ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 129 Nr kol. 1474

Daniel IWANOWSKI, Adam JANIAK
Politechnika Wrocławska

MINIMALIZACJA GLOBALNEJ ILOŚCI WYKORZYSTANYCH ZASOBÓW DLA JEDNOMASZYNOWYCH PROBLEMÓW SZEREGOWANIA ZADAŃ ZE ZMIENNYMI CZASAMI WYKONANIA

Streszczenie. W niniejszej pracy badane są jednomaszynowe problemy szeregowania zadań z czasami wykonania zależnymi od momentu rozpoczęcia wykonywania oraz ilości dostarczonego zasobu. Wykazano, że jeśli problem minimalizacji kryteriów czasowych takich jak długość uszeregowania oraz całkowity czas zakończenia wszystkich zadań przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu jest problemem wielomianowym, to odpowiadający mu problem minimalizacji całkowitej ilości zasobu przy ograniczeniu na odpowiednie kryterium czasowe jest również problemem wielomianowym.

MINIMIZING THE TOTAL RESOURCE CONSUMPTION FOR SINGLE MACHINE JOB SCHEDULING PROBLEMS WITH VARIABLE EXECUTION TIMES

Summary. The single machine job scheduling problems with time and resource dependent execution times have been examined in this paper. We proved, that if the problem of minimising the time criteria such as the makespan and the total completion time subject to a given constraint on the total resource consumption could be solved in polynomial time, then the corresponding problem of minimizing the total resource consumption subject to a given constraint on the value of the appropriate time criterion can be solved also in polynomial time.

1. Wstęp

Jednomaszynowe problemy szeregowania zadań z czasami wykonania zależnymi od momentu rozpoczęcia wykonywania i dostarczonego zasobu stanowią nową gałąź problematyki szeregowania zadań ze zmiennymi czasami wykonania. Model taki stanowi połączenie dwóch znanych już wcześniej modeli: takiego, w którym czasy wykonania uzależnione były od momentu rozpoczęcia (po raz pierwszy wprowadzony w [7], interesujące rezultaty można znaleźć np. w [2], [5], [8]) oraz modelu z czasami wykonania będącymi funkcjami dostarczonego zasobu (na przykład [5], [6]).

W niniejszej pracy będziemy zajmować się problemami, w których czas wykonania i-tego zadania w ustalonej sekwencji π dany jest w postaci liniowej funkcji momentu rozpoczęcia wykonywania i dostarczonego zasobu.

Przy podanych modelach czasów wykonania zadań w [1] wykazano NP-zupełność ogólnej wersji problemu minimalizacji maksymalnego czasu zakończenia przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu. Istnieją także prace ([3], [4]), w których badano pewne wielomianowo rozwiązywalne szczególne przypadki tego problemu dla kryteriów minimalizacji maksymalnego czasu zakończenia wykonywania zadań ($C_{\max}$) oraz sumy czasów zakończenia wykonywania wszystkich zadań ($\sum C_i$) przy zadanym ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu ($\sum u_i$).

W niniejszej pracy pokażemy, że jeśli pewien problem szeregowania zadań P o czasach wykonania zależnych liniowo od momentu rozpoczęcia i dostarczonego zasobu przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu i kryterium $C_{\max}$ lub $\sum C_i$ daje się rozwiązać w czasie wielomianowym, to także odwrotna wersja tego problemu P', polegająca na minimalizacji globalnej wykorzystywanej ilości zasobu przy ograniczonej z góry wartości kryterium $C_{\max}$ lub $\sum C_i$, jest rozwiązywalna w czasie wielomianowym. Podane zostaną algorytmy dla problemów P' przy ograniczeniach odpowiednio na $C_{\max}$ lub $\sum C_i$ wraz z dowodami poprawności, w których w istotny sposób korzystać się będzie z algorytmów dla odpowiednich problemów typu P. Wykazana zostanie wielomianowość tych algorytmów przy założeniu, że algorytmy dla P będą wielomianowe.

2. Sformułowanie problemu

Dany jest zbiór n niezależnych i niepodzielnych zadań. Niech $J = \{1,2,\dots,n-1,n\}$ oznacza zbiór indeksów tych zadań. Niech S_i oznacza moment rozpoczęcia wykonywania zadania o indeksie $i \in J$, p_i - czas jego wykonania, C_i - czas zakończenia jego wykonywania, $\underline{u}_i$ - dolne ograniczenie na ilość zasobu dostarczonego do i-tego zadania, $\overline{u}_i$ - górne ograniczenie na ilość zasobu dostarczonego do i-tego zadania oraz u_i - ilość zasobu, która została przydzielona ($\underline{u}_i \le u_i \le \overline{u}_i$). Bez utraty ogólności dalszych rozważań można przyjąć w tym miejscu założenie, że $\forall_{i \in \{1,\dots,n\}} \underline{u}_i = 0$. Niech $U \overset{\Delta}{=} \{u \in \Re^n : \forall_{1 \le i \le n} 0 \le u_i \le \overline{u}_i\}$ będzie zbiorem wszystkich dopuszczalnych rozdziałów zasobu $u = [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n]$. Przez $\hat{R}$ oznaczymy wartość całkowitej dostępnej ilości zasobu w problemach minimalizacji wartości jednego z kryteriów czasowych (sumaryczna ilość zasobu przydzielona do wszystkich zadań nie może przekroczyć tej wartości). Dodatkowo dla każdego z zadań o indeksie $i \in J$ dane są trzy ustalone parametry $a_i \ge 0$, $b_i > 0$ oraz $a_i' > 0$, które występują w następującym liniowym modelu czasu wykonania i-tego zadania w sekwencji wyznaczonej przez pewną permutację indeksów zadań $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$, $\pi \in \Pi$ (przez Π będziemy dalej oznaczać zbiór wszystkich dopuszczalnych permutacji indeksów):

$$p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)} S_{\pi(i)} - a'_{\pi(i)} u_{\pi(i)}.$$

Rozwiązanie problemu szeregowania zadań z czasami wykonania zależnymi od momentu rozpoczęcia i dostarczonego zasobu opisane jest przez permutację $\pi \in \Pi$ określoną na zbiorze indeksów J, determinującą kolejność wykonania zadań oraz wektor $u \in U$, przedstawiający przydział zasobu do poszczególnych zadań.

Problem minimalizacji kryterium $C_{\max}$ przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu ($\sum u_i \le \hat{R}$) jest problemem NP-zupełnym [1]. Można jednak podać liczne przypadki szczególne ([3],[4]), w których przy założeniu pewnych specyficznych związków pomiędzy wartościami parametrów a_i, b_i oraz $a_i^{'}$ można znaleźć rozwiązanie optymalne w czasie wielomianowym. Podobnie rzecz ma się w sytuacji, gdy minimalizujemy $\sum C_i$ przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu $\sum u_i$ (złożoność obliczeniowa wersji ogólnej problemu nie jest znana), a mianowicie w [3] podano algorytmy wielomianowe dla licznych przypadków szczególnych tego problemu.

W pracy tej pokażemy, że jeśli dany jest dowolny przypadek szczególny wielomianowo rozwiązywalny P opisywanego problemu, tzn. w czasie wielomianowym potrafimy zminimalizować wartość pewnego kryterium czasowego $T \in \{C_{\max}, \sum C_i\}$ znajdując permutację $\pi \in \Pi$ na zbiorze indeksów J określającą kolejność wykonania zadań oraz wektor rozdziału zasobu $u \in U$ i jeśli spełnione są pewne dodatkowe warunki (które szczegółowo zostaną opisane dalej), to w prosty sposób możemy w czasie wielomianowym znaleźć rozwiązanie odwrotnego do P problemu P', tzn. określić taką kolejność wykonania zadań $\pi^{'} \in \Pi$ oraz rozdział zasobu $u^{'} \in U$, aby spełnione było ograniczenie $T \le \hat{C}$ i jednocześnie wartość $\sum_{i=1}^{n} u_i^{'}$ była minimalna.

3. Ogólne własności problemu

Jeżeli znamy uszeregowanie π, rozdział zasobu u oraz wartość C_0, to wartość kryterium $T = C_{\max}$ w problemie P, oznaczanym w tzw. notacji trójpolowej [5] $1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)} S_{\pi(i)} - a_{\pi(i)}^{'} u_{\pi(i)}; \sum_{i=1}^{n} u_i \le \hat{R}\right| T$ możemy wyznaczyć w sposób następujący:

$$C_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_{\pi(i)} - a_{\pi(i)}^{'} \cdot u_{\pi(i)} \right) \cdot \prod_{j=i+1}^{n} \left(1 + b_{\pi(j)} \right) \right) + C_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(1 + b_{\pi(i)} \right) \tag{1}$$

Podobny wzór dla $T = \sum C_i$ wygląda następująco:

$$\sum C_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{i} \left(\left(a_{\pi(k)} - a_{\pi(k)}^{'} u_{\pi(k)} \right) \cdot \prod_{j=k+1}^{i} \left(1 + b_{\pi(j)} \right) \right) + C_0 \cdot \prod_{k=1}^{i} \left(1 + b_{\pi(k)} \right) \right). \tag{2}$$

Poprawność obydwu tych wzorów można uzasadnić trywialną indukcją względem n. Załóżmy, że uszeregowanie zadań π w problemie P jest ustalone i chcemy znaleźć optymalny rozdział zasobu minimalizujący wartość kryterium T. Przyjmijmy dodatkowo, że całkowita ilość zasobu ε, którą mamy do dyspozycji, spełnia następujący warunek:

$\forall_{i\in\{1,\dots,n\}}\varepsilon \le \overline{u}_i$. Przekształcając wzór (1) i zakładając, że przydzieliliśmy ε zasobu do $\pi(k)$-tego zadania w sekwencji ($1 \le k \le n$), otrzymujemy w efekcie następującą zależność:

$$C_{\max} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{\pi(i)} \cdot \prod_{j=i+1}^{n}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right) + C_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right) - a'_{\pi(k)} \cdot \prod_{i=k+1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right) \cdot \varepsilon.$$

Jako że naszym celem jest minimalizacja wartości $C_{\max}$, zasób należy przydzielić do tego zadania, dla którego wartość $a'_{\pi(k)} \cdot \prod_{i=k+1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right)$ jest największa ($1 \le k \le n$). To spostrzeżenie można uogólnić na dowolną ilość zasobu do rozdzielenia: należy zasób przydzielać do kolejnych zadań uporządkowanych malejąco według wartości współczynników $a'_{\pi(k)} \cdot \prod_{i=k+1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right)$.

Podobną regułę można uzyskać dla $T = \sum C_i$. Postępując w sposób analogiczny możemy wykazać, że dla ustalonej sekwencji π optymalny rozdział zasobu uzyskamy przydzielając zasób kolejno do zadań uporządkowanych malejąco według wartości współczynników $a'_{\pi(k)} \cdot \sum_{i=k+1}^{n}\left(\prod_{j=k+1}^{n}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)$.

Przedstawiona własność 1 jest spostrzeżeniem, będącym prostą konsekwencją zaprezentowanych wcześniej faktów.

Własność 1. *Niech wartość parametru $\hat{R}$ w problemie P spełnia następujący warunek: $0 < \hat{R} \le \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i$. Jeśli (π, u) jest rozwiązaniem optymalnym problemu P, to dla każdej wartości parametru $\hat{R} \in [\sum_{i=1}^{n}\underline{u}_i, \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i] \equiv [0, \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]$ istnieje rozwiązanie optymalne problemu P, w którym zadania będą uszeregowane zgodnie z permutacją π.*

Innymi słowy: dla ustalonego problemu P optymalne uszeregowanie zadań nie zależy od wartości ograniczenia $\hat{R}$, tzn. jeśli znajdziemy uszeregowanie optymalne dla pewnej wartości parametru $\hat{R}$ takiej, że $0 < \hat{R} \le \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i$, to będzie ono również optymalne dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametru $\hat{R}$.

Definicja 1. *Niech (π, u) będzie pewnym rozwiązaniem dopuszczalnym problemu P lub problemu dualnego P'. Rozdział zasobu $u \in U$ nazywamy rozdziałem kolejnościowym zasobu dla uszeregowania π, gdy wektor $u = [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n]$ spełnia następujące warunki:*

- $(u_{\pi(k)} = \overline{u}_{\pi(k)}) \Rightarrow \forall_{i\in\{1,\dots,k-1\}}(u_{\pi(i)} = \overline{u}_{\pi(i)})$,
- $(u_{\pi(k)} = \underline{u}_{\pi(k)}) \Rightarrow \forall_{i\in\{k+1,\dots,n\}}(u_{\pi(i)} = \underline{u}_{\pi(i)})$,
- $\exists_{k\in\{1,\dots,n\}}(\underline{u}_{\pi(k)} < u_{\pi(k)} < \overline{u}_{\pi(k)}) \Rightarrow \forall_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} u_{\pi(i)} = \begin{cases} \underline{u}_{\pi(i)}, & i > k, \\ \overline{u}_{\pi(i)}, & i < k. \end{cases}$

Twierdzenie 1. *Niech dla problemu P (zwanego pierwotnym):*

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)}S_{\pi(i)} - a'_{\pi(i)}u_{\pi(i)}; \sum_{i=1}^{n} u_i \le \hat{R}\right|T.$$

gdzie $T \in \{C_{\max}, \sum C_i\}$, *a* $\hat{R}$ *jest dowolną wartością z przedziału* $[0, \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i]$, *wartość optymalna funkcji celu będzie osiągana dla sekwencji zadań określonej przez permutację* $\pi \in \Pi$ *oraz dla rozdziału zasobu* $u \in U$. *Jeśli rozdział zasobu* u *jest rozdziałem kolejnościowym, to rozwiązanie optymalne* (π^{*}, u^{*}) *dla problemu P' (zwanego odwrotnym, lub inaczej dualnym), oznaczanego [5]:*

$$1 \left| p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)} S_{\pi(i)} - a^{*}_{\pi(i)} u_{\pi(i)}; T \le \hat{C} \right| \sum u_{\pi(i)},$$

składa się z sekwencji zadań opisanej przez permutację π *(tzn.* $\pi^{*} = \pi$ *), a zasób przydzielany jest kolejnym zadaniom, począwszy od pierwszego w sekwencji tak długo, jak długo* $T > \hat{C}$ *(oznacza to, że tak skonstruowany rozdział zasobu jest również rozdziałem kolejnościowym w sensie definicji 1).*

Zanim przedstawiony zostanie dowód twierdzenia 1, niezbędne jest wykazanie pewnych dodatkowych własności problemu o charakterze pomocniczym, z których będziemy korzystać w dalszych rozważaniach.

Własność 2. *Niech dla problemu dualnego (odwrotnego) P':*

$$1 \left| p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)} S_{\pi(i)} - a^{*}_{\pi(i)} u_{\pi(i)}; T \le \hat{C} \right| \sum u_{\pi(i)},$$

gdzie $T \in \{C_{\max}, \sum C_i\}$, *rozwiązanie optymalne osiągane będzie dla sekwencji zadań określonej przez permutację* $\pi^{*} \in \Pi$ *oraz rozdziału zasobu* $u^{*} \in U$, *gdzie* $\sum_{i=1}^{n} u^{*}_{\pi(i)} > 0$. *Wtedy rozwiązanie optymalne* (π, u) *dla problemu pierwotnego P:*

$$1 \left| p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)} S_{\pi(i)} - a^{*}_{\pi(i)} u_{\pi(i)}; \sum_{i=1}^{n} u_i \le \hat{R} \right| T,$$

gdzie $\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} u^{*}_{\pi(i)}$ *uzyskujemy dla tej samej sekwencji zadań* $\pi^{*} \in \Pi$ *i tego samego rozdziału zasobu* $u^{*} \in U$ *(tzn.* $\pi^{*} = \pi$ *i* $u^{*} = u$*), a wartość kryterium T będzie równa wartości ograniczenia* $\hat{C}$ *w problemie P'.*

Dowód. Jeżeli w problemie P' ilość wykorzystanego zasobu $\sum_{i=1}^{n} u^{*}_{\pi(i)}$ jest zgodnie z przyjętym założeniem ostro większa od 0, oznacza to, że bez przydzielania zasobu do zadań zawsze spełniona będzie nierówność $T > \hat{C}$. Z drugiej strony wiemy, że zmniejszanie całkowitej ilości zasobu rozdzielonej pomiędzy zadania (o ile jest taka możliwość) powoduje, że wartość T wzrasta. Gdyby zatem dla pewnego rozwiązania spełniona była nierówność $T < \hat{C}$, znaczyłoby to, że rozwiązanie to nie jest optymalne (zwiększając bowiem wartość T tak, aby zachodziła równość, można zmniejszyć wartość kryterium $\sum u_{\pi(i)}$). Wykazaliśmy zatem, że w opisywanym przypadku dla rozwiązania optymalnego (π^{*}, u^{*}) problemu P' zachodzić musi równość $T = \hat{C}$.

Ponieważ założyliśmy, że $(\pi^{'}, u^{'})$ jest rozwiązaniem optymalnym dla problemu P', wiemy również, że dla problemu P przy ograniczeniu $\hat{R}^{'} = \sum_{i=1}^{n} u^{'}_{\pi^{'}(i)}$ i ustalonym uszeregowaniu π^{*} rozdział zasobu opisany wektorem $u^{'}$ jest rozdziałem optymalnym. W takiej sytuacji wartość kryterium T w problemie P jest równa $\hat{C}$ i przy $\sum u^{'}_{i} \leq \hat{R}^{'}$ jest to wartość optymalna (ponieważ wartość $\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} u^{'}_{\pi(i)}$ była w problemie P' najmniejszą możliwą wartością, przy której można było spełnić ograniczenie $T \leq \hat{C}$, a jednocześnie w problemie P jest to maksymalna możliwa ilość zasobu do rozdzielenia). Jeżeli zatem dla rozwiązania $(\pi^{'}, u^{'})$ uzyskaliśmy optymalną wartość funkcji kryterialnej również dla problemu P, znaczy to, że rozwiązanie $(\pi^{'}, u^{'})$ jest rozwiązaniem optymalnym problemu ∎

Własność 3. *Niech dla problemu pierwotnego P:*

$$1 \left| p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)} S_{\pi(i)} - a^{'}_{\pi(i)} u_{\pi(i)}; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R} \right| T,$$

gdzie $T \in \{C_{\max}, \sum C_i\}$, *rozwiązanie optymalne osiągane będzie dla sekwencji zadań określonej przez permutację* $\pi \in \Pi$ *oraz rozdziału zasobu* $u \in U$, *gdzie* $\sum_{i=1}^{n} u_{\pi(i)} > 0$. *Przez* T_P *oznaczmy optymalną wartość funkcji kryterialnej T dla tego problemu. Wtedy rozwiązanie optymalne* $(\pi^{'}, u^{'})$ *dla problemu dualnego (odwrotnego) P':*

$$1 \left| p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)} S_{\pi(i)} - a^{'}_{\pi(i)} u_{\pi(i)}; T \leq \hat{C} \right| \sum u_{\pi(i)},$$

gdzie $\hat{C} = T_P$, *uzyskujemy dla tej samej sekwencji zadań* $\pi \in \Pi$ *i tego samego rozdziału zasobu* $u \in U$ *(tzn.* $\pi = \pi^{'}$ *i* $u = u^{'}$*). W takiej sytuacji wartość optymalna kryterium* $\sum u^{'}_{\pi(i)}$ *będzie równa wartości ograniczenia* $\hat{R}$ *w problemie P.*

Dowód. Podobny jak w przypadku własności 2. ∎

Dowód twierdzenia 1. Dany jest pewien problem P, dla którego optymalna wartość kryterium T jest osiągana przy rozwiązaniu (π, u), przy czym spełnione są wszystkie warunki wymienione w założeniu twierdzenia (tzn. rozdział zasobu u jest rozdziałem kolejnościowym dla uszeregowania π). Wartość ograniczenia $\hat{R}$ w tym problemie oznaczmy przez $\hat{R}^{'}$ (problem P z taką wartością ograniczenia będziemy dalej oznaczać skrótowo jako $P(\hat{R}^{'})$).

Zakładamy nie wprost, że optymalne rozwiązanie problemu odwrotnego do P, tzn. problemu P', dane jest jako para $(\pi^{'}, u^{'})$ i nie spełnia ono warunków zawartych w tezie twierdzenia, tzn. albo $\pi^{'} \neq \pi$, albo też rozdział zasobów $u^{'}$ nie jest rozdziałem kolejnościowym dla uszeregowania $\pi^{'}$. (Jeśli problem P' ma kilka różnych rozwiązań optymalnych, to przyjmujemy, że żadne z nich nie spełnia własności, o których mowa w twierdzeniu. W dalszej części dowodu będziemy odwoływać się do jednego, konkretnego rozwiązania optymalnego problemu P'. Jeśli tych rozwiązań jest więcej, przytoczone niżej rozumowanie należy powtórzyć dla każdego z nich z osobna.)

Dane jest zatem pewne rozwiązanie optymalne $(\pi^{'}, u^{'})$ problemu P', które nie spełnia warunków przedstawionych w tezie twierdzenia. Należy rozpatrzyć dwie możliwości:

- $\sum_{i=1}^{n} u^{'}_{\pi'(i)} > 0$. W tym przypadku na podstawie własności 2 wiemy, że rozwiązanie $(\pi^{'}, u^{'})$ jest rozwiązaniem optymalnym dla problemu P($\sum_{i=1}^{n} u^{'}_{\pi'(i)}$) o wartości funkcji kryterialnej T równej wartości ograniczenia $\hat{C}$ z problemu P'. Rozwiązanie $(\pi^{'}, u^{'})$ problemu $P(\sum_{i=1}^{n} u^{'}_{\pi'(i)})$ jest inne niż (π, u), ponieważ z definicji nie spełnia ono warunków przedstawionych w założeniu twierdzenia (np. $u^{'}$ nie musi być rozdziałem kolejnościowym dla $\pi^{'}$), poza tym wartość ograniczenia $\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} u^{'}_{\pi'(i)}$ może być różna od $\hat{R}^{'}$. Wiemy jednak, że dla problemu P przy $\hat{R} = \sum_{i=1}^{n} u^{'}_{\pi'(i)}$ istnieje inne rozwiązanie optymalne, które spełnia wszystkie warunki określone w założeniu twierdzenia i daje przy tym ograniczeniu wartość kryterium T równą $\hat{C}$. Oznaczmy to rozwiązanie przez (π_P, u_P). Z własności 3 wynika wprost, że właśnie to rozwiązanie jest jednocześnie rozwiązaniem optymalnym problemu P'. Stanowi to sprzeczność z założeniem, że żadne z rozwiązań optymalnych problemu P' nie spełnia warunków, o których mowa w tezie twierdzenia, rozwiązanie (π_P, u_P) spełnia bowiem wszystkie te warunki.
- $\sum_{i=1}^{n} u^{'}_{\pi'(i)} = 0$. Oznaczmy wektor rozdziału zasobów $u^{'}$ przez $\bar{0}$. Mamy zatem rozwiązanie optymalne $(\pi^{'}, \bar{0})$ dla problemu P', które nie spełnia warunków zawartych w twierdzeniu. W wektorze $\bar{0}$ z definicji jest zapisany rozdział kolejnościowy dla dowolnego uszeregowania zadań, stąd z przyjętego założenia (nie wprost) wynika, że $(\pi, \bar{0})$ nie może być rozwiązaniem optymalnym problemu P'. Wiemy, że rozwiązanie $(\pi^{'}, \bar{0})$ problemu P' gwarantuje, że spełniony jest warunek $T \le \hat{C}$. Oznaczmy wartość ograniczenia T dla tego rozwiązania problemu P' przez $T_{P'}$. Znajdujemy rozwiązanie optymalne dla problemu $P(0)$. Z założenia jest to rozwiązanie $(\pi, \bar{0})$. Optymalną wartość kryterium T dla problemu P przy $\hat{R} = 0$ oznaczmy przez T_P. Wiemy, że $T_P \le T_{P'} \le \hat{C}$ (ponieważ T_P jest wartością optymalną kryterium T dla problemu P), a zatem rozwiązanie $(\pi, \bar{0})$ jest także rozwiązaniem optymalnym dla problemu P', bowiem spełniony jest warunek $T \le \hat{C}$, a wartość funkcji kryterialnej jest równa 0 (tak samo jak dla rozwiązania $(\pi^{'}, \bar{0})$). Otrzymujemy zatem sprzeczność z założeniem, że rozwiązanie $(\pi, \bar{0})$ nie jest rozwiązaniem optymalnym problemu P'.

W ten sposób otrzymujemy sprzeczność z założeniem w każdym z możliwych przypadków, co dowodzi prawdziwości twierdzenia 1. ∎

Do twierdzenia 1 niezbędny jest pewien dodatkowy komentarz. Mimo tego, że nakładamy istotne ograniczenia (tzn. rozdział zasobu musi być rozdziałem kolejnościowym w sensie definicji 1) na postać rozwiązania optymalnego dla problemu minimalizacji kryterium czasowego przy ograniczeniu na całkowitą dostępną ilość zasobu, twierdzenie 1 daje się zastosować do bardzo wielu przypadków szczególnych wielomianowo rozwiązywalnych. Jako przykłady dla kryterium czasowego $T = C_{\max}$ można wymienić tu chociażby takie problemy, jak:

- $1\left|p_i(S_i,u_i) = b_iS_i - kb_iu_i; b_i \geq 1; k > 0; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|C_{\max}$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i) = a + bS_i - a_i'u_i; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|C_{\max}$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i) = a + b_iS_i - a'u_i; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|C_{\max}$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i) = a_i + ka_iS_i - a'u_i; k > 0; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|C_{\max}$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i) = b_iS_i - a_i'u_i; \bar{u}_i = \bar{u}; \bar{u} \leq \min_{i=1,\ldots,n} \dfrac{b_iC_0}{a_i'}; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|C_{\max}$.

Odpowiednio dla kryterium $T = \sum C_i$ są to na przykład problemy takie jak:

- $1\left|p_i(S_i,u_i) = a_i + ka_iS_i - a'u_i; k > 0; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|\sum C_i$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i) = a_i + bS_i - a'u_i; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|\sum C_i$,
- $1\left|p_i(S_i,u_i) = b_iS_i - a'u_i; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|\sum C_i$.

Zarówno te przykładowe przypadki szczególne, jak i kilka innych, zostały szczegółowo zbadane w [1], [3] i [4], gdzie oprócz algorytmów znajdowania optymalnego uszeregowania zadań i optymalnego rozdziału zasobu (wraz z dowodami) wykazano między innymi również, że problemy te spełniają wszystkie założenia twierdzenia 1.

4. Algorytm minimalizacji globalnej ilości wykorzystywanych zasobów

Przedstawiony zostanie algorytm znajdujący w czasie wielomianowym optymalne rozwiązanie dla problemu dualnego P':

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)}S_{\pi(i)} - a_{\pi(i)}'u_{\pi(i)}; T \leq \hat{C}\right|\sum u_i$$

przy założeniu, że znamy algorytm wielomianowy dla pierwotnego problemu P:

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)}S_{\pi(i)} - a_{\pi(i)}'u_{\pi(i)}; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|T,$$

gdzie $T \in \left\{C_{\max}, \sum C_i\right\}$, a rozdział zasobu w rozwiązaniu problemu P jest rozdziałem kolejnościowym.

Z twierdzenia 1 wynika, że wówczas uszeregowanie zadań jest ściśle określone (tzn. sekwencja zadań w rozwiązaniu optymalnym dla problemu P' jest identyczna, jak dla problemu *P*), pozostaje nam zatem jedynie znalezienie optymalnego rozdziału zasobu dla tego uszeregowania.

ALGORYTM 1

Krok 0. *Przyjmując za* $\hat{R}$ *dowolną wartość z przedziału* $(\sum_{i=1}^{n}\underline{u}_i, \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i] \equiv (0, \sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i]$ *znajdujemy rozwiązanie optymalne dla problemu P, tj.* $1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)}, u_{\pi(i)}) = a_{\pi(i)} + b_{\pi(i)}S_{\pi(i)} - a'_{\pi(i)}u_{\pi(i)}; \sum_{i=1}^{n} u_i \leq \hat{R}\right|T$. *Uszeregowanie zadań w tym rozwiązaniu oznaczamy przez* π, *rozdział zasobu jest nieistotny,*

Krok 1. *Dla problemu P' definiujemy rozdział zasobu* $\overline{u}$: $\forall_{i=1,\dots,n} u_{\pi(i)} = \underline{u}_{\pi(i)} = 0$. *Obliczamy wartość T dla rozdziału zasobu* $\overline{u}$ *i uszeregowania* π *w problemie P' (odpowiednio ze wzoru (1), gdy* $T = C_{\max}$ *lub ze wzoru (2), gdy* $T = \sum C_i$*). Jeżeli* $T \leq \hat{C}$, *to STOP: znaleźliśmy rozwiązanie z minimalną możliwą ilością zasobu. Jeżeli nie, to przechodzimy do kroku 2,*

Krok 2. *Podstawiamy k:=1,*

Krok 3. *Definiujemy rozdział zasobu* $u^{(k)}$:

- $\forall_{i=1,\dots,k} u^{(k)}_{\pi(i)} = \overline{u}_{\pi(i)}$,
- $\forall_{i=k+1,\dots,n} u^{(k)}_{\pi(i)} = \underline{u}_{\pi(i)} = 0$,

Krok 4. *W celu uszeregowania* π *i rozdziału zasobu* $u^{(k)}$ *obliczamy wartość T (korzystamy tutaj np. ze wzorów . Jeżeli* $T > \hat{C}$, *to podstawiamy k:=k+1. Gdy* $k > n$, *to STOP: rozwiązanie spełniające podane warunki nie istnieje. Gdy* $T \leq \hat{C}$ *i* $k \leq n$ *- przechodzimy do kroku 3,*

Krok 5. *Wiemy, że rozdział zasobu w rozwiązaniu optymalnym* u^{opt} *ma następującą postać:*

- $\forall_{i=1,\dots,k-1} u^{opt}_{\pi(i)} = \overline{u}_{\pi(i)}$,
- $\forall_{i=k+1,\dots,n} u^{opt}_{\pi(i)} = \underline{u}_{\pi(i)} = 0$.

Gdy $T = C_{\max}$, *wartość* $u^{opt}_{\pi(k)}$ *możemy wyznaczyć z następującego wzoru:*

$$u^{opt}_{\pi(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1}\left(\left(a_{\pi(i)} - a'_{\pi(i)} \cdot \overline{u}_{\pi(i)}\right) \cdot \prod_{j=i+1}^{k}\left(1 + b_{\pi(j)}\right)\right)}{a'_{\pi(k)}} + \tag{3}$$

$$+\frac{C_0\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(1+b_{\pi(i)}\right)+\sum_{i=k}^{n}a_{\pi(i)}}{a'_{\pi(k)}}-\frac{\hat{C}}{a'_{\pi(k)}\cdot\prod_{i=k+1}^{n}\left(1+b_{\pi(i)}\right)},$$

jeśli zaś $T=\sum C_i$*, stosujemy następujący wzór:*

$$u_{\pi(k)}^{opt}=\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\left(\left(a_{\pi(i)}-a'_{\pi(i)}\cdot\bar{u}_{\pi(i)}\right)\cdot\prod_{j=i+1}^{k}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)+a_{\pi(k)}+C_0\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(1+b_{\pi(i)}\right)}{a'_{\pi(k)}}+ \quad (4)$$

$$\frac{\sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{l=k+1}^{i}\left(a_{\pi(l)}\cdot\prod_{j=l+1}^{k}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)\right)+\sum_{i=1}^{k-1}\left(C_0\cdot\prod_{l=1}^{i}\left(1+b_{\pi(l)}\right)\right)}{a'_{\pi(k)}\left(1+\sum_{i=k+1}^{n}\left(\prod_{l=k+1}^{i}\left(1+b_{\pi(l)}\right)\right)\right)}+$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{l=1}^{i}\left(a_{\pi(l)}-a'_{\pi(l)}\bar{u}_{\pi(l)}\right)\cdot\prod_{j=l+1}^{k}\left(1+b_{\pi(j)}\right)\right)-\hat{C}}{a'_{\pi(k)}\left(1+\sum_{i=k+1}^{n}\left(\prod_{l=k+1}^{i}\left(1+b_{\pi(l)}\right)\right)\right)}.$$

Ostatecznie rozwiązanie optymalne określone jest przez uszeregowanie π *i rozdział zasobu* u^{opt}*, skonstruowany jak wyżej.*

Własność 4. *Algorytm 1 znajduje w czasie wielomianowym optymalne uszeregowanie i rozdział zasobu dla dualnego (odwrotnego) problemu P':*

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)})=a_{\pi(i)}+b_{\pi(i)}S_{\pi(i)}-a'_{\pi(i)}u_{\pi(i)};T\le\hat{C}\right|\sum u_i,$$

o ile tylko dla pierwotnego problemu P:

$$1\left|p_{\pi(i)}(S_{\pi(i)},u_{\pi(i)})=a_{\pi(i)}+b_{\pi(i)}S_{\pi(i)}-a'_{\pi(i)}u_{\pi(i)};\sum_{i=1}^{n}u_i\le\hat{R}\right|T$$

istnieje algorytm wielomianowy znajdujący rozwiązanie optymalne (π,u)*, a także rozdział zasobu* u *w tym rozwiązaniu jest rozdziałem kolejnościowym dla uszeregowania* π*.*

Dowód. Algorytm 1 konstruuje rozwiązanie optymalne dla problemu P' zgodnie z twierdzeniem 1 (uszeregowanie jest takie jak dla problemu pierwotnego, zasób jest przydzielany kolejnym zadaniom w sekwencji począwszy od pierwszego). Pozostaje jedynie wykazać, że wzory (3) i (4) stosowane w *kroku 5* algorytmu są poprawne. Wzory te służą do obliczania ilości zasobu dla ostatniego spośród zadań, dla których przydzielona ilość zasobu będzie większa od zera (zasób jest przydzielany do kolejnych zadań w sekwencji optymalnej). Oznaczmy pozycję tego zadania przez k. Ilość zasobu przydzielonego to tego zadania można uzyskać w prosty sposób, wyznaczając wartość $u_{\pi(k)}$ przy założeniu, że $\forall_{i=1,\dots,k-1}u_{\pi(i)}=\bar{u}_{\pi(i)}$, $\forall_{i=k+1,\dots,n}u_{\pi(i)}=0$ oraz wartości funkcji kryterialnej $T=\hat{C}$ odpowiednio ze wzoru (1), gdy $T=C_{\max}$ lub ze wzoru (2), gdy $T=\sum C_i$. ∎

5. Podsumowanie

Zaprezentowane algorytmy pozwalają rozwiązać problemy minimalizacji całkowitej ilości zasobu przy narzuconym ograniczeniu na wartość kryterium czasowego $T \in \left\{C_{\max}, \sum C_i\right\}$ w przypadku, gdy potrafimy rozwiązać pierwotną wersję tego problemu (tzn. zminimalizować wartość odpowiedniego kryterium czasowego przy założeniu, że globalna dostępna ilość zasobu jest ściśle ograniczona) i spełnione są pewne dodatkowe warunki związane ze sposobem rozdziału zasobu w tym rozwiązaniu (tzn. rozdział zasobu musi być rozdziałem kolejnościowym w sensie definicji 1. Ograniczenie związane z postacią rozwiązania w problemie odwrotnym jest spełniane przez większość znanych w chwili obecnej wielomianowo rozwiązywalnych przypadków szczególnych ([1], [3], [4]), co pozwala rozwiązać również w czasie wielomianowym problem minimalizacji wykorzystywanej ilości zasobu w tych przypadkach. Warto także podkreślić, że zaprezentowane algorytmy mają również i taką własność, że w każdym przypadku zachowywana jest klasa złożoności obliczeniowej problemu minimalizacji kryterium czasowego, tzn. jeśli problem minimalizacji pewnego kryterium czasowego T przy ograniczeniu na globalną dostępną ilość zasobu jest problemem wielomianowym, to algorytm dla problemu minimalizacji $\sum u_i$ przy ograniczeniu na wartość T będzie wykonywał wielomianową liczbę operacji względem ilości zadań; jeśli problem ten jest wykładniczy, to i algorytm dla problemu do niego odwrotnego będzie wykonywał wykładniczą liczbę kroków.

LITERATURA

1. Bachman A., Janiak A.: Single machine scheduling problems with deteriorating jobs dependent on resources, Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, seria Preprinty nr 77/98, Wrocław 1998 (artykuł rozpatrywany w „International Transaction in Operations Research").
2. Ho K. I-J., Leung J. Y-T., Wei W-D.: Complexity of scheduling tasks with time-dependent execution times, Information Processing Letters, 48/1993, str. 315-320.
3. Iwanowski D., Janiak A.: Szeregowanie zadań z czasami wykonania zależnymi od momentu rozpoczęcia i dostarczonego zasobu, Raport Instytutu Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, seria Preprinty nr 93/99, Wrocław 1999.
4. Iwanowski D., Janiak A., Rogala A.: Scheduling Jobs with Start Time and Resource Dependent Processing Times, Proceedings of SOR '99., Springer Verlag, Berlin 2000 (to appear).
5. Janiak A.: Wybrane problemy i algorytmy szeregowania zadań i rozdziału zasobów, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1999.
6. Janiak A., Grabowski J.: Optymalizacja sekwencji operacji z rozdziałem zasobów w dyskretnych procesach produkcyjnych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, s.Automatyka, z.54, Gliwice 1980, str. 67-74.
7. Melnikov O. I., Shafransky Y. M.: Parametric problem of scheduling theory, Kibernetika, nr 3/1979, str. 53-75 (praca w języku rosyjskim).

8. Mosheiov G.: Scheduling jobs under simple linear deterioration, Computers and Operations Research, vol. 21/1994, nr 6, str. 653-659.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. E.Toczyłowski

Abstract

The problems of scheduling jobs with start time dependent processing times appeared in literature ([7]) almost twenty years ago. Some optimal algorithms for makespan (C_{max}) or total completion time ($\sum C_i$) criteria and have been presented in various papers. Some other specific versions of these problems have been proved to be NP-hard or even strongly NP-hard [2].

A very similar situation can be noticed in the literature related to the scheduling problems with resource dependent processing times. This family of problems has been introduced in [6].

Connecting both models mentioned above may result in a very powerful model with many real applications (in the metallurgical industry or in the loan repayments), especially with considered time criteria. Such a model has been introduced in [1], but with assumption, that the upper bounds of the quantity of resource are equal for all the jobs. For three special forms of execution times, i.e. $p_i(S_i,u_i) = a_i + bS_i - a u$, $p_i(S_i,u_i) = a + b_iS_i - a u_i$ and $p_i(S_i,u_i) = a + bS_i - a_iu_i$ polynomial algorithms for minimizing the makespan with the total amount of resource limited from above has been constructed. The same model without this restriction has been introduced and examined in [3].

In this paper we improve the results presented in [1] for the makespan and total completion time criteria. We show how to minimise the total resource consumption under the restriction on the value of makespan or total completion time if only we could easily minimise the time criterion and some additional conditions were satisfied.