi(i)} = C_{\pi(i-1)} + p_{\pi(i)} = a_{\pi(i)} + \left(b_{\pi(i)} + 1\right)C_{\pi(i-1)}, \text{ dla } i = 1,\ldots,n, \text{ gdzie } C_{\pi(0)} = C_0. \tag{2}$$

Wyrażenie (2) można również przedstawić jako:

$$C_{\pi(i)} = \sum_{j=1}^{i} a_{\pi(j)} \prod_{k=j+1}^{i}\left(b_{\pi(k)} + 1\right) + C_0 \prod_{k=1}^{i}\left(b_{\pi(k)} + 1\right). \tag{3}$$

Na podstawie (3), otrzymujemy ogólny wzór określający sumę opóźnień wszystkich zadań:

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{C_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}, 0\right\} = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{\sum_{j=1}^{i} a_{\pi(j)} \prod_{k=j+1}^{i}\left(b_{\pi(k)} + 1\right) + C_0 \prod_{k=1}^{i}\left(b_{\pi(k)} + 1\right) - d_{\pi(i)}, 0\right\}. \tag{4}$$

W niniejszej pracy rozpatrywane będą następujące, szczególne przypadki modelu czasu wykonywania zadania opisanego wzorem (1):

a) $p_i(S_i) = b_i S_i$ przy założeniu, że $C_0 = 1$, (1a)

b) $p_i(S_i) = a_i + k a_i S_i$; $C_0 = 0$, (1b)

c) $p_i(S_i) = a_i + b S_i$; $C_0 = 0$. (1c)

Dla opisanych przypadków wyrażenia (3) oraz (4) są dane odpowiednio przez:

a) $$C_{\pi(i)} = \prod_{k=1}^{i}\left(b_{\pi(k)} + 1\right), \tag{3a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{C_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}, 0\right\} = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{\prod_{k=1}^{i}\left(b_{\pi(k)} + 1\right) - d_{\pi(i)}, 0\right\}, \tag{4a}$$

b) $$C_{\pi(i)} = \frac{1}{k}\prod_{j=1}^{i}\left(k a_{\pi(j)} + 1\right) - \frac{1}{k}, \tag{3b}$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{C_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}, 0\right\} = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{\frac{1}{k}\prod_{j=1}^{i}\left(k a_{\pi(j)} + 1\right) - \frac{1}{k} - d_{\pi(i)}, 0\right\}, \tag{4b}$$

c) $$C_{\pi(i)} = \sum_{j=1}^{i} a_{\pi(j)} (b+1)^{i-j}, \tag{3c}$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{C_{\pi(i)} - d_{\pi(i)}, 0\right\} = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{\sum_{j=1}^{i} a_{\pi(j)} (b+1)^{i-j} - d_{\pi(i)}, 0\right\}, \tag{4c}$$

Problemy szeregowania zadań badane w niniejszej pracy będą oznaczane przy wykorzystaniu trójpolowej notacji $\alpha \mid \beta \mid \gamma$, która została wprowadzona w [3].

Ze względu na to, że w dalszych rozważaniach będziemy korzystali z metody dowodu opartej na zamianie sąsiednich zadań, wprowadzona zostanie następująca definicja.

Definicja 1. Niech $\pi \in \Pi$ oznacza pewną permutację zadań. Niech $\pi' \in \Pi$ oznacza permutację zadań powstałą z permutacji π przez zamianę sąsiednich zadań z pozycji j-tej oraz $j+1$-szej.

3. Jeden wspólny pożądany termin zakończenia wykonania

Obecnie zajmiemy się rozwiązaniem naszego problemu dla szczególnych przypadków liniowego modelu czasu wykonywania zadania, które zostały zdefiniowane w wyrażeniach (1a), (1b) oraz (1c). Zakładamy, że dla wszystkich zadań dany jest jeden wspólny pożądany termin zakończenia ich wykonania D.

W pierwszej kolejności przedstawimy optymalne rozwiązanie dla przypadku (1a).

Własność 1. Problem $1 \mid p_i(S_i) = b_i S_i,\ d_i = D \mid \sum T_i$ można rozwiązać optymalnie szeregując zadania według niemalejących wartości ich współczynników wzrostu b_i.

Dowód. Załóżmy, że dana jest optymalna permutacja π, dla której zachodzi $b_{\pi(j)} > b_{\pi(j+1)}$. Z wyrażenia (3a) wyznaczamy wartości czasów zakończenia wykonania zadań w permutacji π':

$C_{\pi'(i)} = C_{\pi(i)}$, dla $i = 1, \ldots, j-1$,

$$C_{\pi'(j)} = \frac{b_{\pi(j+1)} + 1}{b_{\pi(j)} + 1} C_{\pi(j)} < C_{\pi(j)},$$

$C_{\pi'(j+1)} = C_{\pi(j+1)}$,

$C_{\pi'(i)} = C_{\pi(i)}$, dla $i = j+2, \ldots, n$.

Na podstawie powyższych rezultatów oraz wyrażenia (4a) suma opóźnień wszystkich zadań w permutacji π' wynosi $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \max\{C_{\pi'(j)} - D, 0\} - \max\{C_{\pi(j)} - D, 0$.

Z założenia $b_{\pi(j)} > b_{\pi(j+1)}$ wynika, że zachodzi $C_{\pi'(j)} < C_{\pi(j)}$, zatem wartość wyrażenia $\max\{C_{\pi'(j)} - D, 0\} - \max\{C_{\pi(j)} - D, 0\}$ jest ujemna, a to oznacza, że $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} < \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$. Zatem uszeregowanie zadań według niemalejących wartości b_i jest optymalne.

Stosując strategię przedstawioną w dowodzie własności 1 można również pokazać następującą własność.

Własność 2. Optymalne rozwiązanie dla problemu $1 \mid p_i(S_i) = a_i + ka_iS_i,\ d_i = D \mid \sum T_i$ można uzyskać szeregując zadania według niemalejących wartości a_i.

Obecnie rozpatrzymy przypadek (1c).

Własność 3. Uszeregowanie zadań według niemalejących wartości ich stałych części czasów wykonywania a_i jest optymalne dla problemu $1 \mid p_i(S_i) = a_i + bS_i,\ d_i = D \mid \sum T_i$.

Dowód. Załóżmy, że permutacja π, dla której $a_{\pi(j)} > a_{\pi(j+1)}$, jest optymalna. Wyznaczmy wartości czasów zakończenia wykonania zadań w permutacji π':

$C_{\pi'(i)} = C_{\pi(i)}$, dla $i = 1,\ldots,j-1$,

$C_{\pi'(j)} = C_{\pi(j)} + \left(a_{\pi(j+1)} - a_{\pi(j)}\right) < C_{\pi(j)}$,

$C_{\pi'(j+1)} = C_{\pi(j+1)} + b\left(a_{\pi(j+1)} - a_{\pi(j)}\right) < C_{\pi(j+1)}$,

$C_{\pi'(i)} = C_{\pi(i)} + b(b+1)^{i-j-1}\left(a_{\pi(j+1)} - a_{\pi(j)}\right) < C_{\pi(i)}$, dla $i = j+2,\ldots,n$.

Z wyrażenia (4c) wyznaczamy sumę opóźnień wszystkich zadań dla permutacji π':

$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} \max\{C_{\pi'(i)} - D, 0\} < \sum_{i=1}^{n} \max\{C_{\pi(i)} - D, 0\} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$. Z przyjętego założenia $a_{\pi(j)} > a_{\pi(j+1)}$ wynika, że $C_{\pi'(i)} < C_{\pi(i)}$, dla $i = j,\ldots,n$. Zatem, suma opóźnień dla permutacji π' jest mniejsza niż suma opóźnień dla permutacji π. Wobec tego uszeregowanie zadań według niemalejących wartości ich stałych części czasów wykonywania a_i jest optymalne.

4. Dwa różne pożądane terminy zakończenia wykonania

Zajmiemy się teraz rozwiązaniem problemu zdefiniowanego w części drugiej przy założeniu, że dla wszystkich zadań zostały określone tylko dwie wartości pożądanych terminów zakończenia wykonania.

Własność 4. Problem $1 \mid p_i(S_i) = a_i + ka_iS_i,\ d_i \in \{d_1, d_2\} \mid \sum T_i$ można rozwiązać optymalnie w O(nlogn) krokach szeregując zadania według algorytmu A1.

Algorytm A1

Niech B_1 oraz B_2 oznaczają zbiory zadań, w których mamy odpowiednio $d_i = d_1$ oraz $d_i = d_2$. Bez straty ogólności zakładamy, że $d_1 < d_2$.

Krok 1. Uporządkuj zadania ze zbiorów B_1 oraz B_2 według niemalejących wartości a_j. Podstaw C := 0.

Krok 2. Jeżeli wszystkie zadania zostały uszeregowane, to wyznacz sumę opóźnień. STOP.

Krok 3. Ze zbioru B_1 wybierz zadanie l o najmniejszej wartości a_l. Jeżeli zbiór B_1 jest pusty, to uszereguj zadania ze zbioru B_2 według niemalejących wartości a_j. Przejdź do kroku 2.

Krok 4. Jeżeli $a_l + C(ka_l + 1) \le d_2$, to do permutacji wynikowej dołącz zadanie l na pierwszą wolną pozycję. Podstaw $C := a_l + C(ka_l + 1)$. Przejdź do kroku 3.

Krok 5. Ze zbioru B_2 wybierz zadanie v o najmniejszej wartości parametru a_v. Na pierwszą wolną pozycję w permutacji wynikowej dołącz zadanie $\arg\min\{a_l, a_v\}$, podstaw $C := \min\{a_l, a_v\} + C(k\min\{a_l, a_v\} + 1)$. Przejdź do kroku 3.

Dowód. Załóżmy, że permutacja π, dla której $a_{\pi(j)} > a_{\pi(j+1)}$, jest optymalna. Wykorzystując wyrażenie (3b) wyznaczymy wartości czasów zakończenia wykonania zadań w permutacji π':

$C_{\pi'(i)} = C_{\pi(i)}$, dla $i = 1, \ldots, j-1$,

$$C_{\pi'(j)} = \frac{ka_{\pi(j+1)} + 1}{ka_{\pi(j)} + 1} C_{\pi(j)} + \frac{1}{k}\left(\frac{ka_{\pi(j+1)} + 1}{ka_{\pi(j)} + 1} - 1\right) < C_{\pi(j)},$$

$C_{\pi'(j+1)} = C_{\pi(j+1)}$,

$C_{\pi'(i)} = C_{\pi(i)}$, dla $i = j+2, \ldots, n$.

Suma opóźnień wszystkich zadań dla permutacji π' na podstawie wyrażenia (4b) wynosi:

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} \max\{C_{\pi'(i)} - d_{\pi'(i)}, 0\} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \max\{C_{\pi'(j)} - d_{\pi(j+1)}, 0\} + \max\{C_{\pi'(j+1)} - d_{\pi(j)}, 0\} -$$
$$- \max\{C_{\pi(j)} - d_{\pi(j)}, 0\} - \max\{C_{\pi(j+1)} - d_{\pi(j+1)}, 0\}. \tag{5}$$

Z własności 2 wynika, że zadania z jednakowymi wartościami pożądanych terminów zakończenia wykonania są uszeregowane według niemalejących wartości a_i. Zatem, pozostały nam do rozpatrzenia przypadki, w których zadania z pozycji j-tej oraz j+1-szej posiadają różne wartości pożądanych terminów zakończenia wykonania, tzn. zachodzi przypadek (a) $d_{\pi(j)} = d_1$ oraz $d_{\pi(j+1)} = d_2$ lub przypadek (b) $d_{\pi(j)} = d_2$ oraz $d_{\pi(j+1)} = d_1$.

Rozpatrzmy przypadek (a). W tej sytuacji wyrażenie (5) jest dane jako:

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + T_{\pi'(j)} + T_{\pi'(j+1)} - T_{\pi(j)} - T_{\pi(j+1)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \max\left\{\frac{ka_{\pi(j+1)} + 1}{ka_{\pi(j)} + 1} C_{\pi(j)} + \frac{1}{k}\left(\frac{ka_{\pi(j+1)} + 1}{ka_{\pi(j)} + 1} - 1\right) - d_2, 0\right\} + \max\{C_{\pi(j+1)} - d_1, 0\} - \tag{6}$$
$$- \max\{C_{\pi(j)} - d_1, 0\} - \max\{C_{\pi(j+1)} - d_2, 0\}.$$

Dla przypadku (a) mogą zachodzić cztery następujące podprzypadki:

(a1) $d_2 > C_{\pi(j+1)}$ oraz $d_1 > C_{\pi(j)}$, wtedy $T_{\pi(j+1)} = 0$ oraz $T_{\pi(j)} = 0$, natomiast $T_{\pi'(j+1)} \geq 0$ oraz $T_{\pi'(j)} = 0$; wtedy wyrażenie (6) jest równe $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \max\{C_{\pi(j+1)} - d_1, 0\} \geq \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$,

(a2) $d_2 > C_{\pi(j+1)}$ oraz $C_{\pi(j)} > d_1$, mamy wtedy $T_{\pi(j+1)} = 0$ oraz $T_{\pi(j)} > 0$, natomiast $T_{\pi'(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi'(j)} = 0$; wyrażenie (6) ma wtedy postać $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + C_{\pi(j+1)} - C_{\pi(j)} > \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$,

(a3) $C_{\pi(j+1)} > d_2 > C_{\pi(j)}$ oraz $C_{\pi(j+1)} > d_1$, wtedy $T_{\pi(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi(j)} \geq 0$, natomiast $T_{\pi'(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi'(j)} = 0$; wyrażenie (6) jest równe $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + d_2 - d_1 - \max\{C_{\pi(j)} - d_1, 0\}$, bez względu na wartość wyrażenia $\max\{C_{\pi(j)} - d_1, 0\}$, mamy $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} > \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$,

(a4) $C_{\pi(j)} > d_2$ oraz $C_{\pi(j)} > d_1$, wtedy $T_{\pi(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi(j)} > 0$, natomiast $T_{\pi'(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi'(j)} > 0$; otrzymujemy $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \left(\frac{1}{k} + C_{\pi(j)}\right)\left(\frac{ka_{\pi(j+1)} + 1}{ka_{\pi(j)} + 1} - 1\right) < \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$.

Z analizy powyższych podprzypadków wynika, że uszeregowanie zadań według niemalejących wartości a_i jest optymalne tylko wtedy, gdy zadanie o większym a_j zakończy się po terminie d_2, w przypadku gdyby zadanie to uszeregowane było jako pierwsze (por. (a4)). W pozostałych podprzypadkach wartość sumy opóźnień jest mniejsza, gdy zadania są uszeregowane według wartości d_i.

Analiza przypadku (b) sprowadza się do analizy podprzypadków rozpatrywanych w przypadku (a).

Zostało zatem pokazane, że algorytm A1 konstruuje optymalne uszeregowanie zadań.

Wykorzystując strategię przedstawioną w dowodzie własności 4 można również pokazać następującą własność.

Własność 5. Optymalne rozwiązanie dla problemu $1 \mid p_i(S_i) = b_i S_i,\ d_i \in \{d_1, d_2\} \mid \sum T_i$ można uzyskać w O(nlogn) krokach szeregując zadania według algorytmu A2.

Algorytm A2

Niech B_1 oraz B_2 oznaczają zbiory zadań, w których mamy odpowiednio $d_i = d_1$ oraz $d_i = d_2$.

Krok 1. Uporządkuj zadania ze zbiorów B_1 oraz B_2 według niemalejących wartości parametrów b_j. Podstaw C := 1.

Krok 2. Jeżeli wszystkie zadania zostały uszeregowane, to wyznacz sumę opóźnień. STOP.

Krok 3. Ze zbioru B_1 wybierz zadanie l o najmniejszej wartości parametru b_l. Jeżeli zbiór B_1 jest pusty, to uszereguj zadania ze zbioru B_2 według niemalejących wartości b_j. Przejdź do kroku 3.

Krok 4. Jeżeli $C(b_l+1) \le d_2$, to na pierwszej wolnej pozycji w permutacji wynikowej uszereguj zadanie l. Podstaw $C := C(b_l+1)$. Przejdź do kroku 3.

Krok 5. Ze zbioru B_2 wybierz zadanie v o najmniejszej wartości b_v. Na pierwszą wolną pozycję w permutacji wynikowej dołącz zadanie $\arg\min\{b_l, b_v\}$. Podstaw $C := C(\min\{b_l, b_v\}+1)$. Przejdź do kroku 3.

5. Dowolne pożądane terminy zakończenia wykonania

Obecnie rozpatrzymy szczególne przypadki naszego problemu dla różnych wartości pożądanych terminów zakończenia wykonania. W pierwszych dwóch przypadkach założymy, że wartości pożądanych terminów zakończenia wykonania są proporcjonalne odpowiednio do współczynników wzrostu oraz stałych części czasów wykonywania zadań. W trzecim przypadku pożądane terminy zakończenia wykonania nie będą w żaden sposób zależały od parametrów czasu wykonywania zadania.

Własność 6. Uszeregowanie zadań według niemalejących wartości ich współczynników wzrostu b_i jest optymalne dla problemu $1 \mid p_i(S_i) = b_i S_i,\ d_i = kb_i \mid \sum T_i$.

Dowód. Załóżmy, że permutacja π, dla której $b_{\pi(j)} > b_{\pi(j+1)}$, jest optymalna. Wartości czasów zakończenia wykonania zadań w permutacji π' wyznaczamy na podstawie wyrażenia (3a):

$C_{\pi'(i)} = C_{\pi(i)}$, dla $i = 1, \ldots, j-1$,

$$C_{\pi'(j)} = \frac{b_{\pi(j+1)}+1}{b_{\pi(j)}+1} C_{\pi(j)} < C_{\pi(j)},$$

$C_{\pi'(j+1)} = C_{\pi(j+1)}$,

$C_{\pi'(i)} = C_{\pi(i)}$, dla $i = j+2, \ldots, n$.

Według wyrażenia (4a) suma opóźnień wszystkich zadań w permutacji π' wynosi:

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + T_{\pi'(j)} + T_{\pi'(j+1)} - T_{\pi(j)} - T_{\pi(j+1)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \max\left\{\frac{b_{\pi(j+1)}+1}{b_{\pi(j)}+1} C_{\pi(j)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\} + \max\left\{C_{\pi(j+1)} - kb_{\pi(j)}, 0\right\} - \tag{7}$$
$$- \max\left\{C_{\pi(j)} - kb_{\pi(j)}, 0\right\} - \max\left\{C_{\pi(j+1)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\}.$$

Z założenia $b_{\pi(j)} > b_{\pi(j+1)}$ wynika, że $d_{\pi(j)} > d_{\pi(j+1)}$. Rozpatrzmy następujące przypadki:

(a1) $d_{\pi(j)} > C_{\pi(j+1)}$ oraz $d_{\pi(j+1)} > C_{\pi(j)}$, wtedy $T_{\pi(j+1)} \geq 0$ oraz $T_{\pi(j)} = 0$, natomiast $T_{\pi'(j+1)} = 0$ oraz $T_{\pi'(j)} = 0$; wtedy wyrażenie (7) jest równe $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} - \max\left\{C_{\pi(j+1)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\} \leq \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$,

(a2) $d_{\pi(j)} > C_{\pi(j+1)}$ oraz $d_{\pi(j+1)} \leq C_{\pi(j)}$, wtedy $T_{\pi(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi(j)} = 0$, natomiast $T_{\pi'(j+1)} = 0$ oraz $T_{\pi'(j)} \geq 0$; bez względu na wartość wyrażenia $\max\left\{\frac{b_{\pi(j+1)}+1}{b_{\pi(j)}+1} C_{\pi(j)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\}$, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \max\left\{\frac{b_{\pi(j+1)}+1}{b_{\pi(j)}+1} C_{\pi(j)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\} - C_{\pi(j+1)} + kb_{\pi(j+1)} < \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)},$$

(a3) $C_{\pi(j+1)} > d_{\pi(j)} \geq C_{\pi(j)}$ oraz $d_{\pi(j+1)} \leq C_{\pi(j+1)}$, wtedy $T_{\pi(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi(j)} = 0$, natomiast $T_{\pi'(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi'(j)} \geq 0$; bez względu na wartość wyrażenia $\max\left\{\frac{b_{\pi(j+1)}+1}{b_{\pi(j)}+1} C_{\pi(j)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\}$, mamy

$$\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \max\left\{\frac{b_{\pi(j+1)}+1}{b_{\pi(j)}+1} C_{\pi(j)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\} + k\left(b_{\pi(j+1)} - b_{\pi(j)}\right) < \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)},$$

(a4) $d_{\pi(j)} < C_{\pi(j)}$ oraz $d_{\pi(j+1)} < C_{\pi(j)}$, wtedy $T_{\pi(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi(j)} > 0$, natomiast $T_{\pi'(j+1)} > 0$ oraz $T_{\pi'(j)} \geq 0$; w rozpatrywanej sytuacji wyrażenie (7) jest dane w następującej postaci: $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} = \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)} + \max\left\{\frac{b_{\pi(j+1)}+1}{b_{\pi(j)}+1} C_{\pi(j)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\} - C_{\pi(j)} + kb_{\pi(j+1)}$; podobnie jak poprzednio, bez względu na wartość wyrażenia $\max\left\{\frac{b_{\pi(j+1)}+1}{b_{\pi(j)}+1} C_{\pi(j)} - kb_{\pi(j+1)}, 0\right\}$ mamy $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} < \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$.

W każdym rozpatrywanym powyżej przypadku zachodzi $\sum_{i=1}^{n} T_{\pi'(i)} < \sum_{i=1}^{n} T_{\pi(i)}$. Zatem, uszeregowanie zadań według niemalejących wartości ich współczynników wzrostu jest optymalne.

Na podstawie wyrażeń (3a) i (4a), przy zastosowaniu strategii przedstawionej w dowodzie własności 6 można pokazać następujące dwie własności.

Własność 7. Problem $1 \mid p_i(S_i) = a_i + bS_i,\ d_i = ka_i \mid \sum T_i$ można rozwiązać optymalnie szeregując zadania według niemalejących wartości ich stałych części czasów wykonywania.

Własność 8. Optymalne rozwiązanie dla problemu $1 \mid p_i(S_i) = a + bS_i \mid \sum T_i$ można uzyskać szeregując zadania według niemalejących wartości ich pożądanych terminów zakończenia wykonania (Earliest Due Date first).

6. Podsumowanie

W niniejszej pracy rozpatrywano szczególne przypadki jednomaszynowego problemu szeregowania zadań czasowo zależnych przy kryterium minimalizacji sumy opóźnień. Przedstawiono wielomianowe rozwiązania dla ośmiu różnych szczególnych przypadków ogólnego problemu. Wszystkie rozwiązania posiadały złożoność równą O(nlogn).

LITERATURA

1. Bachman A., Janiak A.: Scheduling jobs with special type of start time dependent processing times, Raport ICT Politechniki Wrocławskiej, PRE 34/97, Wrocław 1997.
2. Bachman A.: Jednomaszynowe problemy szeregowania zadań z czasami wykonywania zależnymi od ich momentu rozpoczęcia (Rozprawa doktorska), Raport ICT Politechniki Wrocławskiej, PRE 78/98, Wrocław 1998.
3. Graham R.L, Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinooy Kan A.H.G.: Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey, Annals of Discrete Mathematics, vol. 3, 1979, pp. 287-326.
4. Mosheiov G.: V-shaped policies to schedule deteriorating jobs, Operations Research, vol. 6/39, 1991, pp. 979-991.
5. Mosheiov G.: Scheduling jobs under simple linear deterioration, Computers and Operations Research, vol. 6/21, 1994, pp. 653-659.

Recenzent: Prof.dr hab.inż. J.Węglarz

Abstract

The paper deals with the single machine problem of scheduling jobs with the start time dependent processing times. The objective is the minimization of the total tardiness. The job processing times are given as linear functions containing fixed and variable parts. We present the optimal solutions for some special cases of the considered problem, in which for all the jobs one common, two different and arbitrary values of due dates are given.