ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLASKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 129 Nr kol. 1474

Mirosław ZABOROWSKI
Politechnika Śląska

STABILNOŚĆ PROCESU NADĄŻNEGO HARMONOGRAMOWANIA PRODUKCJI*

Streszczenie. W pracy przedyskutowano istnienie granic, w których zawsze mieszczą się poszczególne współrzędne stanu procesu nadążnego harmonogramowania produkcji. Następnie udowodniono, że zaległości w nadążaniu planów wykonawczych generowanych przez algorytm harmonogramowania nadążnego za odpowiednimi planami operacyjnymi są ograniczone w nieskończonym horyzoncie czasowym.

STABILITY OF THE FOLLOW-UP SCHEDULING PROCESS

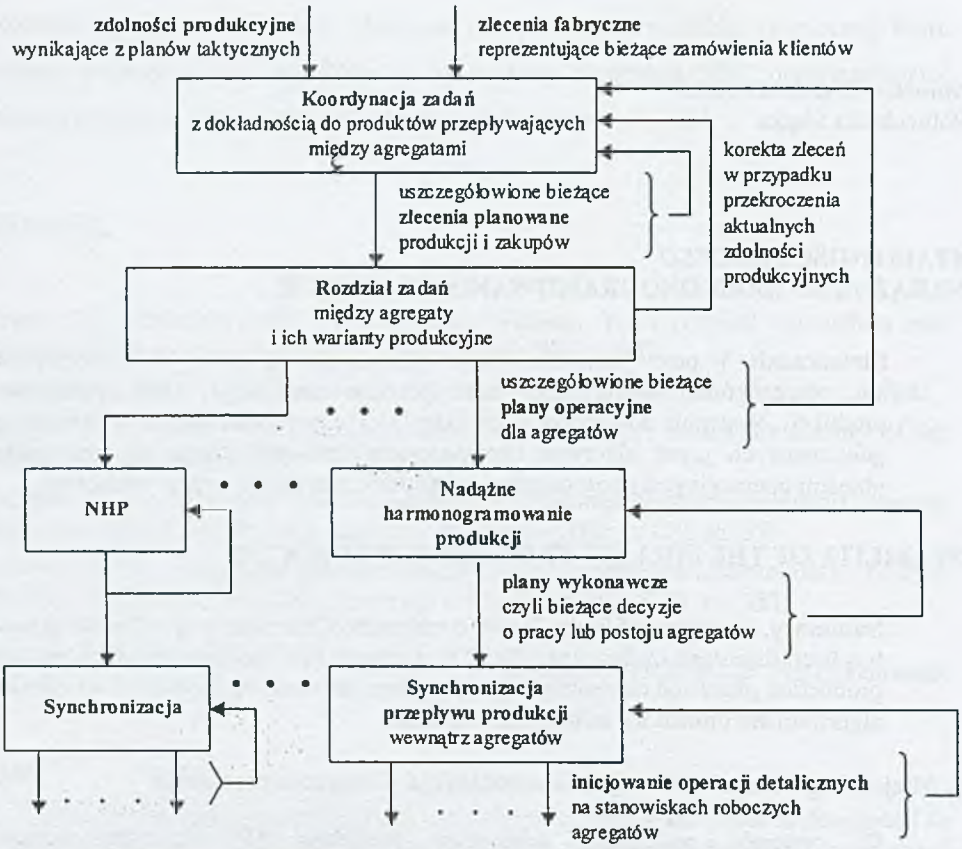
Summary. Existence of limits for state variables of the follow-up scheduling process has been discussed in the paper. Next, it is proven that backlogs between operational production plans and corresponding executive plans made by the follow-up scheduling algorithm are limited for infinite time horizon.

1. Miejsce algorytmu NHP w systemie nadążnego sterowania produkcją

W systemie nadążnego sterowania produkcją [1] algorytm nadążnego harmonogramowania produkcji (NHP) jest usytuowany w warstwie planowania wykonawczego (rys. 1). Nie służy on do szeregowania zadań oczekujących w kolejce na przyszłe wykonanie, lecz do podejmowania bieżących decyzji o pracy lub postoju danego agregatu produkcyjnego i o następnej chwili podjęcia decyzji. Ponadto, w przypadku decyzji o pracy, algorytm NHP wybiera wariant produkcyjny i wyznacza wielkości partii [1]. Ewentualny raport o decyzjach z przeszłości miałby strukturę harmonogramu produkcji, co uzasadnia nazwę algorytmu.

Algorytm NHP wykorzystuje między innymi informacje o współrzędnych stanu procesu, którym steruje. Stan procesu jest aktualizowany w każdym okresie planowania wykonawczego (rys. 2), natomiast plany operacyjne są czytane i decyzje NHP podejmowane tylko w niektórych z tych okresów. Są one odpowiednio wybierane przez algorytm, przy czym chwile czytania planów i podejmowania decyzji mogą, lecz nie muszą być te same.

* Pracę wykonano w ramach projektu badawczego KBN nr 8 T11A 020 18



Rys.1. Struktura funkcjonalna systemu nadążnego sterowania produkcją
Fig.1. Functional structure of the follow-up production control system

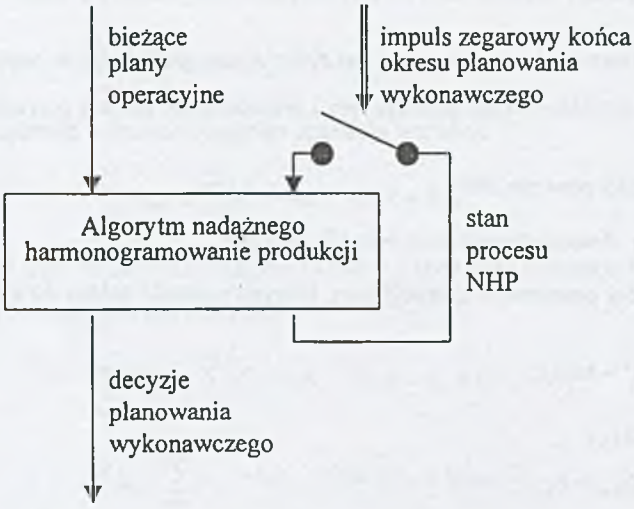
2. Opis algorytmu nadążnego harmonogramowania produkcji

Algorytm nadążnego harmonogramowania produkcji został szczegółowo opisany, wraz ze znaczeniem użytych symboli i komentarzami, w innym artykule tego samego numeru Zeszytów Naukowych [1]. Opis ten będzie wykorzystany w niniejszej pracy, gdyż ze względu na ograniczenia redakcyjne nie może tu być powtórzony. Odwołania do przedstawionych w [1] zależności (1)...(20) będą oznaczone jako (A-1)...(A-20).

3. Dyskusja ograniczeń współrzędnych stanu procesu NHP

Od algorytmu przeznaczonego do bieżącej generacji decyzji trzeba wymagać, by gwarantował stabilność procesu, którym steruje. Niezbędny jest więc dowód, że przy ograniczonych wymuszeniach algorytm generuje decyzje mieszczące się w znanych granicach

przy nieskończonym horyzoncie obserwacji. Odpowiednio ograniczone powinny być także wszystkie współrzędne stanu procesu NHP. Zgodnie z treścią kroku 2 [1] na stan tego procesu w dowolnej chwili t (i przy zgodnych z t numerach okresów l, k) składają się $t_l^p - t, t_k^h - t, a_t, b_t, B_{mjt}, x_{mt}, r_{mt}$. Z (A-5) (A-17) wynika, że $t_l^p - t \le \Delta$, $t_k^h - t \le s_a + \lceil x_{at}^+ \rceil$, przy czym Δ i s_a są stałymi, więc wystarczy zadbać o ograniczoność x_{at}^+. Numery wybieranych kolejno wariantów a_t, jak również przypisywane im priorytety r_{mt}, zawsze mieszczą się w zbiorze $\{1,..,M\}$. Także zmieniająca się liczba b_t wariantów o zaległościach nie przekraczających wartości progowych spełnia podobne ograniczenie $0 \le b_t \le M$. Zaległości B_{mjt} i ich ewentualne chwilowe przewyższenia B_{mjt}^+ wynikające z korekty (A-8) są ograniczone, jeśli tylko są ograniczone ich miary czasowe x_{mt}^+, co wynika wprost z definicji (A-9). Wielkości partii zgodne z decyzjami NHP są albo zerowe, albo równe zaległościom (A-16). Oczywiście, wszystkie wymienione tu wielkości są nieujemne. Podsumowując, proces NHP jest stabilny, jeśli miary czasowe zaległości x_{mt}^+ są ograniczone od góry przy nieskończonym horyzoncie obserwacji. To właśnie jest przedmiotem udowodnionego dalej twierdzenia o stabilności procesu NHP.



Rys.2. Zastosowanie nadążnego harmonogramowania produkcji do generacji bieżących decyzji planowania wykonawczego

Fig.2. Application of the follow-up production scheduling to make current decisions of the executive planning

W każdym okresie NHP zaległości przyjmują wartości maksymalne

$$B_{mjk} = B^{+}_{mjk} \mid t = t^{h}_{k}, \quad \text{dla } j \in J_m, m = 1..M \tag{1}$$

$$X_{mk} = \underset{j \in J_m}{\text{Max}}\{p_{mj} B_{mjk}\}, \quad \text{dla } m = 1..M \tag{2}$$

w chwilach końcowych, bezpośrednio przed podjęciem następnej decyzji. Przy tym, jak wynika z procedur kroku 4, obowiązują zależności:

$$B_{mjk} = B_{mj,k-1} + \sum_{l \in L_k} Z_{mjl} - Y_{mjk}, \quad \text{dla } j \in J_m, m = 1..M \tag{3}$$

$$Y_{mjk} = \begin{cases} 0, & \text{dla } j \in J_m, m = 1..M, & \text{gdy } a_k = 0 \\ 0, & \text{dla } j \in J_m, m = 1..M, m \neq a_k, & \text{gdy } a_k > 0 \\ B_{mj,k-1}, & \text{dla } j \in J_m, m = a_k, & \text{gdy } a_k > 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$L_k = \{l \in \{1,2,...\} \mid t^{h}_{k-1} < t^{p}_{l-1} \leq t^{h}_{k}\} \tag{5}$$

$$T^{h}_{k} = t^{h}_{k} - t^{h}_{k-1}, \tag{6}$$

gdzie:

L_k – zbiór okresów planowania operacyjnego, których początki należą do k-tego okresu harmonogramowania,

T^{h}_{k} – długość okresu NHP.

Jeśli k jest okresem pracy w wariancie a, to

$$T^{h}_{k} \leq s_a + \lceil X_{a,k-1} \rceil, \tag{7}$$

przy czym na ogół jest to równość, a nierównością jest tylko w przypadku, gdy w poprzednim okresie pracy występował ten sam wariant produkcyjny i przezbrojenie nie jest potrzebne.

4. Twierdzenie o stabilności procesu NHP

Ważną wielkością dla dowodu twierdzenia o stabilności jest

T^{p}_{k} - łączna długość okresów planowania operacyjnego, których początki należą do k-tego okresu NHP, czyli

$$T^{p}_{k} = \underset{l \in L_k}{\text{Max}}\, t^{p}_{l} - \underset{l \in L_k}{\text{Min}}\, t^{p}_{l-1} \tag{8}$$

$$T^{p}_{k} = \Delta \text{card}(L_k) \tag{9}$$

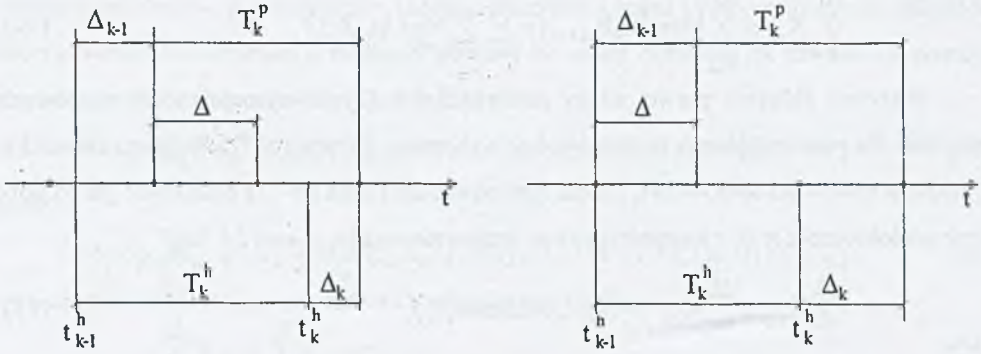
$$T^{p}_{k} = T^{h}_{k} - \Delta_{k-1} + \Delta_k, \tag{10}$$

przy czym

$$\Delta_k = \underset{l \in L_k}{\text{Max}}\, t^{p}_{l} - t^{h}_{k}, \quad \Delta_k \leq \Delta, \tag{11}$$

card(L_k) – liczba okresów planowania operacyjnego o początkach należących do k-tego okresu NHP.

Związki między interwałami T_k^h, T_k^p ilustruje rys.3, na którym pokazano dwa przypadki. W pierwszym początek i koniec okresu NHP leżą wewnątrz okresów planowania operacyjnego, natomiast w drugim są równe chwilom początkowym pewnych okresów planowania operacyjnego.



Rys.3. Związki między okresem NHP i okresami planowania operacyjnego
Fig.3. Relationships between a follow-up scheduling period and operational planning periods

Twierdzenie o stabilności procesu NHP można sformułować następująco:

Twierdzenie

Jeżeli dla każdego okresu planowania operacyjnego l plany są ograniczone:

$$\sum_{m=1}^{M} \operatorname*{Max}_{j \in J_m} \{p_{mj} Z_{mjl}\} \le \pi\Delta, \tag{A-7}$$

a początkowe wartości zaległości spełniają warunek:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} \le \sum_{m=1}^{M} x_m^* + \pi\Delta, \quad \text{dla } k = k_0, \tag{12}$$

to suma miar czasowych zaległości i każda z tych miar osobno spełniają ten warunek w każdym następnym okresie NHP:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} \le \sum_{m=1}^{M} x_m^* + \pi\Delta, \quad \text{dla } k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots \tag{13}$$

$$X_{mk} \le \sum_{m=1}^{M} x_m^* + \pi\Delta, \quad \text{dla } k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots \tag{14}$$

Dowód

Jeżeli k-ty okres NHP jest okresem pracy w wariancie produkcyjnym a, to ze względu na (2)(3)(4) zachodzi równość:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} = \underset{j \in J_a}{\mathrm{Max}} \left\{ p_{aj} \sum_{l \in L_k} Z_{ajl} \right\} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq a}}^{M} \underset{j \in J_m}{\mathrm{Max}} \left\{ p_{mj} \left(B_{mj,k-1} + \sum_{l \in L_k} Z_{mjl} \right) \right\}. \tag{15}$$

Ponieważ największa wartość w zbiorze sum jest mniejsza lub równa sumie największych wartości w odpowiednich zbiorach składników, to

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq a}}^{M} \underset{j \in J_m}{\mathrm{Max}} \left\{ p_{mj} B_{mj,k-1} \right\} + \sum_{m=1}^{M} \sum_{l \in L_k} \underset{j \in J_m}{\mathrm{Max}} \left\{ p_{mj} Z_{mjl} \right\} . \tag{16}$$

Pierwszy składnik prawej strony jest z definicji (2) równy sumie miar czasowych zaległości dla poszczególnych wariantów, bez wybranego wariantu a. Do drugiego składnika, po zmianie kolejności sumowania, można zastosować założenie (A-7) i oszacować go od góry przez wielokrotność $\pi\,\Delta$, z krotnością równą liczbie elementów zbioru L_k. Stąd

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} \leq \sum_{m=1}^{M} X_{m,k-1} - X_{a,k-1} + \pi \Delta \mathrm{card}(L_k), \tag{17}$$

po czym, korzystając z (9) (10), otrzymujemy:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} = \sum_{m=1}^{M} X_{m,k-1} - X_{a,k-1} + \pi T_k^h + \pi(\Delta_k - \Delta_{k-1}), \tag{18}$$

Następnie, na podstawie (7), można dokonać następujących przekształceń:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M} X_{mk} &\leq \sum_{m=1}^{M} X_{m,k-1} + \pi(\Delta_k - \Delta_{k-1}) - X_{a,k-1} + \pi(s_a + \lceil X_{a,k-1} \rceil - X_{a,k-1} + X_{a,k-1}) \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^{M} X_{m,k-1} + \pi(\Delta_k - \Delta_{k-1}) - X_{a,k-1} + \pi(s_a + 1 + X_{a,k-1}) = \\ &= \sum_{m=1}^{M} X_{m,k-1} + \pi(\Delta_k - \Delta_{k-1}) - (1-\pi)\left(X_{a,k-1} - \frac{\pi(s_a+1)}{1-\pi} \right). \end{aligned} \tag{19}$$

Ponieważ dla okresu pracy zaległości wybranego wariantu nie są mniejsze od wartości progowych, a parametry algorytmu spełniają warunek (A-3), to

$$X_{a,k-1} \geq x_a^* > \frac{\pi(s_a+1)}{1-\pi}, \quad 1-\pi > 0. \tag{20}$$

Stąd, na postawie (19) (20), otrzymujemy:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} < \sum_{m=1}^{M} X_{m,k-1} + \pi(\Delta_k - \Delta_{k-1}). \tag{21}$$

Jest to nierówność ostra, przy czym różnica λ_k między stroną prawą i lewą jest skończoną wielkością dodatnią, spełniającą warunek:

$$\lambda_k \geq (1-\pi)\,\delta_a, \tag{22}$$

gdzie δ_a jest nadwyżką wartości progowej x_a^* nad jej ograniczeniem $\frac{\pi(s_a+1)}{1-\pi}$. Stąd

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} - \sum_{m=1}^{M} X_{m,k-1} = \pi(\Delta_k - \Delta_{k-1}) - \lambda_k \ , \quad \lambda_k > 0 \tag{23}$$

dla każdego okresu pracy.

Chwila końcowa okresu postoju o numerze K jest zawsze chwilą początkową pewnego okresu planowania operacyjnego l. Dla tych K oraz l, bezpośrednio przed wczytaniem planów, gdy zaległości jeszcze nie wzrosły i mogą być wyrażone jako zaległości skorygowane pomniejszone o wielkości planów, ich miary czasowe, jak zawsze dla postoju, nie mogą przekraczać wartości progowych, czyli:

$$p_{mj}\left(B_{mjK} - Z_{mjl}\right) \le x_m^* \text{, dla } j \in J_m \text{, } m = 1..M, (K,l) \mid t_K^h = t_{l-1}^p \,. \tag{24}$$

Stąd

$$\underset{j \in J_m}{\mathrm{Max}}\left\{p_{mj} B_{mjK}\right\} \le x_m^* + \underset{j \in J_m}{\mathrm{Max}}\left\{p_{mj} Z_{mjl}\right\}, \text{ dla } j \in J_m \text{, } m = 1..M, (K,l) \mid t_K^h = t_{l-1}^p \,, \tag{25}$$

a po zsumowaniu według wariantów i uwzględnieniu (A-7):

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mK} \le \sum_{m=1}^{M} x_m^* + \pi\Delta \,. \tag{26}$$

Przekształcając tę nierówność w równość, analogicznie jak dla okresu pracy, otrzymujemy:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mK} - \sum_{m=1}^{M} x_m^* = \pi\Delta_K - \lambda_K, \quad \lambda_K \ge 0, \quad \Delta_K = \Delta \,. \tag{27}$$

Sumując stronami to równanie z równaniami (23) dla okresów pracy i zastępując bieżący indeks k przez $\kappa = K, K+1, ..., k$ otrzymujemy:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} - \sum_{m=1}^{M} x_m^* = \pi\Delta_k - \sum_{\kappa=K}^{k} \lambda_\kappa \tag{28}$$

dla każdego okresu pracy k występującego w sekwencji po okresie postoju K. Z (27) (28) wynika, że dla takiego okresu słuszna jest też nierówność:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mk} = \sum_{m=1}^{M} X_{mK} - \pi(\Delta - \Delta_k) - \sum_{\kappa=K+1}^{k} \lambda_\kappa \,. \tag{29}$$

Ponieważ dla każdego okresu pracy obowiązują nierówności $\lambda_k > 0$, $\Delta - \Delta_k \ge 0$, to po skończonej liczbie następujących po sobie okresów pracy zaległości muszą zmaleć do wartości, przy których następny okres NHP jest okresem postoju. W przeciwnym razie zaległości stałyby się ujemne, co jest z definicji niemożliwe.

Podsumowując, suma miar czasowych zaległości nie może narosnąć do wartości większej niż jej ograniczenie (26) dla okresu postoju, co kończy dowód tezy (13). Teza (14) wynika natychmiast z (13), gdyż żaden składnik sumy składników nieujemnych nie może być większy niż cała suma. To kończy dowód twierdzenia o stabilności procesu nadążnego harmonogramowania produkcji.

LITERATURA

1. Zaborowski M. : Nadążne harmonogramowanie produkcji. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Automatyka, Gliwice 2000, z. 129, str. 363.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Z. Banaszak

Abstract

The follow-up scheduling algorithm works with feedback from the current state of the controlled process. All state variables of the follow-up scheduling process have been specified and their natural limits, which are always satisfied, have been discussed in the paper. For backlogs, that is for running totals of differences between leading operational plans and following executive plans that are made by the algorithm, it is proven that they are limited for infinite time horizon. The main assumption of this stability theorem is that operational plans do not exceed capacity of the production subsystem which is the object of control.