ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 2000
Seria: AUTOMATYKA z. 129 Nr kol. 1474

Mirosław ZABOROWSKI
Politechnika Śląska

ZBIEŻNOŚĆ PROCESU NADĄŻNEGO HARMONOGRAMOWANIA PRODUKCJI*

Streszczenie. Jedną z właściwości algorytmu nadążnego harmonogramowania produkcji jest to, że jeśli wiodące operacyjne plany produkcji są stałe lub cykliczne, to nadążające plany wykonawcze generowane przez algorytm są zbieżne do harmonogramów cyklicznych, z okresem powtarzalności będącym jednym z parametrów algorytmu. W pracy przedstawiono dowód odpowiedniego twierdzenia o zbieżności.

CONVERGENCE OF THE FOLLOW-UP SCHEDULING PROCESS

Summary. The one of qualities of the follow-up scheduling process is its convergence. It means that if leading operational production plans are constant or cyclic then following executive plans, made by the follow-up scheduling algorithm, become cyclic after finite number of planning periods. The repetition period of these plans is the one of the algorithm parameters. The proof of convergence has been presented in the paper.

1. Opis algorytmu nadążnego harmonogramowania produkcji

Opis algorytmu nadążnego harmonogramowania produkcji oraz dyskusja stabilności procesu NHP zostały przedstawione w innych artykułach tego samego numeru Zeszytów Naukowych [1], [2]. Treść tych tekstów będzie wykorzystana w niniejszej pracy, wraz z podanymi tam nazwami symboli, przy czym odpowiednie fragmenty nie będą tu powtarzane. Odwołania do przedstawionych w [1] i [2] zależności będą oznaczone jako (A-1) ... (A-20) i (B1) ... (B-29).

2. Twierdzenie o zbieżności procesu NHP

Jest intuicyjnie zrozumiałe, że jeśli plany operacyjne są okresowe, z okresem powtarzalności L^* zgodnym z parametrem T^* algorytmu NHP:

$$L^*\Delta = T^*, \tag{1}$$

* Pracę wykonano w ramach projektu badawczego KBN nr 8 T11A 020 18

a w szczególności jeżeli plany te są stałe, to również plany wykonawcze powinny być okresowe, z okresem powtarzalności T^*. Nie jest natomiast oczywiste, choć potwierdzają to przykłady [1], że kolejne decyzje generowane w takiej sytuacji przez algorytm NHP układają się, po skończonej liczbie iteracji, w cyklogram idealnej produkcji rytmicznej. Można to jednak udowodnić jako następujące twierdzenie o zbieżności procesu NHP:

Twierdzenie

Jeżeli dla każdego l, począwszy od pewnego L

1) $Z_{mjl} = Z_{mj,l+L^*}$, dla $j \in J_m, m = 1..M, l > L$ (2)

w tym jeśli $Z_{mjl} = Z_{mjL}$, dla $j \in J_m, m = 1..M, l > L$ (3)

2) $\sum_{i=l+1}^{l+L^*} Z_{mji} = Y^*_{mj}$, dla $j \in J_m, m = 1..M, l > L$ (4)

3) $\sum_{m=1}^{M} \underset{j \in J_m}{\mathrm{Max}} \{p_{mj} Z_{mjl}\} \le \pi\Delta$, dla $l > L$ (A-7)

to istnieją K^* i K takie, że dla każdego k, począwszy od K

1) $t^h_{k+K^*} = t^h_k + T^*$, dla $k \ge K$ (5)

2) $a_k = a_{k+K^*}$, dla $k \ge K$ (6)

3) $Y_{mjk} = Y_{mj,k+K^*}$, dla $j \in J_m$, $m = 1..M$, $k > K$ (7)

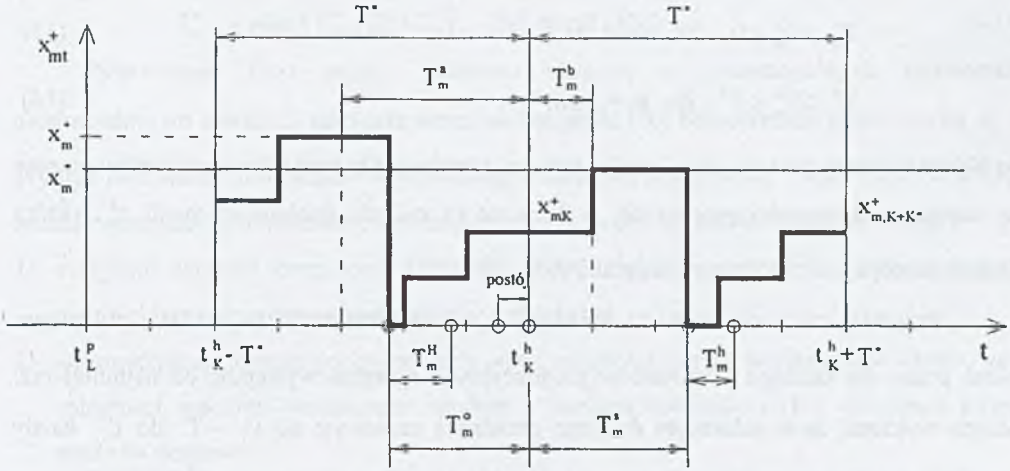
4) $B_{mjk} = B_{mj,k+K^*}$, dla $j \in J_m$, $m = 1..M$, $k \ge K$. (8)

Dowód

Dla dowodu oznaczmy przez K numer pierwszego okresu postoju takiego, że

$$t^h_K = t^p_L + T^*, \tag{9}$$

a w przedziale czasowym między chwilami t^p_L, t^h_K okresy pracy w każdym możliwym wariancie produkcyjnym występują co najmniej raz. Istnienie okresu postoju po skończonej sekwencji okresów pracy jest gwarantowane przez założenie (A-7) w sposób opisany w końcowej części dowodu twierdzenia o stabilności [2]. Z (1) i z założenia (4) wynika co najmniej jednokrotna praca w każdym z wariantów w skończonym przedziale czasowym o początku w chwili t^p_L.



Rys.1. Przykładowy przebieg miary czasowej zaległości przy przejściu do produkcji rytmicznej

Fig.1. Exemplary time diagram of backlogs during transition to cyclic production state

Przyjmijmy następujące oznaczenia (rys.1):

T^o_m – wyprzedzenie chwili t^h_K przez chwilę początkową ostatniego wcześniejszego okresu przezbrojenia do pracy w wariancie m,

T^H_m – długość okresu pracy o chwili początkowej $t^h_K - T^o_m$,

T^a_m – wyprzedzenie chwili t^h_K przez chwilę czytania ostatnich planów składających się na zaległości likwidowane w okresie T^H_m,

T^b_m – odstęp czasu od chwili t^h_K do chwili osiągnięcia wartości progowych przez wszystkie zaległości wariantu m, które zostały wyzerowane w chwili $t^h_K - T^o_m$,

T^s_m – odstęp czasu od chwili t^h_K do chwili startu pierwszego okresu pracy w wariancie m,

T^h_m – długość okresu pracy o chwili początkowej $t^h_K + T^s_m$

i przenumerujmy warianty produkcyjne tak, aby:

$$T^o_m - T^H_m \geq T^o_{m+1}\ ,\ \text{dla}\ \ m = 1..M\text{-}1 \tag{10}$$

$$T^o_m - T^H_m \geq 0\ ,\ \text{dla}\ \ m = M. \tag{11}$$

Ze względu na (1) (4) zachodzi nierówność (rys.1):

$$T^a_m - T^b_m \leq T^*\ ,\ \text{dla}\ \ m = 1..M. \tag{12}$$

Przy tym:

$$T_m^s \geq T_m^b \geq 0 \text{ , dla } m = 1..M, \tag{13}$$

$$T_m^o \leq T_m^s \leq T^* \text{ , dla } m = 1..M, \tag{14}$$

bo K jest okresem postoju, na początku którego zaległości dla wszystkich wariantów jeszcze są mniejsze od wartości progowych, a może się to zmienić dopiero w chwili t_K^h , która kończy postój i jest chwilą czytania planów.

Przedział czasu od chwili t_L^p do chwili t_K^h został zdefiniowany jako taki, w którym okres pracy dla każdego z wariantów produkcyjnych agregatu występuje co najmniej raz. Można wykazać, że w należącym do niego przedziale czasowym od $t_K^h - T^*$ do t_K^h każdy wariant występuje dokładnie jeden raz. Z (14) wynika wprost, że co najmniej raz. Hipotetyczne drugie wystąpienie wariantu m w przedziale czasowym od $t_K^h - T^*$ do $t_K^h - T_m^o$ lub od $t_K^h - T_m^o - T_m^H$ do t_K^h musiałoby się wiązać z dwukrotnym narośnięciem zaległości od zera do co najmniej wartości progowych Y_{mj}^* w przedziale czasowym o długości T^*. Ze względu na (1) (4) nie jest to możliwe. Dlatego w przedziale tym każdy wariant występuje dokładnie jeden raz. Wynika stąd między innymi, że sąsiednie okresy NHP nie mogą tu być okresami pracy w tym samym wariancie, w związku z czym nierówność (B-7) jest w tym przypadku równością:

$$T_m^H = s_m + \lceil x_m^+ \rceil, \qquad \text{dla } m = 1..M, \tag{15}$$

gdzie:

x_m^+ – miara czasowa zaległości wariantu m w chwilach $t_K^h - T_m^s, t_K^h - T_m^o$.

Przy tym, jak dla każdego okresu pracy, obowiązuje nierówność:

$$x_m^+ \geq x_m^*, \quad \text{dla } m = 1..M. \tag{16}$$

Dla dowodu twierdzenia o zbieżności zostanie najpierw wykazany lemat w formie następujących pięciu zależności:

$$T_m^0 + T_m^s \leq T^*, \qquad \text{dla } m = 1..M \tag{17}$$

$$T_m^h = s_m + \lceil x_m^* \rceil, \qquad \text{dla } m = 1..M \tag{18}$$

$$T_m^h \leq T_m^H, \qquad \text{dla } m = 1..M \tag{19}$$

$$T^s_{m+1} \geq T^s_m + T^h_m, \qquad \text{dla } m = 1..M\text{-}1 \tag{20}$$

$$T^a_{m+1} = \mathrm{Max}\left\{T^b_{m+1}, T^s_m + T^h_m\right\}, \quad \text{dla } m = 1..M\text{-}1. \tag{21}$$

Nierówność (20) opisuje kolejność okresów w poszczególnych wariantach bezpośrednio po chwili t^h_K jako taką samą, jak kolejność (10) bezpośrednio przed chwilą t^h_K. Wynika to z układu priorytetów wymuszonego przez procedury kroku 4 algorytmu NHP [1]. Jednak warunkami zachowania powtarzającej się cyklicznie kolejności wariantów są [1]:

1) osiąganie wartości progowych zaległości przez kolejne warianty i utrzymywanie tych wartości bez wzrostu przez wystarczająco długi czas,
2) nieprzekraczanie wartości progowych przez zaległości innych wariantów w czasie, gdy zaległości wariantu wskazanego zgodnie z ustaloną kolejnością (10) utrzymują swoje wartości progowe.

Warunki te są reprezentowane przez nierówność (17) dotyczącą chwil startu okresów pracy zdeterminowanych przez równość (21). Zależności (18) (19) (20) wprowadzono dla dowodu pozostałych tez lematu (17)... (21).

Dowód lematu zostanie przeprowadzony metodą indukcji zupełnej. Dla $m = 1$ zauważmy, że z definicji T^b_m wynika, iż w chwili $t^h_K + T^b_1$ zaległości dla wszystkich produktów wariantu 1 są większe lub równe wartościom progowym Y^*_{1j}, a stąd i z (1) (4) (12) wnioskujemy, że dokładnie równe. Przy tym przez czas

$$T^a_m + T^b_1 \leq T^a_1 + T^b_1 \leq T^*, \qquad \text{dla } m = 1..M \tag{22}$$

zaległości żadnego z wariantów nie mogą przekroczyć wartości progowych. Nie ma więc przeszkód, by zgodnie z założoną kolejnością zadecydować

$$T^s_1 = T^b_1. \tag{23}$$

Stąd i z (12) (14) wynika, że

$$T^o_1 + T^s_1 \leq T^a_1 + T^b_1 \leq T^*. \tag{24}$$

Zgodnie z procedurą kroku 4 algorytmu NHP [1], jeśli zaległości wybranego wariantu są równe w chwili decyzji swoim wartościom progowym, to czas roboczy okresu pracy jest równy wartości progowej miary czasowej zaległości. Stąd

$$T^h_1 = s_1 + \lceil x^*_1 \rceil. \tag{25}$$

Na tej podstawie, uwzględniając (15) (16), otrzymujemy:

$$T^h_1 \leq T^H_1. \tag{26}$$

Z oczywistego warunku wykluczania się równoczesnej pracy agregatu w różnych wariantach produkcyjnych wynika, że niezależnie od dalszej kolejności chwila startu do następnego okresu pracy musi spełniać nierówność

$$T_m^s \geq T_1^s + T_1^h, \quad \text{dla } m = 2..M \tag{27}$$

a zatem również

$$T_2^s \geq T_1^s + T_1^h. \tag{28}$$

Zbadajmy teraz czasy narastania zaległości (rys.1) od chwili $t_K^h - T_m^o$ do chwil $t_K^h + T_2^b$ i $t_K^h + T_1^s + T_1^h$ dla m = 2..M. Spełniają one warunki:

$$T_m^o + T_2^b \leq T_2^o + T_2^b \leq T_2^a + T_2^b \leq T^*, \quad \text{dla } m = 2..M \tag{29}$$

$$T_m^o + T_1^s + T_1^h \leq T_2^o + T_1^s + T_1^h \leq T_1^o - T_1^H + T_1^s + T_1^h \leq T_1^o + T_1^s \leq T^*, \quad \text{dla } m = 2..M, \tag{30}$$

co wraz z (1) (4) prowadzi do wniosku, że ani w chwili $t_K^h + T_2^b$, ani w chwili $t_K^h + T_1^s + T_1^h$ zaległości wariantów m = 2..M nie mogą przekroczyć wartości progowych. Dlatego nic nie stoi na przeszkodzie, by zdecydować, że

$$T_2^s = \mathrm{Max}\left\{T_2^b, T_1^s + T_1^h\right. . \tag{31}$$

Udowodnione zależności (24) (25) (26) (28) (31) są tezami lematu (17)..(21) dla m = 1. Pozostaje teraz ze słuszności tez (17)..(21) dla m wyprowadzić ich słuszność dla m+1. Zbadajmy najpierw lewą stronę nierówności (17):

$$T_{m+1}^0 + T_{m+1}^s = \mathrm{Min}\left\{T_m^o - T_m^H, T_{m+1}^a\right\} + \mathrm{Max}\left\{T_{m+1}^b, T_m^s + T_m^h\right\} \leq$$

$$\leq \mathrm{Max}\left\{T_m^o - T_m^H + T_{m+1}^b, T_m^o - T_m^H + T_m^s + T_m^h, T_{m+1}^a + T_{m+1}^b, T_{m+1}^a + T_m^s + T_m^h\right\}.$$

Zajmijmy się osobno każdym z czterech wyspecyfikowanych wyżej przypadków:

$$T_m^o - T_m^H + T_{m+1}^b \leq T_m^o - T_m^H + T_{m+1}^s \leq T_m^o - T_m^H + T_m^s + T_m^h \leq T_m^o + T_m^s \leq T^*$$

$$T_m^o - T_m^H + T_m^s + T_m^h \leq T_m^o + T_m^s \leq T^*$$

$$T_{m+1}^a + T_{m+1}^b \leq T^*$$

$$T_{m+1}^a \leq T_m^o - T_m^H \Rightarrow T_{m+1}^a + T_m^s + T_m^h \leq T_m^o - T_m^H + T_m^s + T_m^h \leq T^*.$$

Ponieważ każde z badanych wyrażeń jest mniejsze lub równe T^*, to

$$T_{m+1}^o + T_{m+1}^s \leq T^*. \tag{32}$$

Z (32) wraz z (1) (4) wnioskujemy, że jeśli $T_{m+1}^b < T_{m+1}^s$, to w przedziale $t_K^h + T_{m+1}^b$ do $t_K^h + T_{m+1}^s$ zaległości wariantu m+1 są utrzymywane na stałych wartościach $Y_{m+1,j}^*$. Dlatego w chwili $t_K^h + T_{m+1}^s$, która zgodnie z założeniem indukcyjnym (21) rozpoczyna okres pracy w wariancie m+1, zaległości związane z tym wariantem są równe wartościom progowym, a stąd

$$T^h_{m+1} = s_{m+1} + \lceil x^*_{m+1} \rceil. \tag{33}$$

Stąd, natychmiast po uwzględnieniu (15) (16), otrzymujemy:

$$T^h_{m+1} \le T^H_{m+1}. \tag{34}$$

Nierówność

$$T^s_{m+2} \ge T^s_{m+1} + T^h_{m+1} \tag{35}$$

uzasadniamy podobnie jak (27) (28) dla m = 1.

Analogicznie jak w przypadku (29) (30) dowodzimy, że

$$T^o_i + T^b_{m+2} \le T^o_{m+2} + T^b_{m+2} \le T^s_{m+2} + T^b_{m+2} \le T^*, \quad \text{dla } i = m+2..M \tag{36}$$

$$T^o_i + T^s_{m+1} + T^h_{m+1} \le T^o_{m+2} + T^s_{m+1} + T^h_{m+1} \le T^o_{m+1} - T^H_{m+1} + T^s_{m+1} + T^h_{m+1} \le T^o_{m+1} + T^s_{m+1} \le T^*,$$

$$\text{dla } i = m+2..M, \tag{37}$$

a stąd, że chwila

$$T^s_{m+2} = \mathrm{Max}\{T^b_{m+2}, T^s_{m+1} + T^h_{m+1} \tag{38}$$

jest chwilą startu do pracy w wariancie m+2.

Wyprowadzenie zależności (32) (33) (34) (35) (38) kończy dowód lematu (17) ... (21). Jego prawdziwość prowadzi do wniosku, że w przedziale czasowym od t^h_K do $t^h_K + T^*$ każdy wariant produkcyjny agregatu jest aktywny dokładnie jeden raz, przy czym wielkości partii są dla każdego z nich dokładnie równe wartościom progowym Y^*_{mj}. Stąd, bilansując przyrost zaległości w tym przedziale i uwzględniając (1) (4) wnioskujemy, że zaległość dla każdego produktu ma na końcu przedziału dokładnie taką samą wartość jak na jego początku. Łatwo też sprawdzić, że w chwili $t^h_K + T^*$ występuje ten sam wariant produkcyjny (postój) i te same wartości priorytetów poszczególnych wariantów co w chwili t^h_K. Z równości stanu procesu NHP w tych dwu chwilach i z założenia (2) o okresowości planów operacyjnych wnioskujemy, że począwszy od chwili t^h_K stan procesu i decyzje algorytmu NHP powtarzają się okresowo z okresem powtarzalności T^*. Istnieje więc pewna liczba K^* okresów pracy lub postoju, dla której słuszne są równości (5) (6) (7) (8) z twierdzenia o zbieżności procesu NHP. Liczba ta jest równa co najmniej M+1 (M okresów pracy i jeden okres postoju), lecz może być większa, jeśli między okresami pracy występują dodatkowe okresy postoju.

3. Wnioski ze zbieżności procesu NHP

Systemy produkcji powtarzalnej są projektowane w oparciu o cyklogramy produkcji rytmicznej. W praktyce, ze względu na liczne zakłócenia, utrzymanie produkcji idealnie rytmicznej nie jest możliwe. Dlatego prosty algorytm NHP przywracający założony tryb pracy agregatu po ustąpieniu przyczyn stanu nieustalonego może być bardzo przydatny.

Drugą korzyścią wypływającą ze zbieżności procesu NHP jest usprawiedliwienie doboru parametrów stałych algorytmu (danych wprowadzanych w kroku 1 [1]) w drodze optymalizacji cyklogramów, polegającej na minimalizacji kosztów przezbrojeń i magazynowania [3].

LITERATURA

1. Zaborowski M.: Nadążne harmonogramowanie produkcji. ZN Pol. Śl., s. Automatyka, Gliwice 2000, z. 129, str. 363.
2. Zaborowski M.: Stabilność procesu nadążnego harmonogramowania produkcji. ZN Pol. Śl., s. Automatyka Gliwice 2000, z. 129, str. 375.
3. Zaborowski M.: Sterowanie operatywne dyskretnymi procesami produkcji. Program Badań Podstawowych RP. I.02 „Teoria sterowania i optymalizacji ciągłych układów dynamicznych i procesów dyskretnych", Temat 4.6, Raport końcowy, 1990.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Z. Banaszak

Abstract

The one of qualities of the follow-up scheduling algorithm is convergence of the corresponding decision process. It means that if leading operational production plans are constant or cyclic then following executive plans, made by the algorithm, become cyclic after finite number of planning periods. The repetition period of these plans is the one of the algorithm parameters. The proof of convergence has been presented in the paper. The main assumption of this convergence theorem is that operational plans do not exceed capacity of production subsystem which is the object of control. Convergence of current executive plans to cyclic schedules is important because repetitive production systems are usually designed to strictly cyclic work. Thus, after disturbances termination they should automatically pass on to cyclic work mode.