ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 129 Nr kol.1474

Daniel IWANOWSKI, Adam JANIAK
Politechnika Wrocławska

JEDNOMASZYNOWE PROBLEMY SZEREGOWANIA ZADAŃ ZE ZMIENNYMI CZASAMI WYKONANIA – PODEJŚCIE DWUKRYTERIALNE

Streszczenie. W pracy badane są jednomaszynowe problemy szeregowania zadań z czasami wykonania zależnymi od momentów rozpoczęcia oraz ilości dostarczonych zasobów. Wykazano, że jeśli problem minimalizacji kryteriów czasowych takich jak długość uszeregowania oraz całkowity czas zakończenia wszystkich zadań przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobów jest problemem wielomianowym, a także odpowiadający mu problem minimalizacji całkowitej ilości zasobu przy ograniczeniu na odpowiednie kryterium czasowe jest problemem wielomianowym, to możliwe jest skonstruowanie zbioru rozwiązań Pareto optymalnych (podejście dwukryterialne) również w czasie wielomianowym.

SINGLE MACHINE JOB SCHEDULING PROBLEMS WITH VARIABLE EXECUTION TIMES – BICRITERIONAL APPROACH

Summary. The single machine job scheduling problems with time and resource dependent execution times are examined in this paper. We proved, that if the problem of minimizing criteria such as the makespan and total completion time with constrained value of total amount of resources available could be solved in polynomial time as well as corresponding version of this problem, where the total resource consumption is minimised subject to a given constraint on a time criterion, then the set of Pareto optimal solutions (bicriterional approach) can be easily constructed in polynomial time.

1. Wstęp

Jednomaszynowe problemy szeregowania zadań z czasami ich wykonania zależnymi od momentów rozpoczęcia wykonywania i dostarczonych zasobów są stosunkowo nową dziedziną wchodzącą w skład teorii szeregowania zadań ze zmiennymi czasami wykonania. Modele z czasami wykonywania zadań zależnymi od momentów rozpoczęcia wykonywania zostały po raz pierwszy wprowadzone w [7]. Niektóre z nich w połączeniu z określonymi kryteriami są NP-zupełne ([2]), dla innych istnieją algorytmy wielomianowe ([5], [7], [8]). Zmienne czasy wykonywania zadań zależne od ilości dostarczonych zasobów pojawiły się po raz pierwszy w [6], natomiast jednoczesna zależność czasu wykonywania zadania od jego momentu rozpoczęcia i dostarczonych zasobów jest badana dopiero od dwóch lat ([1]).

W niniejszej pracy zajmiemy się problemami, w których czas wykonania i-tego zadania w ustalonej sekwencji zadań π jest zależny liniowo zarówno od momentu rozpoczęcia wykonywania tego zadania (im później rozpocznie się wykonywanie zadania, tym czas jego wykonywania zadania będzie dłuższy), jak i od ilości dostarczonego zasobu (im więcej zasobu zostanie dostarczone, tym czas wykonywania zadania będzie krótszy).

W literaturze poświęconej opisywanej problematyce wykazana została NP-zupełność ogólnej wersji tego problemu dla kryterium minimalizacji maksymalnego czasu zakończenia wykonywania zadań ($C_{\max}$) przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu ($\sum u_i$) ([1]). Istnieją również prace, w których badane były pewne wielomianowo rozwiązywalne przypadki szczególne tego problemu dla kryteriów minimalizacji maksymalnego czasu zakończenia oraz sumy czasów zakończenia wszystkich zadań ($\sum C_i$) przy zadanym ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu, a także problemu odwrotnego, tzn. minimalizacji całkowitej ilości zasobów w taki sposób, aby ograniczenie na przyjęte kryterium czasowe było spełnione ([3], [4]).

W niniejszej pracy pokażemy, że jeśli pewien problem szeregowania zadań P o czasach wykonania zależnych liniowo od momentu rozpoczęcia i dostarczonych zasobów przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu i kryterium $C_{\max}$ lub $\sum C_i$ daje się rozwiązać w czasie wielomianowym, a także jeśli symetryczna wersja tego problemu P', polegająca na minimalizacji globalnej wykorzystywanej ilości zasobu przy ograniczonej z góry wartości kryterium $C_{\max}$ lub $\sum C_i$ jest rozwiązywalna w czasie wielomianowym, to w takiej sytuacji możliwe jest skonstruowanie zbioru rozwiązań Pareto optymalnych również w czasie wielomianowym ze względu na liczbę zadań. Podane zostaną algorytmy konstrukcji takich zbiorów dla kryteriów $C_{\max} \wedge \sum u_i$ oraz $\sum C_i \wedge \sum u_i$.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest zbiór n niezależnych i nieprzerywalnych zadań. Przez $J = \{1,2,\ldots,n-1,n\}$ będziemy oznaczać dalej zbiór indeksów tych zadań. Niech S_i oznacza moment rozpoczęcia wykonywania zadania o indeksie $i \in J$, p_i - czas wykonywania zadania, C_i - czas zakończenia wykonywania zadania, $\underline{u}_i$ - dolne ograniczenie na ilość zasobu dostarczonego do zadania, $\overline{u}_i$ - górne ograniczenie na ilość zasobu dostarczonego do zadania oraz u_i - ilość zasobu, która została przydzielona do zadania ($\underline{u}_i \le u_i \le \overline{u}_i$) (bez utraty ogólności możemy przyjąć tutaj założenie, że $\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} \underline{u}_i = 0$). Niech $U \overset{\Delta}{=} \{u \in \Re^n : \forall_{1\le i\le n} 0 \le u_i \le \overline{u}_i\}$ będzie zbiorem wszystkich dopuszczalnych rozdziałów zasobu $u = [u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n]$. Przez $\hat{R}$ oznaczymy wartość całkowitej dostępnej ilości zasobu w problemach minimalizacji wartości jednego z kryteriów czasowych (sumaryczna ilość zasobu przydzielona do wszystkich zadań nie może przekroczyć tej wartości). Dla każdego z zadań o indeksie $i \in J$ dane są trzy ustalone parametry $a_i \geq 0$, $b_i > 0$ oraz $a_i^{'} > 0$, które służą do zdefiniowania zależności pomiędzy czasem wykonywania i-tego zadania w sekwencji wyznaczonej przez pewną permutację indeksów zadań $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$, $\pi \in \Pi$ (Π jest zbiorem wszystkich dopuszczalnych permutacji) a momentem rozpoczęcia wykonywania i ilością dostarczonego zasobu (tzn. modelu zadania). Zależność ta jest następująca:

$$p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)} S_{\pi(i)} - a_{\pi(i)}^{'} u_{\pi(i)}.$$

Rozwiązanie problemu szeregowania zadań z czasami wykonywania zależnymi od momentów rozpoczęcia i dostarczonych zasobów jest jednoznacznie określone przez permutację $\pi \in \Pi$ na zbiorze indeksów J, opisującą kolejność wykonywania zadań oraz wektor $u = [u_1, \ldots, u_n]$, definiujący rozdział zasobu pomiędzy poszczególne zadania ($u \in U$).

Problem minimalizacji kryterium $C_{\max}$ przy ograniczeniu $\hat{R}$ na całkowitą dostępną ilość zasobu ($\sum u_i \leq \hat{R}$) jest problemem NP-zupełnym ([1]), znane są jednak liczne przypadki szczególne ([3],[4]), w których przy założeniu pewnych specyficznych związków pomiędzy wartościami parametrów a_i, b_i oraz $a_i^{'}$ można znaleźć rozwiązanie optymalne w czasie wielomianowym. Podobnie jest z problemem minimalizacji sumy czasów zakończenia wykonywania wszystkich zadań $\sum C_i$ przy ograniczeniu $\hat{R}$ na całkowitą dostępną ilość zasobu $\sum u_i$ - złożoność obliczeniowa ogólnej wersji tego problemu nie jest znana, natomiast dla licznych przypadków szczególnych istnieją algorytmy wielomianowe ([3]).

Załóżmy, że dany jest dowolny przypadek szczególny, dla którego w czasie wielomianowym potrafimy znaleźć rozwiązanie: $\pi \in \Pi$ i $u \in U$, gdzie przy zadanym ograniczeniu $\hat{R}$ na globalną dostępną ilość zasobu $\sum u_i$ pewne kryterium czasowe $T \in \{C_{\max}, \sum C_i\}$ przyjmuje wartość minimalną. Załóżmy także, że dla tego samego zbioru zadań w czasie wielomianowym potrafimy znaleźć rozwiązanie $\pi^{'} \in \Pi$ oraz $u^{'} \in U$, minimalizujące całkowitą wykorzystywaną ilość zasobu $\sum u_i^{'}$ przy zadanym ograniczeniu na wartość kryterium czasowego T (tzn. dla problemu odwrotnego do pierwotnego), przy czym zakładamy, że zachodzi $\pi = \pi^{'}$, a skonstruowany rozdział zasobu w obu przypadkach spełnia następujące warunki:

- $(u_{\pi(k)}^{'} = \overline{u}_{\pi(k)}^{'}) \Rightarrow \forall_{i \in \{1,\ldots,k-1\}} (u_{\pi(i)}^{'} = \overline{u}_{\pi(i)}^{'})$, (1)

- $(u_{\pi(k)}^{'} = \underline{u}_{\pi(k)}) \Rightarrow \forall_{i \in \{k+1,\ldots,n\}} (u_{\pi(i)}^{'} = \underline{u}_{\pi(i)})$, (2)

- $\exists_{k \in \{1,\ldots,n\}} (\underline{u}_{\pi(k)} < u_{\pi(k)}^{'} < \overline{u}_{\pi(k)}^{'}) \Rightarrow \forall_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}} u_{\pi(i)}^{'} = \begin{cases} \underline{u}_{\pi(i)}, & i < k, \\ \overline{u}_{\pi(i)}^{'}, & i > k. \end{cases}$ (3)

Pokażemy, w jaki sposób przy powyższych założeniach można w czasie wielomianowym skonstruować zbiór rozwiązań Pareto optymalnych. Należy tutaj podkreślić, że bardzo wiele znanych wielomianowo rozwiązywalnych przypadków szczególnych rozpatrywanych tutaj problemów spełnia podane wyżej warunki ([3], [4]).

3. Zbiór rozwiązań Pareto optymalnych

Dla porządku w niniejszym rozdziale przypomnimy w skrócie definicje pewnych pojęć związanych z wielokryterialnym podejściem w teorii szeregowania zadań. Przez T oznaczać będziemy dalej dowolne z kryteriów czasowych $C_{\max}$ lub $\sum C_i$.

Zdefiniujmy zbiór $UP \stackrel{\Delta}{=} \left\{\left(T(\pi,u), \sum_{i=1}^{n} u_i\right) : \pi \in \Pi, u \in U\right\}$. Punkt $(C,R) \in UP$ jest punktem kompromisowym w przestrzeni wartości funkcji kryterialnych, jeżeli nie istnieje żaden inny punkt $(C^{'},R^{'}) \in UP$ taki, że $C^{'} \le C$, $R^{'} \le R$ i przynajmniej jedna z tych nierówności jest ostra. Niech $K \subseteq UP$ będzie zbiorem wszystkich punktów kompromisowych pomiędzy przeciwstawnymi kryteriami T oraz $\sum u_i$. Rozwiązanie (π,u) odpowiadające punktowi kompromisowemu $(C,R) \in K$ nazywane jest rozwiązaniem efektywnym (Pareto optymalnym). Innymi słowy, rozwiązanie (π,u), przy równoczesnej minimalizacji kryteriów T i $\sum u_i$, jest efektywne, jeżeli nie istnieje żadne inne rozwiązanie $(\pi^{'},u^{'})$ takie, że następujące nierówności są spełnione: $T(\pi^{'},u^{'}) \le T(\pi,u)$ oraz $\sum_{i=1}^{n} u_i^{'} \le \sum_{i=1}^{n} u_i$ i przynajmniej jedna z nich jest ostrą nierównością.

4. Problem minimalizacji $C_{\max} \wedge \sum u_i$

Jak już wspomnieliśmy w rozdziale drugim, zajmować się będziemy problemami, które spełniają pewne specyficzne założenia, tzn. rozwiązanie $\pi \in \Pi$ i $u \in U$ problemu minimalizacji $C_{\max}$ przy ograniczeniu na wartość $\sum u_i$ można znaleźć w czasie wielomianowym, przy czym wektor u spełnia warunki określone wzorami (1)-(3). Dodatkowym założeniem jest możliwość minimalizacji $\sum u_i$ przy ograniczeniu na $C_{\max}$ również w czasie wielomianowym. Rozwiązanie problemu odwrotnego $\pi^{*} \in \Pi$ i $u^{*} \in U$ ma taką postać, że $\pi^{*} = \pi$, a wektor u^{*} również spełnia warunki określone wzorami (1)-(3). Sytuacja taka wynika z faktu, że wybór optymalnej permutacji indeksów zadań $\pi^{*} = \pi$ w żaden sposób nie zależy od $\hat{R}$, gdy minimalizujemy $C_{\max}$ i odpowiednio nie jest uzależniony od $\hat{C}$, gdy minimalizowana jest wartość $\sum u_i$. Z tych też powodów możemy znacznie uprościć zadanie konstrukcji zbioru rozwiązań Pareto optymalnych: skoro dla dowolnej ilości zasobu optymalna permutacja jest zawsze taka sama, permutacja ta będzie wspólna dla wszystkich punktów kompromisowych. Można ją wyznaczyć rozwiązując problem

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)}S_{\pi(i)} - a^{'}_{\pi(i)}u_{\pi(i)}; \sum u_i \le \hat{R}\right|C_{\max},$$

co z założenia możemy zrobić wykonując wielomianową liczbę kroków względem n. Po rozwiązaniu tego problemu w dalszych rozważaniach uszeregowanie zadań π jest ustalone i zajmujemy się jedynie konstrukcją optymalnego rozdziału zasobu.

Pomimo przyjętych ograniczeń uzyskany wynik ma duże znaczenie praktyczne. Ogólna wersja problemu minimalizacji $C_{\max}$ przy ograniczeniu na wartość $\sum u_i$ jest NP-zupełna, istnieje jednak spora grupa przypadków szczególnych, które dają się rozwiązać w czasie wielomianowym i jednocześnie spełniają narzucone wcześniej ograniczenia, na przykład przypadki takie jak:

- $1\left|p_i(S_i,u_i)=b_iS_i-kb_iu_i;b_i\geq 1;k>0;\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|C_{\max}$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i)=a+bS_i-a_i'u_i;\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|C_{\max}$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i)=a+b_iS_i-a'u_i;\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|C_{\max}$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i)=a_i+ka_iS_i-a'u_i;k>0;\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|C_{\max}$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i)=b_iS_i-a_i'u_i;\bar{u}_i=\bar{u};\bar{u}\leq\min_{i=1,\dots,n}\dfrac{b_iC_0}{a_i'};\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|C_{\max}$.

Wielomianowe algorytmy konstruujące optymalne uszeregowanie i rozdział zasobu wraz z dowodami poprawności dla tych i innych przypadków szczególnych można znaleźć np. w pracach [3] i [4].

Ostatecznie zatem, aby znaleźć zbiór wszystkich punktów kompromisowych i rozwiązań efektywnych dla problemu:

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)})=a_{\pi(i)}+b_{\pi(i)}S_{\pi(i)}-a_{\pi(i)}'u_{\pi(i)}\right|C_{\max}\wedge\sum u_i,$$

należy rozwiązać problem

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)})=a_{\pi(i)}+b_{\pi(i)}S_{\pi(i)}-a_{\pi(i)}'u_{\pi(i)};\pi-ustalone;C_{\max}\leq\hat{C}\right|\sum u_i$$

dla wszystkich wartości $\hat{C}$ z przedziału $[C_{\max}^{\min},C_{\max}^{\max}]$, gdzie $C_{\max}^{\min}\overset{\Delta}{=}\min_{\pi\in\Pi}C_{\max}\left(\pi,\sum\bar{u}_i\right)$, a $C_{\max}^{\max}\overset{\Delta}{=}\min_{\pi\in\Pi}C_{\max}\left(\pi,\sum\underline{u}_i\right)$.

Warunki dotyczące rozdziału zasobu określone wzorami (1)-(3) stanowią jednoznacznie, że przy optymalnym uszeregowaniu algorytm optymalnego rozdziału zasobu polega na przydzielaniu zasobu kolejnym zadaniom w sekwencji aż do wyczerpania całkowitej ilości zasobu lub przydzieleniu do wszystkich zadań maksymalnej możliwej jego ilości. Z tego powodu przy określonej z góry całkowitej ilości zasobu, a także ze względu na fakt, że permutacja indeksów zadań π jest ustalona i taka sama dla wszystkich punktów kompromisowych, sposób rozdziału zasobu jest jednoznaczny. W takiej sytuacji możemy odwrócić zależność w celu uproszczenia końcowej postaci wyniku i badać, jak zmienia się wartość C_{max} wraz ze wzrostem całkowitej ilości zasobu, czyli, innymi słowy, rozwiązać problem

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)})=a_{\pi(i)}+b_{\pi(i)}S_{\pi(i)}-a'_{\pi(i)}u_{\pi(i)};\pi-ustalone;\sum u_i\leq\hat{R}\right|C_{max}$$

dla różnych wartości $\hat{R}$ z przedziału $[\sum_{i=1}^{n}\underline{u}_i,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]=[0,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]$ (oczywiście w ogólnym przypadku przy stosowaniu podejścia dwukryterialnego taki sposób konstrukcji nie gwarantuje uzyskania w wyniku zbioru punktów kompromisowych – ze względu na możliwą niejednoznaczność rozdziału zasobu, jednak w przypadku przez nas rozważanym zważywszy na postać problemu oraz nałożone dodatkowe ograniczenia na sposób rozdziału zasobu nie niesie to ze sobą żadnych negatywnych konsekwencji).

W tym momencie łatwo już zauważyć, że jeśli problem spełnia wszystkie przedstawione własności, to zbiór rozwiązań Pareto optymalnych opisany jest funkcją przedziałami liniową o dziedzinie $[0,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]$ i przeciwdziedzinie $[C_{max}^{min},\ C_{max}^{max}]$, przy czym k-ty przedział liniowości tej funkcji będzie równy $[R^{k-1},\ R^k]=[\sum_{i=1}^{k-1}\overline{u}_i,\ \sum_{i=1}^{k}\overline{u}_i]$, a jego zbiorem wartości będzie $[C_{max}^{k-1},\ C_{max}^{k}]=[C_{max}\left(\pi,\sum_{i=1}^{k-1}\overline{u}_i\right),\ C_{max}\left(\pi,\sum_{i=1}^{k}\overline{u}_i\right)]$. Pozostaje nam jedynie podać odpowiednie wzory definiujące funkcję opisującą zbiór rozwiązań Pareto optymalnych.

W punkcie $\left(C_{max}^0, R^0\right)$ całkowita ilość przydzielonych zasobów R^0 równa jest 0, a zatem wartość C_{max}^0 możemy obliczyć z następującego wzoru:

$$C_{max}^0=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{\pi(i)}\prod_{j=i+1}^{n}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)+C_0\prod_{i=1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right). \tag{4}$$

Podobnie, wiedząc, że $R^1=\overline{u}_{\pi(1)}$, obliczamy wartość C_{max}^1:

$$C_{max}^1=C_{max}^0-\prod_{j=2}^{n}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\cdot a'_{\pi(1)}\overline{u}_{\pi(1)}. \tag{5}$$

Postępując analogicznie możemy w sposób ogólny wyznaczyć współrzędne dowolnego punktu $\left(C_{max}^k, R^k\right)$:

$$R^k=\sum_{i=1}^{k}\overline{u}_{\pi(i)}, \tag{6}$$

$$C_{max}^k=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{\pi(i)}\prod_{j=i+1}^{n}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)+C_0\prod_{i=1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right)-\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{n}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\cdot a'_{\pi(i)}\overline{u}_{\pi(i)}\right) \tag{7}$$

$$k=0,1,\ldots n-1,n.$$

Wszystkie punkty $\left(C_{max}^k, R^k\right)$ dla $k\in\{0,1,\ldots,n-1,n\}$ można wyznaczyć w czasie wielomianowym (permutację π możemy znaleźć w czasie wielomianowym z założenia – złożoność obliczeniowa jej znalezienia zależy od konkretnego przypadku szczególnego, a znalezienie $n+1$ punktów wymaga wykonania $O\left(n^3\right)$ operacji przy zastosowaniu wzorów (6) i (7)). Pozostaje zatem do wyznaczenia n funkcji liniowych, opisujących zbiór rozwiązań

Pareto optymalnych w poszczególnych przedziałach pomiędzy punktami $\left(C_{\max}^{k}, R^{k}\right)$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1,n\}$. Ponieważ dla k-tego przedziału znamy wartość funkcji f_k w obu skrajnych punktach tego przedziału ($f_k(R_{k-1}) = C_{k-1}$ i $f_k(R_k) = C_k$), możemy podać jednoznaczny wzór na funkcję f_k (wiemy na pewno, że funkcje f_k, $k \in \{1,2,\ldots,n-1,n\}$ są liniowe – wynika to z faktu, że czasy wykonania wszystkich zadań zależą liniowo od momentów ich rozpoczęcia i dostarczonych zasobów, po ich złożeniu liniowość jest zachowywana):

$$\begin{aligned} f_k(x) = {} & \sum_{i=1}^{n}\left(a_{\pi(i)}\prod_{j=i+1}^{n}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right) + C_0\prod_{i=1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right) - \sum_{i=1}^{k-1}\left(a'_{\pi(i)}\overline{u}_i\prod_{j=i+1}^{k}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right) + \\ & \left(a'_{\pi(k)}\prod_{i=k+1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right)\right)\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{u}_{\pi(k)}\right) - x\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Ogólnie zatem zbiór rozwiązań Pareto optymalnych dla rozważanego problemu dany jest funkcją $\mathrm{P}:[0,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i] \mapsto [C_{\max}^{\min},\ C_{\max}^{\max}]$ przedziałami liniową, której definicja jest następująca:

$$\mathrm{P}(x) = \begin{cases} f_1(x), & x = 0, \\ f_k(x), & x \in \left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{u}_{\pi(i)}, \sum_{i=1}^{k}\overline{u}_{\pi(i)}\right], \end{cases} \tag{9}$$

gdzie funkcje $f_k(x)$, $k \in \{1,2,\ldots,n-1,n\}$ określone są wzorem (8).

5. Problem minimalizacji $\sum C_i \wedge \sum u_i$

Zakładamy, że problemy szeregowania, którymi będziemy się teraz zajmować, spełniają dodatkowe założenia opisane w rozdziale drugim. Mamy zatem sytuację analogiczną do przedstawionej w rozdziale 4 – dokładnie z tych samych przyczyn możemy najpierw wyznaczyć pewną permutację π, która będzie optymalna dla całego zbioru punktów kompromisowych, a następnie skupić się wyłącznie na konstruowaniu optymalnych rozdziałów zasobów. W tym celu rozwiązujemy problem

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)}S_{\pi(i)} - a'_{\pi(i)}u_{\pi(i)}; \sum u_i \le \hat{R}\right|\sum C_i$$

dla dowolnej wartości $\hat{R}$ z przedziału $[\sum_{i=1}^{n}\underline{u}_i,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i] = [0,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]$, co z założenia możemy zrobić w czasie wielomianowym. Permutacja indeksów zadań π, będąca składnikiem rozwiązania tego problemu, jest jednocześnie permutacją optymalną w każdym z dalej rozważanych przypadków. Dalsze postępowanie jest również podobne do przypadku z kryterium $C_{\max} \wedge \sum u_i$.

Jako dodatkowy komentarz można w tym momencie podać kilka przykładów szczególnych przypadków problemów minimalizacji całkowitego czasu wykonywania zadań przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu, które można rozwiązać w czasie wielomianowym i które spełniają przyjęte przez nas założenia:

- $1\left|p_i(S_i,u_i)=a_i+ka_iS_i-a^{'}u_i;k>0;\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|\sum C_i$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i)=a_i+bS_i-a^{'}u_i;\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|\sum C_i$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i)=b_iS_i-a^{'}u_i;\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|\sum C_i$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i)=b_iS_i-kb_iu_i;\forall_{i\in\{1,\dots,n\}}b_i\geq 1;k>0;\sum_{i=1}^{n}u_i\leq\hat{R}\right|\sum C_i$.

Te i inne przypadki zostały w wyczerpujący sposób omówione w [3], gdzie można znaleźć również algorytmy znajdujące optymalne uszeregowanie i rozdział zasobu w czasie wielomianowym względem liczby zadań.

Aby znaleźć zbiór wszystkich punktów kompromisowych i rozwiązań efektywnych dla rozważanego w tym rozdziale problemu

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)})=a_{\pi(i)}+b_{\pi(i)}S_{\pi(i)}-a^{'}_{\pi(i)}u_{\pi(i)}\right|\sum C_i\wedge\sum u_i,$$

należy rozwiązać problem

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)})=a_{\pi(i)}+b_{\pi(i)}S_{\pi(i)}-a^{'}_{\pi(i)}u_{\pi(i)};\pi-ustalone;\sum C_i\leq\hat{C}\right|\sum u_i$$

dla wszystkich wartości $\hat{C}$ z przedziału $[\sum C_i^{\min},\ \sum C_i^{\max}]$,

gdzie $\sum C_i^{\min}\stackrel{\Delta}{=}\min_{\pi\in\Pi}\sum C_i\left(\pi,\sum\overline{u}_i\right)$ a $\sum C_i^{\max}\stackrel{\Delta}{=}\min_{\pi\in\Pi}\sum C_i\left(\pi,\sum\underline{u}_i\right)$.

Podobnie jak dla kryterium $C_{\max}\wedge\sum u_i$ łatwo można zauważyć, że jeśli problem spełnia wszystkie własności opisane w rozdziale 2, to przy ustalonej permutacji i całkowitej dostępnej ilości zasobu rozdział zasobu pomiędzy poszczególne zadania jest jednoznaczny (wzory (1)-(3)). Możemy zatem zająć się problemem odwrotnym, tzn.

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)})=a_{\pi(i)}+b_{\pi(i)}S_{\pi(i)}-a^{'}_{\pi(i)}u_{\pi(i)};\pi-ustalone;\sum u_i\leq\hat{R}\right|\sum C_i$$

dla różnych wartości $\hat{R}$ z przedziału $[\sum_{i=1}^{n}\underline{u}_i,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]=[0,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]$, co pozwoli znacząco uprościć postać wyniku końcowego.

Wiemy zatem, że zbiór rozwiązań Pareto optymalnych opisany jest funkcją przedziałami liniową o dziedzinie $[\sum_{i=1}^{n}\underline{u}_i,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]=[0,\ \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]$ i przeciwdziedzinie $[\sum C_i^{\min},\ \sum C_i^{\max}]$, przy czym k-ty przedział liniowości tej funkcji będzie równy $[R^{k-1},\ R^k]=[\sum_{i=1}^{k-1}\overline{u}_i,\ \sum_{i=1}^{k}\overline{u}_i]$, a zbiorem wartości dla funkcji liniowej w tym przedziale będzie odpowiednio $[\sum C_i^{k-1},\ \sum C_i^k]=[\sum C_i\left(\pi,\sum_{i=1}^{k-1}\overline{u}_i\right),\ \sum C_i\left(\pi,\sum_{i=1}^{k}\overline{u}_i\right)]$. Do określenia pozostają nam zatem jedynie wzory definiujące funkcję opisującą zbiór rozwiązań Pareto optymalnych. W tym przypadku, podobnie jak w rozdziale czwartym, korzystając z postaci funkcji opisujących czasy wykonania poszczególnych zadań i dokonując prostych przekształceń możemy uzyskać wzory na współrzędne n+1 punktów określających n przedziałów liniowości funkcji wyznaczającej zbiór rozwiązań Pareto optymalnych:

$$R^k = \sum_{i=1}^{k} \overline{u}_{\pi(i)}, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\sum C_i^k = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{\pi(i)}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\left(\prod_{l=i+1}^{j}\left(1+b_{\pi(l)}\right)\right)\right)\right)+C_0\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)- \\ \sum_{i=1}^{k}\left(a'_{\pi(i)}\overline{u}_{\pi(i)}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\left(\prod_{l=i+1}^{j}\left(1+b_{\pi(l)}\right)\right)\right)\right),\end{gathered} \tag{11}$$

$$k = 0,1,\ldots n-1, n.$$

Analogicznie do przypadku kryterium $C_{\max} \wedge \sum u_i$ powyższe n+1 punktów można skonstruować w czasie wielomianowym (stosując wzory (10) i (11) można to zrobić wykonując $O(n^4)$ kroków). Funkcje liniowe opisujące zbiór rozwiązań Pareto optymalnych w poszczególnych przedziałach $f_k^*(x)$, $k = 0,1,\ldots,n-1,n$ można również wyznaczyć w sposób podobny, jak zostało to zrobione dla problemu rozpatrywanego w rozdziale poprzednim, tzn.:

$$\begin{gathered}f_k^*(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_{\pi(i)}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\left(\prod_{l=i+1}^{j}\left(1+b_{\pi(l)}\right)\right)\right)\right)+C_0\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{i}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)- \\ \sum_{i=1}^{k-1}\left(a'_{\pi(i)}\overline{u}_{\pi(i)}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\left(\prod_{l=i+1}^{j}\left(1+b_{\pi(l)}\right)\right)\right)\right)+ \\ a'_{\pi(k)}\left(1+\sum_{i=k+1}^{n}\left(\prod_{j=k+1}^{i}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)\right)\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{u}_{\pi(i)}\right)-x\right)\end{gathered} \tag{12}$$

Ogólnie zatem zbiór rozwiązań Pareto optymalnych dla rozważanego problemu dany jest funkcją $\mathrm{P}^* : [0, \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i] \mapsto [\sum C_i^{\min}, \sum C_i^{\max}]$ przedziałami liniową, której definicja jest następująca:

$$\mathrm{P}^*(x)=\begin{cases} f_1^*(x), & x=0, \\ f_k^*(x), & x \in \left(\sum_{i=1}^{k-1}\overline{u}_{\pi(i)}, \sum_{i=1}^{k}\overline{u}_{\pi(i)}\right] \end{cases} \tag{13}$$

gdzie funkcje $f_k^*(x)$, $k \in \{0,1,\ldots,n-1,n\}$ określone są wzorem (12).

6. Wnioski końcowe

Podane zostały wzory opisujące funkcje P oraz P^* definiujące zbiory rozwiązań Pareto optymalnych odpowiednio dla kryteriów $C_{\max} \wedge \sum u_i$ oraz $\sum C_i \wedge \sum u_i$, pozwalające dla dowolnej ilości zasobu z przedziału od 0 do $\sum_{i=1}^{n} \overline{u}_{\pi(i)}$ obliczyć optymalną wartość odpowiedniego kryterium czasowego, wykonując wielomianową liczbę operacji względem ilości zadań. Jeżeli zajdzie taka potrzeba, to można z tych wzorów w prosty sposób uzyskać także $\mathrm{P}^{-1} : [C_{\max}^{\min}, C_{\max}^{\max}] \mapsto [0, \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i]$ oraz $\mathrm{P}^{*-1} : [\sum C_i^{\min}, \sum C_i^{\max}] \mapsto [0, \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i]$ pozwalające znajdować optymalną ilość zasobu dla ustalonej wartości odpowiedniego kryterium czasowego. Dla problemów rozważanych w niniejszej pracy obie możliwości nie różnią się niczym, choć w przypadku ogólnym nie są one oczywiście równoważne; dodatkowo warto również wspomnieć w tym miejscu, że podanie jawnych wzorów na funkcje P^{-1} oraz P^{*-1} jest z przyczyn technicznych trudne, natomiast stosunkowo łatwo można obliczać ich wartości dysponując funkcjami P oraz P^*. W obydwu przypadkach zbiór rozwiązań Pareto optymalnych opisany jest przez funkcję przedziałami liniową składającą się z *n* przedziałów. Pomimo dodatkowych założeń przyjętych w rozdziale 2 (wzory (1)-(3) określające sposób rozdziału zasobu dla ustalonej sekwencji zadań) wyniki przedstawione w tej pracy wydają się być dość ogólne, ponieważ wszystkie szczególne przypadki jednokryterialnych problemów szeregowania zadań z czasami wykonania zależnymi od momentów rozpoczęcia i dostarczonych zasobów rozwiązywalne w czasie wielomianowym, znane w chwili obecnej, spełniają wszystkie opisane ograniczenia.

LITERATURA

1. Bachman A., Janiak A.: Single machine scheduling problems with deteriorating jobs dependent on resources, Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, s. Preprinty nr 77/98, Wrocław 1998 (artykuł rozpatrywany w International Transaction in Operations Research):
2. Ho K. I-J., Leung J. Y-T., Wei W-D.: Complexity of scheduling tasks with time-dependent execution times, Information Processing Letters, 48/1993, str. 315-320.
3. Iwanowski D., Janiak A.: Szeregowanie zadań z czasami wykonania zależnymi od momentu rozpoczęcia i dostarczonego zasobu, Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, s. Preprinty nr 93/99, Wrocław 1999.
4. Iwanowski D., Janiak A., Rogala A.: Scheduling Jobs with Start Time and Resource Dependent Processing Times, Proceedings of SOR '99., Springer Verlag, Berlin 2000 (to appear).
5. Janiak A.: Wybrane problemy i algorytmy szeregowania zadań i rozdziału zasobów, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1999.
6. Janiak A., Grabowski J.: Optymalizacja sekwencji operacji z rozdziałem zasobów w dyskretnych procesach produkcyjnych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s. Automatyka, z. 54, Gliwice 1980, str. 67-74.
7. Melnikov O. I., Shafransky Y. M.: Parametric problem of scheduling theory, Kibernetika, nr 3/1979, str. 53-75 (praca w języku rosyjskim).
8. Mosheiov G.: Scheduling jobs under simple linear deterioration, Computers and Operations Research, vol. 21/1994, nr 6, str. 653-659.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. E.Toczyłowski

Abstract

The problems of scheduling jobs with start time dependent processing times have been examined since almost twenty years ([7]). Some special cases of these problems are NP-hard or even strongly NP-hard [2]. Some other special cases of dependence of job processing times

on their start times have effective optimal algorithms e.g.: for the makespan (C_{max}) or for the total completion time ($\sum C_i$) criteria ([5], [7], [8]).

There is a very similar situation in the literature related to the scheduling problems with resource dependent processing times. This kind of scheduling problems has been introduced in [6].

Both these models mentioned above can be connected in one very powerful model with many real applications (for instance in the metallurgical industry or in the loan repayments), where the job processing time depend on its start time and the quantity of resource allocated. Such a model has been introduced in [1], but with a special assumption, that the upper bound on the quantity of resource is the same for all the jobs. For three special cases of the model of execution times, i.e. $p_i(S_i,u_i)=a_i+bS_i-au$, $p_i(S_i,u_i)=a+b_iS_i-au_i$ and $p_i(S_i,u_i)=a+bS_i-a_iu_i$ polynomial algorithms has been constructed. The same model without mentioned restriction has been introduced and examined in [3].

In this paper, we improve and generalise the results presented in [1] and [4] for the makespan and the total completion time criteria. We show how to find the set of Pareto optimal solutions in polynomial time in the case, when we can minimise the time criterion under the constraint on the total resource consumption, and simultaneously we are able to find the minimal resource consumption subject to the constraint on a value of the time criterion.