ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 129 Nr kol. 1474

Aleksander BACHMAN, Adam JANIAK
Politechnika Wrocławska

JEDNOMASZYNOWY PROBLEM SZEREGOWANIA ZADAŃ CZASOWO I ZASOBOWO ZALEŻNYCH PRZY KRYTERIUM MINIMALIZACJI CZASU ZAKOŃCZENIA WYKONANIA ZADAŃ

Streszczenie. W niniejszej pracy wykazano NP-zupełność jednomaszynowego problemu szeregowania zadań z czasami wykonywania zależnymi zarówno od momentu rozpoczęcia wykonywania, jak również od ilości przydzielonego zasobu przy kryterium minimalizacji czasu zakończenia wykonania zadań.

MINIMIZING THE MAKESPAN FOR THE SINGLE MACHINE SCHEDULING PROBLEM WITH START TIME AND RESOURCE DEPENDENT JOB PROCESSING TIMES

Summary. The paper deals with a single machine scheduling problem, in which the job processing times are start time and resource dependent. We prove that this problem is NP-complete for the makespan minimization.

1. Wprowadzenie

Wykorzystanie klasycznej teorii szeregowania zadań do opisu wielu rzeczywistych procesów, w których czas wykonywania zadania nie jest stały, jest bardzo trudne, a czasami nawet niemożliwe. Jednym ze sposobów rozwiązywania spotykanych w praktyce problemów szeregowania zadań jest ich dokładniejsze modelowanie przy użyciu różnych parametrów. Dzięki nim uzyskujemy możliwość zbliżenia się do istoty charakteryzowanego problemu. W literaturze naukowej znane są przykłady modeli czasu wykonywania zadania, w których ilość przydzielonych zasobów wpływa na długość jego wykonywania [4]. Znane są również takie modele, w których czas przeznaczony na wykonanie zadania jest pewną funkcją momentu rozpoczęcia jego wykonywania [5] lub [1].

W niniejszej pracy wprowadzono nowy model czasu wykonywania zadania, który łączy w sobie dwie, wcześniej wspomniane, zależności, tzn. czas przeznaczony na wykonanie zadania stanowi funkcję dwóch zmiennych decyzyjnych: ilości przydzielonych zasobów i momentu rozpoczęcia wykonywania. Zastosowanie takiego modelu możemy znaleźć w przemyśle hutniczym, a dokładniej w procesie nagrzewania wlewków w piecu wgłębnym

przed rozpoczęciem procesu walcowania na walcarce-zgniataczu. Uzyskane w wyniku wytopu stali wlewki są poddawane procesowi stygnięcia i krystalizacji, który trwa od kilku do kilkunastu godzin. Po zakończeniu tego etapu wlewki są segregowane w odpowiednie zestawy, a następnie transportowane do piecowni zgniatacza, gdzie, za pomocą specjalnych suwnic, są ładowane do pieców wgłębnych. Każdy wlewek posiada pewną temperaturę początkową zależną od jego wymiarów zewnętrznych, jak i czasu stygnięcia. Czas przebywania wlewka w piecu wgłębnym jest uzależniony od ilości dostarczonego gazu, tj. od ilości dostarczonych zasobów (por. [4]) oraz od temperatury początkowej wlewka. Im niższa jest temperatura początkowa wlewka, tym dłuższy czas jego nagrzewania i odwrotnie, im większa jest ilość dostarczonych zasobów, czyli gazu, tym krótszy czas nagrzewania. Nowy model czasu wykonywania zadania w większym stopniu przybliża rzeczywiste zjawisko, ale wpływa także na trudność związanych z nim problemów szeregowania.

W drugim rozdziale niniejszej pracy dokonano dokładnego sformułowania rozpatrywanego problemu. Trzeci rozdział poświęcono wykazaniu kilku szczególnych własności badanego problemu, natomiast w czwartym rozdziale udowodniono jego NP-zupełność. W piątym rozdziale zamieszczono krótkie podsumowanie.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest zbiór $J = \{1,...,n\}$ zawierający n niezależnych i niepodzielnych zadań do wykonania na pojedynczej maszynie. Każde zadanie i jest dostępne do wykonywania w momencie $C_0 \geq 0$. Czas wykonywania zadania p_i jest dany liniową funkcją zależną zarówno od momentu rozpoczęcia wykonywania S_i, jak również od ilości przydzielonych zasobów u_i:

$$p_i(S_i, u_i) = a_i + b_i S_i - a'_i u_i, \tag{1}$$

gdzie a_i jest stałą częścią czasu wykonywania zadania, b_i jest jego współczynnikiem wzrostu, natomiast a'_i jest współczynnikiem wykorzystania zasobów. Ilość zasobów u_i przydzielonych do zadania i jest ograniczona lokalnie: $0 \leq \underline{u_i} \leq u_i \leq \overline{u_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$ oraz globalnie $\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \overline{U}$. Parametry $\underline{u_i}$ oraz $\overline{u_i}$ reprezentują lokalne ograniczenia technologiczne na minimalną oraz maksymalną ilość dostępnego zasobu. Ponadto zakłada się, że spełnione jest ograniczenie $\overline{u_i} \leq \frac{a_i}{a'_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$, dzięki czemu czasy wykonywania wszystkich zadań są zawsze dodatnie.

Niech Π oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru J, natomiast niech $\pi \in \Pi$ oznacza pewną permutację. Parametry zadania zajmującego w permutacji π pozycję i-tą będą oznaczane indeksem $\pi(i)$.

Wykorzystując wyrażenie (1), wyznaczymy wzór opisujący czas zakończenia wykonania zadania zajmującego w permutacji π pozycję i-tą:

$$C_{\pi(i)} = \sum_{j=1}^{i} a_{\pi(j)} \prod_{k=j+1}^{i} \left(b_{\pi(k)} + 1\right) + C_0 \prod_{k=1}^{i} \left(b_{\pi(k)} + 1\right) - \sum_{j=1}^{i} a'_{\pi(j)} u_{\pi(j)} \prod_{k=j+1}^{i} \left(b_{\pi(k)} + 1\right). \qquad (2)$$

Analizując wyrażenie (2) możemy zauważyć, że z ilością zasobów $u_{\pi(j)}$ przydzielonych do j-tego zadania związany jest współczynnik $a'_{\pi(j)} \prod_{k=j+1}^{i} \left(b_{\pi(k)} + 1\right)$. W dalszych rozważaniach będzie on nazywany rozszerzonym współczynnikiem wykorzystania zasobów.

Przy wykorzystaniu trójpolowej notacji $\alpha \mid \beta \mid \gamma$ [3] rozpatrywany problem oznacza się następująco: $1 \left| p_i(S_i, u_i) = a_i + b_i S_i - a'_i u_i,\ \sum_{i=1}^{n} u_i \le \overline{U} \right| C_{\max}$. Jego rozwiązanie polega na ustaleniu permutacji zadań oraz na określeniu ilości zasobów przydzielonych do każdego zadania, dla których czas zakończenia wykonania ostatniego zadania jest minimalny.

3. Własności problemu

W niniejszym rozdziale przedstawimy kilka własności rozpatrywanego problemu, które zostaną następnie wykorzystane w dowodzie jego NP-zupełności.

Twierdzenie 1. Dla problemu $1 \left| p_i(S_i, u_i) = a_i + b_i S_i - a'_i u_i,\ \sum_{i=1}^{n} u_i \le \overline{U} \right| C_{\max}$, przy ustalonym rozdziale zasobów u_i dla $i = 1, \ldots, n$, w optymalnym uszeregowaniu zadania są uporządkowane według niemalejących wartości współczynników $\dfrac{a_i - a'_i u_i}{b_i}$.

Dowód. Trywialny. Można go przeprowadzić przez zamianę sąsiednich zadań lub na podstawie optymalnego uszeregowania zadań dla problemu $1 \mid p_i(S_i) = a_i + b_i S_i \mid C_{\max}$ [5].

Twierdzenie 2. Dla dowolnej ustalonej permutacji zadań $\pi \in \Pi$, dla problemu $1 \left| p_i(S_i, u_i) = a_i + b_i S_i - a'_i u_i,\ \sum_{i=1}^{n} u_i \le \overline{U} \right| C_{\max}$, rozdział zasobów (w maksymalnych dostępnych ilościach) według niemalejących wartości $a'_{\pi(i)} \prod_{k=i+1}^{n} \left(b_{\pi(k)} + 1\right)$ jest optymalny.

Dowód. Trywialny. Można go przeprowadzić przez zamianę sąsiednich zadań.

Twierdzenie 3. Dla problemu $1 \left| p_i(S_i,u_i)=a_i+b_iS_i-a'_iu_i,\ \sum_{i=1}^{n}u_i\le\bar{U} \right| C_{\max}$, dla każdej ustalonej permutacji $\pi\in\Pi$, istnieje optymalny rozdział zasobów, w którym ilości zasobów przydzielone do wszystkich zadań z wyjątkiem jednego k są równe ich dolnym lub górnym ograniczeniom: $\left(u_i=\underline{u_i}\ \vee\ u_i=\overline{u_i}\right)$ dla $i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}$ oraz $\underline{u_k}<u_k<\overline{u_k}$.

Dowód. Załóżmy, że dana jest permutacja zadań π, w której ilości zasobów przydzielone do zadań zajmujących pozycje i-tą oraz l-tą wynoszą odpowiednio $u_{\pi(i)}$ oraz $u_{\pi(l)}$. Bez starty ogólności zakładamy, że ilości zasobów przydzielonych do pozostałych zadań są równe ich górnym lub dolnym ograniczeniom. Ponadto zakładamy, że $i<l$, $u_{\pi(i)}<\overline{u_{\pi(i)}}$, $u_{\pi(l)}<\overline{u_{\pi(l)}}$, $u_{\pi(i)}+u_{\pi(l)}>\overline{u_{\pi(i)}}$ oraz $u_{\pi(i)}+u_{\pi(l)}>\overline{u_{\pi(l)}}$. Na podstawie wyrażenia (2) rozszerzone współczynniki wykorzystania zasobów dla zadań z pozycji i-tej oraz l-tej wynoszą odpowiednio: $a'_{\pi(i)}\prod_{k=l+1}^{n}\left(b_{\pi(k)}+1\right)$ oraz $a'_{\pi(l)}\prod_{k=l+1}^{n}\left(b_{\pi(k)}+1\right)$. Dla ustalonej permutacji zadań π pomiędzy tymi współczynnikami mogą zachodzić następujące relacje:

(a) $a'_{\pi(i)}\prod_{k=l+1}^{n}\left(b_{\pi(k)}+1\right)<a'_{\pi(l)}\prod_{k=l+1}^{n}\left(b_{\pi(k)}+1\right)$, (b) $a'_{\pi(i)}\prod_{k=l+1}^{n}\left(b_{\pi(k)}+1\right)>a'_{\pi(l)}\prod_{k=l+1}^{n}\left(b_{\pi(k)}+1\right)$

lub (c) $a'_{\pi(i)}\prod_{k=l+1}^{n}\left(b_{\pi(k)}+1\right)=a'_{\pi(l)}\prod_{k=l+1}^{n}\left(b_{\pi(k)}+1\right)$.

Biorąc pod uwagę tylko ilości zasobów przydzielone do zadań z pozycji i-tej oraz l-tej, łatwo można pokazać, że dla przypadków (a), (b) oraz (c) następujące przydziały zasobów do tych zadań nie zwiększają wartości $C_{\pi(n)}$ (w przypadku (a) oraz (b) nawet tę wartość zmniejszają): (a) $u^*_{\pi(i)}=u_{\pi(i)}+u_{\pi(l)}-\overline{u_{\pi(l)}}$, $u^*_{\pi(l)}=\overline{u_{\pi(l)}}$, (b) $u^*_{\pi(i)}=\overline{u_{\pi(i)}}$, $u^*_{\pi(l)}=u_{\pi(i)}+u_{\pi(l)}-\overline{u_{\pi(i)}}$ oraz (c) $u_{\pi(i)}$, $u_{\pi(l)}$ lub $u^*_{\pi(i)}=u_{\pi(i)}+u_{\pi(l)}-\overline{u_{\pi(l)}}$, $u^*_{\pi(l)}=\overline{u_{\pi(l)}}$ lub $u^*_{\pi(i)}=\overline{u_{\pi(i)}}$, $u^*_{\pi(l)}=u_{\pi(i)}+u_{\pi(l)}-\overline{u_{\pi(i)}}$.

Wynika stąd, że dla każdej ustalonej permutacji zadań istnieje optymalny przydział zasobów, w którym tylko dla jednego zadania ilość przydzielonych mu zasobów jest różna od odpowiadającego mu dolnego lub górnego ograniczenia.

Wniosek 1. W optymalnym rozdziale zasobów, dla ustalonej permutacji zadań, w której współczynniki wykorzystania zasobów są jednakowe dla wszystkich zadań ($a'_i=a'$ dla $i=1,\dots,n$), zasoby są przydzielane począwszy od pierwszej pozycji w maksymalnych dostępnych ilościach.

4. Dowód NP-zupełności

Pokażemy teraz, że NP-zupełny PROBLEM PODZIAŁU (PP) [2] jest wielomianowo transformowalny do decyzyjnej wersji naszego problemu (DPS).

PP: Dany jest zbiór $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ zawierający m dodatnich liczb całkowitych, których suma jest równa $\sum_{i=1}^{m} x_i = 2B$. Czy istnieje taki podzbiór $Y \subset X$, że spełnione jest $\sum_{x_i \in Y} x_i = \sum_{x_i \in X \setminus Y} x_i = B$?

DPS: Dany jest jednomaszynowy problem szeregowania n niezależnych i niepodzielnych zadań z czasami wykonywania danymi w postaci (1), parametrami a_i, b_i, a'_i oraz wartościami $\overline{U}$ i y. Wszystkie zadania są dostępne do wykonania w chwili $C_0 = 1$. Zakłada się, że $\overline{U}$ oraz m są dodatnimi liczbami całkowitymi, natomiast y, a_i, b_i oraz a'_i są nieujemnymi liczbami wymiernymi. Czy istnieje takie uszeregowanie zadań z rozdziałem zasobów (przy ograniczeniu $\overline{U}$ na całkowitą ilość dostępnych zasobów), dla którego czas zakończenia wykonania ostatniego zadania jest nie większy niż y?

Twierdzenie 4. Decyzyjna wersja DPS jednomaszynowego problemu szeregowania zadań $1 \mid p_i(S_i, u_i) = a_i + b_i S_i - a'_i u_i,\ \sum_{i=1}^{n} u_i \le \overline{U} \mid C_{\max}$ jest NP-zupełna.

Dowód. Przedstawimy teraz transformację PP do DPS. Niech DPS zawiera $n=m+1$ zadań, gdzie parametry pierwszych m zadań, utworzonych na podstawie instancji PP, są dane jako:

$$a_i = (1 + 8B^2)x_i, \quad b_i = \frac{x_i}{2B^2}, \quad a'_i = 8B^2, \quad \underline{u}_i = 0, \quad \overline{u}_i = x_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

natomiast parametry $m+1$-szego zadania, nazywanego dalej zadaniem dodatkowym, wynoszą:

$$a_e = 16B^5, \quad b_e = 2B^2, \quad a'_e = 0, \quad \underline{u}_i = 0, \quad \overline{u}_i = 0. \tag{4}$$

Wartości $\overline{U}$ oraz y są odpowiednio równe: $\overline{U} = B$ oraz $y = 16B^5 - 4B^4 + 6B^3 + 16B^2 + 11B + 9$.

Możemy zauważyć, że w przedstawionej transformacji, dla wszystkich zadań utworzonych na podstawie elementów z PP, współczynniki $\frac{a_i - a'_i u_i}{b_i}$, $i = 1, \ldots, m$ są jednakowe w dwóch przypadkach, gdy ilości zasobów przydzielonych do zadań: (a) są równe zero ($u_i = \underline{u}_i = 0$), wtedy $\frac{a_i}{b_i} = (1 + 8B^2)2B^2$ lub (b) odpowiadają ich górnym ograniczeniom ($u_i = \overline{u}_i = x_i$), wtedy $\frac{a_i - a'_i \overline{u}_i}{b_i} = 2B^2$.

Dla zadań z jednakowymi współczynnikami $\frac{a_i}{b_i}$ (bez rozdziału zasobów) zachodzi [1]:

- przy kryterium C_{max} dowolne uszeregowanie zadań jest optymalne,
- czas zakończenia wykonania i-tego zadania w permutacji π jest dany następująco:

$$C_{\pi(i)} = (C_0 + v)\prod_{j=1}^{i}\left(\frac{a_{\pi(j)}}{v} + 1\right) - v; \qquad v = \frac{a_i}{b_i}, \qquad i = 1,\ldots,m. \tag{5}$$

W przypadku (a), w którym $v = \frac{a_i}{b_i} = (1+8B^2)2B^2$, wyrażenie (5) jest równe:

$$C_{\pi(i)} = (C_0 + (1+8B^2)2B^2)\prod_{j=1}^{i}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2} + 1\right) - (1+8B^2)2B^2; \qquad i = 1,\ldots,m, \tag{6}$$

natomiast w przypadku (b),w którym $v = \frac{a_i - a'_i\overline{u_i}}{b_i} = 2B^2$, mamy odpowiednio:

$$C_{\pi(i)} = (C_0 + 2B^2)\prod_{j=1}^{i}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2} + 1\right) - 2B^2; \qquad i = 1,\ldots,m. \tag{7}$$

Pokażemy teraz, że rozwiązanie dla DPS istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla PP istnieje ono również.

(PP $\Rightarrow$ DPS) Załóżmy, że podzbiór $Y \subset X = \{x_1,\ldots,x_m\}$ zawierający l elementów jest rozwiązaniem PP. Uszeregowanie zadań i rozdział zasobów dla DPS są dane następująco. W pierwszej kolejności wykonywane są zadania utworzone na podstawie elementów należących do podzbioru Y, następnie zadanie dodatkowe a po nim zadania utworzone na podstawie elementów z podzbioru $X \setminus Y$. Wszystkie zasoby zostały przydzielone do zadań z podzbioru Y w ilościach odpowiadających ich górnym ograniczeniom, tzn. $u_i = \overline{u_i} = x_i$, $x_i \in Y$. Na podstawie wyrażenia (7) czas zakończenia wykonania zadań z podzbioru Y wynosi $C_Y = (1+2B^2)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2} + 1\right) - 2B^2$. Czas zakończenia wykonania zadania dodatkowego jest równy: $C_e = 16B^5 - 4B^4 - 2B^2 + (1+4B^2+4B^4)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2} + 1\right)$. Wykorzystując (6), otrzymujemy wyrażenie na czas zakończenia wykonania ostatniego zadania:

$$C_{\pi(n)} = (16B^5 + 12B^4)\prod_{j=l+2}^{n}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2} + 1\right) + (1+4B^2+4B^4)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2} + 1\right)\prod_{j=l+2}^{n}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2} + 1\right) - 16B^4 - 2B^2 . \tag{8}$$

Skonstruowane rozwiązanie posiada cechy optymalnego uszeregowania oraz optymalnego rozdziału zasobów. Zadania są uszeregowane według niemalejących wartości ilorazów $\frac{a_i - a'_i u_i}{b_i}$ (por. twierdzenie 1), natomiast rozdział zasobów jest optymalny zgodnie z twierdzeniem 3 oraz wnioskiem 1.

Obecnie porównamy wartość wyrażenia (8) z zadaną wartością y. W tym celu wykorzystamy następujące spostrzeżenie. Dla zadanej sumy elementów ich iloczyn posiada największą wartość, gdy wartości tych elementów są jednakowe. Jeżeli wartości l elementów z podzbioru Y są jednakowe ($x_i = \frac{B}{l}$, $x_i \in Y$) oraz wartości m-l elementów z podzbioru $X \setminus Y$ są również jednakowe ($x_i = \frac{B}{m-l}$, $x_i \in X \setminus Y$), wtedy wyrażenie (8) jest dane następująco:

$$C_{\pi(n)} = \left(16B^5 + 12B^2\right)\left(\frac{1}{2B(m-l)} + 1\right)^{m-l} + \left(1 + 4B^2 + 4B^4\right)\left(\frac{1}{2Bl} + 1\right)^{l}\left(\frac{1}{2B(m-l)} + 1\right)^{m-l} - 16B^4 - 2B^2.$$

Można pokazać, że dana powyższym wyrażeniem wartość $C_{\pi(n)}$ jest największa, jeżeli podzbiór Y zawiera dokładnie jeden element (l=1) o wartości B, natomiast wartości m-1 elementów z podzbioru $X \setminus Y$ są równe $x_i = \frac{B}{m-1}$, $x_i \in X \setminus Y$. Wobec tego czas zakończenia wykonania ostatniego zadania w tym przypadku wynosi:

$$C_{\pi(n)} = \left(16B^5 + 12B^2\right)\left(\frac{1}{2B(m-1)} + 1\right)^{m-1} + \left(1 + 4B^2 + 4B^4\right)\left(\frac{1}{2B} + 1\right)\left(\frac{1}{2B(m-1)} + 1\right)^{m-1} - 16B^4 - 2B^2.$$

Wykorzystując następujące oszacowanie $\left(\frac{1}{2B(m-1)} + 1\right)^{m-1} < \left(\frac{2}{4B-1} + 1\right)$ (dowód z dwumianu Newtona), wartość $C_{\pi(n)}$ można oszacować następująco:

$$C_{\pi(n)} < \left(16B^5 + 12B^2\right)\left(\frac{2}{4B-1} + 1\right) + \left(1 + 4B^2 + 4B^4\right)\left(\frac{1}{2B} + 1\right)\left(\frac{2}{4B-1} + 1\right) - 16B^4 - 2B^2 =$$

$$= 16B^5 - 4B^4 + 6B^3 + 16B^2 + \frac{21}{2}B + \frac{33}{8} + \frac{\frac{65}{16}}{4B-1} + \frac{\frac{81}{64}}{4B^2 - B} + \frac{49}{64B} <$$

$$< 16B^5 - 4B^4 + 6B^3 + 16B^2 + 11B + 9 = y.$$

Z przedstawionych rozważań wynika, że czas zakończenia wykonania ostatniego zadania jest mniejszy niż zadana wartość y. Wobec tego pokazano, że jeżeli PP posiada rozwiązanie, wtedy DPS posiada je również.

(¬PP ⇒ ¬DPS) Załóżmy teraz, że PP nie posiada rozwiązania, tzn. $\sum_{x_i \in Y} x_i \neq \sum_{x_i \in X \setminus Y} x_i$. Wystarczy, jeżeli rozpatrzymy dwa następujące przypadki:

(a) $\sum_{x_i \in Y} x_i = B - \lambda$, $\sum_{x_i \in X \setminus Y} x_i = B + \lambda$, oraz (b) $\sum_{x_i \in Y} x_i = B + \lambda$, $\sum_{x_i \in X \setminus Y} x_i = B - \lambda$, gdzie λ jest pewną liczbą całkowitą.

Rozpatrzmy przypadek (a). Załóżmy, bez starty ogólności, że podzbiór Y zawiera l elementów. Ilości zasobów przydzielone do zadań utworzonych na podstawie elementów ze zbioru Y odpowiadają ich górnym ograniczeniom zasobowym (suma dostępnych zasobów $\overline{U}$ jest większa niż suma górnych ograniczeń zasobowych dla zadań ze zbioru Y). Wobec tego czas zakończenia wykonania ostatniego zadania z tego podzbioru wyraża się jako (por. (7)): $C_Y = C_{\pi(l)} = (1+2B^2)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2}+1\right)-2B^2$. Następnie wykonywane jest zadanie dodatkowe, którego czas zakończenia jest równy: $C_e = 16B^5 - 4B^4 - 2B^2 + (1+4B^2+4B^4)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2}+1\right)$. Po zadaniu dodatkowym wykonywane są zadania utworzone na podstawie elementów z podzbioru $X\backslash Y$. Z wniosku 1 wynika, że pozostałe zasoby należy przydzielić do zadań wykonywanych zaraz po zadaniu dodatkowym. Załóżmy, że zasoby zostały przydzielone tylko do zadania z pozycji l+2-giej ($u_{\pi(l+2)} = \lambda$), wtedy czas zakończenia wykonania zadania z tej pozycji wynosi:

$$C_{\pi(l+2)} = (1+8B^2)x_{\pi(l+2)} - 8B^2\lambda + \left(\frac{x_{\pi(l+2)}}{2B^2}+1\right)\left[16B^5 - 4B^4 - 2B^2 + (1+4B^2+4B^4)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2}+1\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{x_{\pi(l+2)}}{2B^2}+1\right)\left[16B^5 + 12B^4 + (1+4B^2+4B^4)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2}+1\right)\right] - (1+8B^2)2B^2 - 8B^2\lambda .$$

W następnej kolejności wykonywane są zadania utworzone na podstawie pozostałych elementów z podzbioru $X\backslash Y$. Wobec tego na podstawie wyrażenia (6) czas zakończenia wykonania ostatniego zadania jest dany następująco:

$$C_{\pi(n)} = \left[16B^5 + 12B^4 + (1+4B^2+4B^4)\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2}+1\right)\right]\left(\frac{x_{\pi(l+2)}}{2B^2}+1\right)\prod_{j=l+3}^{n}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2}+1\right) -$$
$$-8B^2\lambda\prod_{j=l+3}^{n}\left(\frac{x_{\pi(j)}}{2B^2}+1\right) - (1+8B^2)2B^2 . \tag{9}$$

Porównajmy uzyskany wynik (9) z zadaną wartością y. Analogicznie do pierwszej części dowodu możemy pokazać, że wartość $C_{\pi(n)}$ jest minimalna, gdy podzbiór Y zawiera $l = m-1$ elementów, natomiast zbiór $X\backslash Y$ zawiera tylko jeden element. Zauważmy, że dla elementów o zadanej sumie ich iloczyn jest minimalny, jeżeli wartości tych elementów z wyjątkiem jednego są minimalne. Zatem w rozpatrywanym przez nas przypadku wartość $C_{\pi(n)}$ jest minimalna, gdy podzbiór Y zawiera $l = m-2$ elementów równych 1 (wartości x_l są całkowite) oraz jeden element o wartości $B-\lambda-m+2$. Wobec tego podzbiór $X\backslash Y$ zawiera tylko jeden element o wartości $B+\lambda$. Zatem wyrażenie (9) jest dane jako:

$$C_{\pi(n)} = \left[16B^5 + 12B^4 + \left(1+4B^2+4B^4\right)\left(\frac{B-\lambda-m+2}{2B^2}+1\right)\left(\frac{1}{2B^2}+1\right)^{m-2}\right]\left(\frac{B+\lambda}{2B^2}+1\right) - 8B^2\lambda - 16B^4 - 2B^2$$

$$> \left[16B^5 + 12B^4 + \left(1+4B^2+4B^4\right)\left(\frac{B-\lambda-m+2}{2B^2}+1\right)\left(\frac{1}{2B^2}+1\right)\right]\left(\frac{B+\lambda}{2B^2}+1\right) - 8B^2\lambda - 16B^4 - 2B^2 =$$

$$= 16B^5 + 8B^4 + B^3(10+8\lambda) + B^2(9-2\lambda-2m) + B(8-m) + \frac{21}{2} - 3m + \lambda(2-m-\lambda) +$$

$$+ \frac{B(12-3m) - \lambda(3\lambda+3m-6) - 3m + 7}{2B^2} + \frac{3B^2 + B(8-3m) - \lambda(3\lambda+3m-6) + 2 - m}{4B^4} + \tag{10}$$

$$+ \frac{B^2 + B(2-m) - \lambda(\lambda+m-2)}{8B^6}.$$

Można pokazać, że wartość wyrażenia (10) jest minimalna dla $\lambda = 1$. Zatem uzyskujemy:

$$C_{\pi(n)} > 16B^5 + 8B^4 + 18B^3 + B^2(7-2m) + B(8-m) + \frac{21}{2} - 4m + 1 + \frac{B(12-3m) - 6m + 10}{2B^2} +$$

$$+ \frac{3B^2 + B(8-3m) + 5 - 4m}{4B^4} + \frac{B^2 + B(2-m) + 1 - m}{8B^6} > 16B^5 - 4B^4 + 6B^3 + 16B^2 + 11B + 9 = y.$$

Pokazano, że w przypadku (a) wartość $C_{\pi(n)}$ jest większa niż żądana wartość y.

Rozpatrzmy przypadek (b). Załóżmy, tak jak poprzednio, że podzbiór Y zawiera l elementów. Suma elementów z podzbioru Y jest większa niż wartość B (globalna ilość zasobów), zatem ilość zasobów przydzielona jednemu zadaniu z tego podzbioru jest mniejsza od jego górnego ograniczenia na ilość dostępnych zasobów. Z wniosku 1 wynika, że jest to zadanie z pozycji l-tej. Załóżmy, że zachodzi najkorzystniejszy przypadek, w którym ilość zasobów przydzielona do l-tego zadania jest równa $u_{\pi(l)} = \overline{u_{\pi(l)}} - 1$. W takiej sytuacji zadania z pozycji l-tej oraz l+1-szej nie są uszeregowane optymalnie (por. twierdzenie 1), ponieważ zachodzi dla nich $\frac{a_{\pi(l)} - a'_{\pi(l)}\left(\overline{u_{\pi(l)}} - 1\right)}{b_{\pi(l)}} = \frac{16B^4}{x_{\pi(l)}} + 2B^2 > 8B^3 + 2B^2 > \frac{a_{\pi(l+1)}}{b_{\pi(l+1)}} = \frac{a_e}{b_e} = 8B^3$. Aby zapewnić optymalność rozpatrywanego uszeregowania należałoby zadania z pozycji l-tej oraz l+1-szej zamienić miejscami. Jednakże w wyniku takiej zamiany otrzymamy rozwiązanie już rozpatrzone w przypadku (a), w którym wartość $C_{\pi(n)}$ jest większa niż wymagana wartość y.

Pokazaliśmy, że DPS ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy PP ma je również.

5. Podsumowanie

W niniejszej pracy wprowadzono nowy model czasu wykonywania zadania uzależniony zarówno od ilości przydzielonych zasobów, jak i momentu rozpoczęcia wykonywania. Wykazano NP-zupełność jednomaszynowego problemu szeregowania zadań z czasami

wykonywania danymi w postaci tego modelu przy kryterium minimalizacji czasu zakończenia wykonania zadań.

LITERATURA

1. Bachman A., Janiak A.: Scheduling jobs with special type of start time dependent processing times, Raport ICT Politechniki Wrocławskiej PRE 34/97, Wrocław 1997
2. Garey M.R., Johnson D.S.: Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, 1979.
3. Graham R.L, Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinooy Kan A.H.G.: Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey, Annals of Discrete Mathematics, vol. 5, 1979, pp. 287-326.
4. Janiak A.: Dokładne i przybliżone algorytmy szeregowania zadań i rozdziału zasobów w dyskretnych procesach przemysłowych. Monografie Nr 20, Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1991.
5. Wajs W.: Wielomianowy algorytm dla dynamicznego problemu sekwencyjnego, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, vol. 31/3, 1986, pp. 209-213.

Recenzent: Prof.dr hab.inż: J.Węglarz

Abstract

In the paper we considered the single machine scheduling problem for the makespan minimization. Job processing times are given as linear, nondecreasing functions dependent on the processing start time S_i and the amount of the allocated resources u_i, i.e. $p_i(S_i,u_i)=a_i+b_iS_i-a'_iu_i$, where a_i, b_i and a'_i denote the constant part, the growth rate and the resource consumption ratio, respectively. We transformed NP-complete Partition Problem (PP) to our problem under the consideration. The PP is defined as follows: given positive integers $X=\{x_1,\ldots,x_m\}$, $\sum_{i=1}^{m}x_i=2B$; does there exist a subset $Y\subset X=\{x_1,\ldots,x_m\}$ such that $\sum_{x_i\in Y}x_i=\sum_{x_i\in X\setminus Y}x_i=B$? Our problem consist of $n=m+1$ jobs, where the parameters of first m jobs, constructed on the given instance of PP were described as follows: $a_i=(1+8B^2)x_i$, $b_i=\frac{x_i}{2B^2}$, $a'_i=8B^2$, $\underline{u}_i=0$, $\overline{u}_i=x_i$ $(i=1,\ldots,m)$ and the parameters of the extra job, were given as: $a_e=16B^5$, $b_e=2B^2$, $a'_e=0$, $\underline{u}_i=0$, $\overline{u}_i=0$. The numbers $\overline{U}$ and y were given as B and $16B^5-4B^4+6B^3+16B^2+11B+9$, respectively. On the basis of the transformation given above, we proved that the considered problem is NP-complete.