Seria: Energetyka z. 53 Nr kol. 420

Wiktor I. Lebiediew, Władimir A. Pawlenko
Moskiewski Instytut Budowlany

Janusz Wandrasz
Instytut Techniki Cieplnej Pol. Śl.

PRZEPŁYW CIEPŁA NA DRODZE PROMIENIOWANIA I PRZEWODZENIA W OŚRODKU PÓŁPRZEŹROCZYSTYM

Streszczenie: W pracy przedstawiono analizę teoretyczną wpływu promieniowania na rozkład temperatur w nieruchomej półprzeźroczystej warstwie przewodzącej ciepło. Otrzymano rozkład temperatur wyraźnie odbiegający od rozkładu opisanego równaniem Fouriera, co może mieć istotny wpływ przy analizie stanu naprężeń.

1. Wprowadzenie

W zagadnieniach wymiany ciepła równoczesne przekazywanie ciepła przez promieniowanie, przewodzenie i konwekcję przyjęto nazywać złożoną wymianą ciepła. Zagadnienia te występują w różnych problemach technicznych z zakresu techniki cieplnej, hutnictwa szkła, wytwarzania półprzewodników itp.

Jednym z przypadków złożonej wymiany ciepła dla układów, w których nie występuje zjawisko konwekcji, może być przekazywanie ciepła przez promieniowanie i przewodzenie w nieruchomym ośrodku emitująco-pochłaniającym.

Tego rodzaju procesy zachodzą w wielu materiałach szklarskich, ceramicznych i krystalicznych. Oprócz tego istnieją potwierdzone dowody [4] na istnienie wpływu promieniowania przy pomiarach współczynnika przewodzenia ciepła licznych cieczy i sprężonych gazów, przy temperaturach rzędu pokojowych. Ośrodki częściowo pochłaniające promieniowanie w zakresie podczerwieni nazywane są ośrodkami półprzeźroczystymi. Typowym ich przedstawicielem jest szkło. Dla wielu gatunków szkła pełna przeźroczystość występuje w zakresie fal 0,8-2,6 mikrona, nieco mniejsza dla 2,6-5,0 i całkowita nieprzeźroczystość dla promieniowania o większej długości fali [2].

Przepływ ciepła na drodze promieniowania w układzie ustalonym opisuje się równaniami całkowymi drugiego rzędu (równania Fredholma). Rozwiązanie analityczne tych równań jest bardzo utrudnione szczególnie dla układów, w których uwzględnia się pochłanianie objętościowe.

Zagadnienie to znacznie bardziej komplikuje się w przypadkach złożonej wymiany ciepła, bowiem do powyższych równań należy dołączyć dodatkowo równania całkowo-różniczkowe ujmujące bilans energii. Metody rozwiązania takich układów równań do chwili obecnej nie zostały w pełni opracowane. W związku z tym znane rozwiązania analityczne zagadnień złożonej wymiany ciepła nie są ścisłe i opierają się na licznych założeniach upraszczających.

W badaniach promienistej wymiany ciepła szeroko stosowane są równania różniczkowe, za pomocą których rozwiązano szereg zagadnień ważnych dla praktyki i teorii.

Jedną z zalet metod różniczkowych obliczenia wymiany ciepła przez promieniowanie jest ich stosunkowo prosta struktura i możliwość wykorzystania takiego rzędu równań, dla którego znane są metody rozwiązania.

Przy rozwiązywaniu zjawisk złożonej wymiany ciepła równania te wiążą się z równaniami różniczkowymi przewodzenia ciepła i konwekcji.

Jedną z metod różniczkowego rozwiązywania wymiany ciepła przez promieniowanie jest przybliżenie oparte na teorii dyfuzji. Wykorzystuje ona dla wektora strumienia promieniowania wyrażenia analogiczne jak dla wektora strumienia dyfuzyjnego cząstek.

Wykorzystując tenzorowy zapis wektora strumienia ciepła przekazywanego przez promieniowanie dla ośrodka pochłaniająco-nierozpraszającego [5] otrzymamy

$$\vec{q}_r = -\frac{1}{k}\,\mathrm{div}\,E \tag{1}$$

gdzie:

E - tenzor promieniowania,

k - średni współczynnik pochłaniania w ośrodku.

W przypadku dużych gęstości optycznych i stanów bliskich równowadze termicznej drugą część tenzora, uwzględniającą zmiany intensywności promieniowania w różnych kierunkach, można pominąć w porównaniu z pierwszą.

W tym przypadku przyjmując za potencjał pola gęstość energii promienistej można przedstawić wektor strumienia ciepła przekazywanego przez promieniowanie następującą zależnością

$$\vec{q}_r = -\frac{c}{m\,k}\,\mathrm{grad}\,U \tag{2}$$

gdzie:

U - objętościowa gęstość energii promienistej,

c - prędkość rozchodzenia się promieniowania w danym ośrodku,

m - stała bezwymiarowa.

Przyjęte założenie izotropowości promieniowania pozwala wyrazić gęstość objętościową promieniowania zależnością

$$U = \frac{4\sigma T^4}{c}$$

σ - stała Boltzmanna,

T - temperatura bezwzględna, K.

Końcową zależność wektora promienistego strumienia ciepła z uwzględnieniem współczynnika załamania "n" dla danego ośrodka można zapisać w postaci

$$\vec{q}_r = -\frac{4\sigma n^2}{m\,k}\,\mathrm{grad}\,T^4 \tag{3}$$

lub dla zagadnienia jednowymiarowego

$$\vec{q}_r = - \frac{16 \sigma n^2 T^3}{m k} \frac{dT}{dx} \tag{4}$$

W danym przypadku zakłada się, że ośrodek jest ciałem szarym absorbującym promieniowanie w całym zakresie widma, a jego współczynnik pochłaniania nie zależy od długości fali promieniowania i temperatury.

Jeśli założenie takie jest niedopuszczalne, można wprowadzić średnią wartość współczynnika pochłaniania, wyznaczoną jedną z wielu metod. Najbardziej dokładną zależnością dla obliczenia średniej wartości współczynnika pochłaniania jest równanie

$$k = \frac{\int_0^\infty \frac{dI(\nu,T)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{K_\nu} \frac{dI(\nu,T)}{dT} d\nu}$$

gdzie $I(\nu,T)$ jest spektralną intensywnością promieniowania zależną od częstości (długości fali) i temperatury.

Założenie lokalnej równowagi termodynamicznej nie zniekształca fizycznego obrazu przekazywania ciepła przez promieniowanie. Dane eksperymentalne są zbieżne z wynikami obliczeń otrzymanymi na bazie powyższych teoretycznych założeń i mogą zarazem być potwierdzeniem możliwości stosowania w rozważaniach dostatecznie dokładnego założenia o lokalnej równowadze termodynamicznej ośrodka. Jednakże założenia powyższego nie wolno stosować w przypadku występowania dużych gradientów temperatur i układów wyraźnie nierównowagowych.

2. Przykład złożonej wymiany ciepła przez promieniowanie i przewodzenie

W oparciu o powyższe wywody rozpatrzmy wymianę ciepła przewodzeniem i promieniowaniem między dwoma równoległymi nieskończonymi izotermicznymi powierzchniami, pomiędzy którymi znajduje się półprzeźroczysty szary ośrodek o współczynniku absorpcji k i współczynniku przewodzenia ciepła λ. Wielkości λ i k będziemy traktować jako niezależne od temperatury. Ośrodek charakteryzuje się współczynnikiem załamania n stałym w całym zakresie temperatur i długości fal promieniowania. Do obliczeń wykorzystuje się warunki brzegowe pierwszego rodzaju, tj. zakłada się znajomość temperatur na powierzchniach T_1 i T_2 ($T_1 > T_2$) oraz ich emisyjności ε_1 i ε_2. Grubość rozpatrywanej warstwy wynosi L. W rozważaniach pomija się rozproszenie promieniowania oraz występowanie wewnętrznych źródeł ciepła.

Pole temperatur przy powyższych założeniach jest uzależnione od przewodzenia i promieniowania. Należy zwrócić uwagę, że w tak kombinowanym przepływie ciepła zastosowanie prawa Fouriera nie zawsze jest prawidłowe.

Ogólne równanie bilansu energii dla powyższego przypadku złożonej wymiany ciepła można przedstawić zależnością

$$\operatorname{div} \vec{q}_r + \operatorname{div} \vec{q}_p = 0 \tag{5}$$

gdzie:

q_r, q_p - odpowiednie wektory strumienia ciepła przekazywanego przez promieniowanie i przewodzenie.

Przyjmując jednowymiarowy przepływ ciepła można zapisać równanie (5) w postaci

$$\frac{d\vec{q}_r}{dx} - \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \tag{6}$$

Powyższe równanie dla uproszczenia obliczeń dogodnie jest przedstawić w postaci bezwymiarowej

$$\frac{dR}{d\tau} - \frac{1}{Sk} \cdot \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} = 0 \tag{7}$$

gdzie:

$\Theta = \frac{T}{T_o}$ - bezwymiarowa temperatura,

$R = \frac{q_r}{4\, n^2 \sigma T_o^4}$ - bezwymiarowy strumień ciepła przekazywanego przez promieniowanie,

$Sk = \frac{4\, n^2 \sigma T_o^3}{\lambda\, k}$ - liczba kryterialna Starka, określająca stosunek promieniowania do przewodzenia ciepła w sumarycznym strumieniu ciepła,

$\tau_o = k\, L$ - optyczna grubość warstwy,

T_o - temperatura odniesienia.

Rozwiązania równania (7) należy szukać dla warunków brzegowych

dla $\tau = 0$ $\Theta = \Theta_1$

i $\tau = \tau_o$ $\Theta = \Theta_2$

Przekształcając równanie (4) do postaci bezwymiarowej otrzymamy

$$R = -\frac{4}{m} \Theta^3 \frac{d\Theta}{d\tau} \tag{8}$$

Po zróżniczkowaniu (8) i podstawieniu do (7) równanie różniczkowe przyjmuje postać

$$\frac{12}{m} \Theta^2 \left(\frac{d\Theta}{d\tau}\right)^2 + \frac{4}{m} \Theta^3 \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \frac{1}{Sk} \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} = 0 \tag{9}$$

Przekształcając równanie (9) można sprowadzić je do postaci

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2}\left(1 + \frac{4\Theta^3\ Sk}{m}\right) + \frac{d\Theta}{dz}\left[\frac{d}{dz}\left(1 + \frac{4\Theta^3\ Sk}{m}\right)\right] = 0 \tag{10}$$

gdzie $z = \frac{\tau}{\tau_0}$ oznacza zredukowaną optyczną grubość warstwy, przy czym przedstawione uprzednio warunki brzegowe przyjmują postać

dla $z = 0$, $\Theta = \Theta_1$ i dla $z = 1$, $\Theta = \Theta_2$

Dalsze przekształcenie równania (10) prowadzi do zależności

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1 + \frac{4\ Sk}{m}\Theta^3\right)\frac{d\Theta}{dz}\right] = 0 \tag{11}$$

lub po scałkowaniu

$$\left(1 + \frac{4\ Sk}{m}\Theta^3\right)\frac{d\Theta}{dz} = c_1 \tag{12}$$

Równanie (12) jest równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązanie można przedstawić w postaci

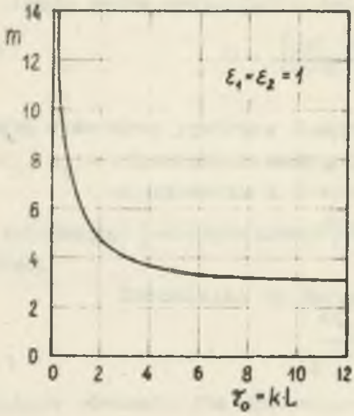
$$\Theta + \frac{4\ Sk}{m}\Theta^4 = c_1\ z + c_2 \tag{13}$$

Stałe c_1 i c_2 wyznaczone z warunków brzegowych i podstawione do równania (13) dają rozwiązanie powyższego zagadnienia w postaci

$$\Theta + \frac{Sk}{m}\Theta^4 = \Theta_1 + \frac{Sk}{m}\Theta_1^4 - \left[(\Theta_1 - \Theta_2) + \frac{Sk}{m}(\Theta_1^4 - \Theta_2^4)\right] z \tag{14}$$

Otrzymane równanie opisuje pole temperatur w płaskiej przewodzącej warstwie półprzeźroczystego ośrodka. Widać tu wyraźną zależność rozkładu temperatur od takich parametrów jak Sk, τ, Θ_1, Θ_2 oraz m. Pierwsze z tych czterech parametrów nie budzą zastrzeżeń, jednak znaczenie parametru m wymaga osobnego omówienia. Analiza parametru m przeprowadzona wcześniej przez autorów z Moskiewskiego Instytutu Budowlanego wykazała, że zależy ona od grubości warstwy optycznej i optycznych własności powierzchni granicznych. W związku z tym zaproponowano nazywać liczbę m "bezwymiarowym parametrem optyczno-geometrycznym".

Dla określenia wielkości parametru m opracowano dane doświadczalne z pracy [4], a niektóre wyniki tych prac przedstawiono na rys. 1 i 2. Wykonane obliczenia wykazały, że dla dużych grubości warstwy optycznej i dużych wartości współczynników absorbcji powierzchni granicznych można przyjmować m = 3. Odpowiada to przyjętej analogii rozchodzenia się promieniowania do dyfuzji cząsteczek. Dla małych grubości warstwy optycznej i dużych reflek-



Rys. 1. Zależność parametru m od optycznej grubości warstwy τ_0 dla $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

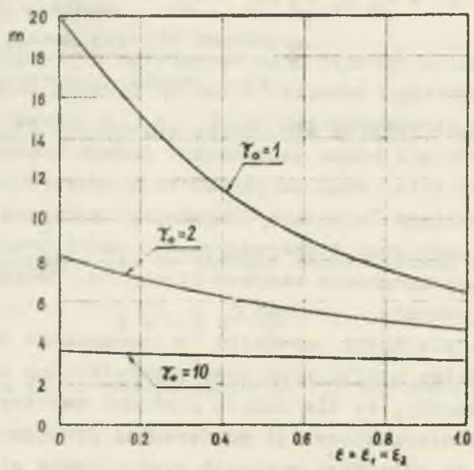
syjności powierzchni ograniczających $m \to \infty$. Wartość m zamyka się więc w granicach $3 \leq m \leq \infty$, co jest zgodne z założeniami pracy [1].

Przeprowadzona analiza określenia wartości parametru m pozwoliła rozszerzyć zakres zastosowania dyfuzyjnego przybliżenia dla wektora strumienia promienistego z występującym wspólnie przewodzeniem na zakres średnich, a w szeregu przypadków i małych grubości warstwy optycznej. Z rysunków 1 i 2 wynika, że m=3 można stosować dla $\tau_0 > 10$, natomiast przy $\tau_0 < 10$ wartość parametru m zależą wyraźnie od grubości warstwy optycznej i emisyjności powierzchni ograniczających

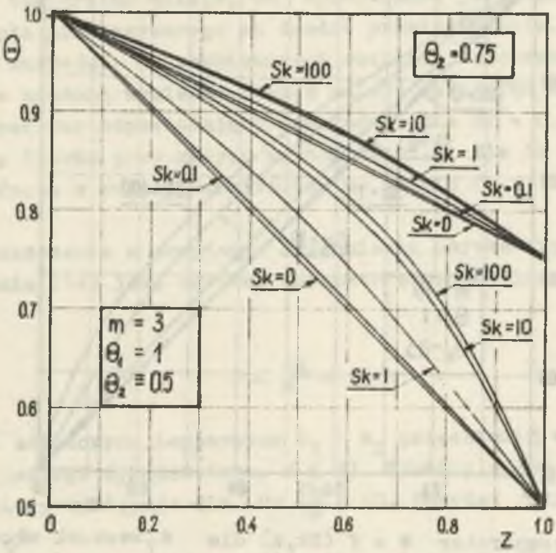
3. Wnioski

Otrzymane równanie (14) opisujące rozkład temperatur w ośrodku półprzeźroczystym rozwiązano za pomocą maszyny cyfrowej przyjmując wartości liczby Starka w zakresie $0 \leq Sk \leq 100$ oraz $3 \leq m \leq 20$. Dla $Sk = 0$ rozpatrywane zagadnienie sprowadza się do zagadnienia przewodzenia, a przy przyjętym założeniu $\lambda(T)$ = idem rozkład temperatur jest funkcją liniową z.

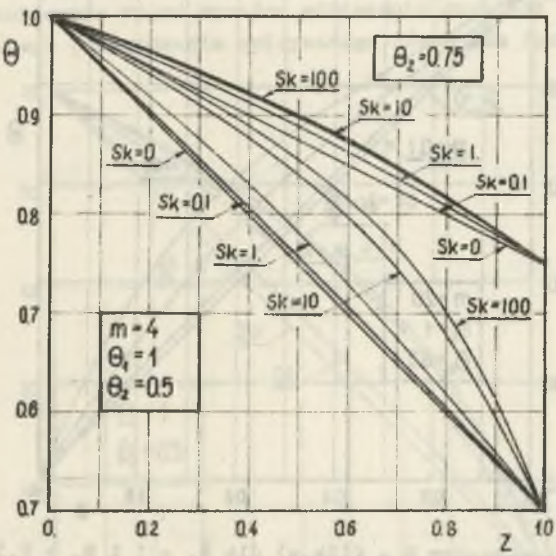
Dla graficznej interpretacji równania (14) oraz wykazania wpływu parametru m niektóre z otrzymanych wyników przedstawiono na wykresach (rys. 3, 4 5, 6). Wykresy przedstawione na rys. 3 i 4 wykonano dla dwu różnych temperatur ściany $\Theta_2 = 0,5$ i $\Theta_2 = 0,75$.



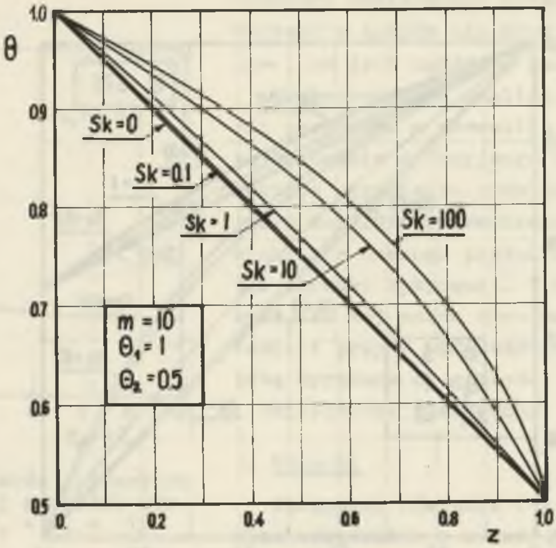
Rys. 2. Zależność parametru m od emisyjności powierzchni ograniczających obszar dla różnych wartości τ_0



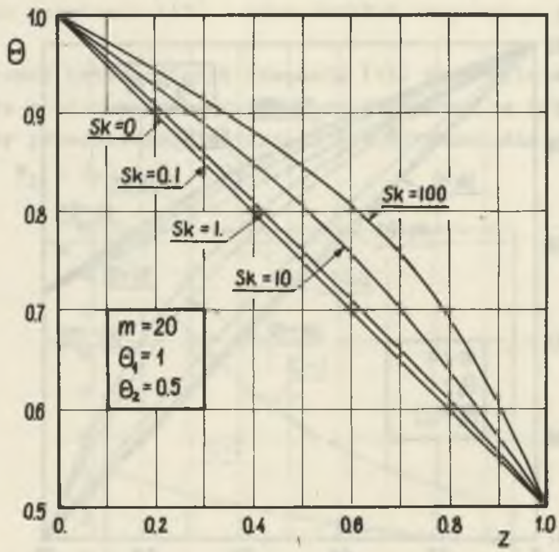
Rys. 3. Rozkład temperatur Θ w warstwie półprzeźroczystej dla $\Theta_1 = 1$ oraz $\Theta_2 = 0{,}5$ i $0{,}75$ w zależności od Sk przy $m = 3$



Rys. 4. Rozkład temperatur Θ w warstwie półprzeźroczystej dla $\Theta_1 = 1$ oraz $\Theta_2 = 0{,}5$ i $0{,}75$ w zakresie od Sk przy $m = 4$



Rys. 5. Rozkład temperatur $\Theta = f(Sk,z)$ dla $\Theta_1 = 1$ i $\Theta_2 = 0{,}5$ przy $m = 10$



Rys. 6. Rozkład temperatur $\Theta = f(Sk,z)$ dla $\Theta_1 = 1$ i $\Theta_2 = 0{,}5$ przy $m = 20$

W miarę zmniejszenia się różnicy temperatur Θ_1 i Θ_2 wpływ promieniowania na rozkład temperatur maleje, co spowodowane jest zmniejszaniem się strumienia ciepła przekazywanego na drodze promieniowania.

Ze wzrostem wartości m rozbieżności rozkładu temperatur między samym przewodzeniem a złożoną wymianą ciepła maleją osiągając dla m = ∞ liniowy rozkład temperatur odpowiadający rozkładowi dla Sk = 0.

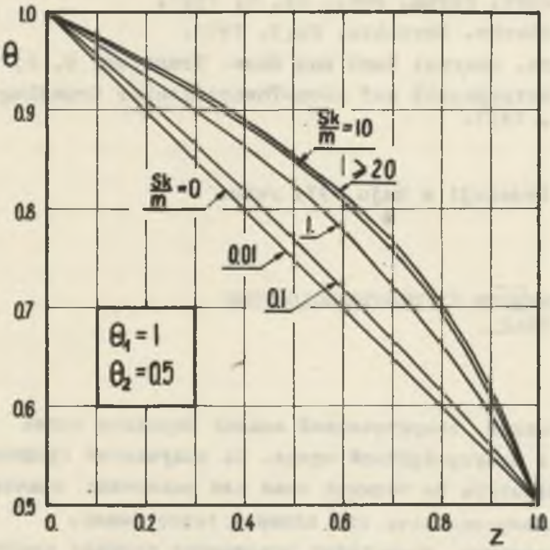
Wpływ liczby Starka przy małych wartościach m dla Sk > 10 nie jest zbyt duży i wzrasta z rosnącą wartością m (linie Sk = 10, 100 na rys. 3 i 6).

Znaczne uproszczenie w powyższym zagadnieniu uzyska się przyjmując w rozwiązaniu równania (14) jako odrębny parametr stosunek liczby Starka do parametru m

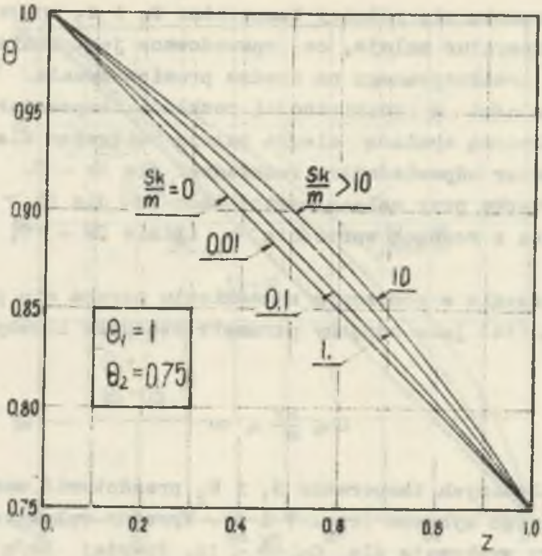
$$0 \leqslant \frac{Sk}{m} \leqslant \infty$$

Pozwala to dla założonych temperatur Θ_1 i Θ_2 przedstawić wszelkie rozwiązania za pomocą jednego wykresu (rys. 7 i 8). Wyraźny wpływ tego stosunku na profil temperatury występuje dla $0 < \frac{Sk}{m} < 10$. Powyżej Sk/m = 10 profil ten ulega nieznacznym zmianom.

Przedstawiona w niniejszej pracy analiza złożonej wymiany ciepła pomimo szeregu założeń upraszczających wykazuje wyraźny wpływ promieniowania na rozkład temperatur w półprzeźroczystej warstwie przewodzącej. Ze wzrostem udziału promieniowania widać wyraźne odbieganie rozkładu temperatur od rozkładu dla czystego przewodzenia opisywanego równaniem Fouriera.



Rys. 7. Profil temperatury $\Theta = \varphi(\frac{Sk}{m}, z)$ dla $\Theta_1 = 1$ i $\Theta_2 = 0,5$



Rys. 8. Profil temperatury $\Theta = \varphi(\frac{Sk}{m}, z)$ dla $\Theta_1 = 1$ i $\Theta_2 = 0,75$

LITERATURA

[1] Dietkow S.: Tiepłomasopierenos, t. 6, 1966, Minsk,
[2] Gardon R.: J. Amer. ceram. soc., 44, 7, 1961.
[3] Genzel L.: Glastechn. Berichte, 26,3, 1953.
[4] Poltz H.: Intern. Journal Heat and Mass. Transfer, 8, 4, 1965.
[5] Rosseland S.: Astrophysik auf Atom-Theoretischer Grundlage, Springer Verlag, Berlin, 1931.

Praca wpłynęła do Redakcji w maju 1974 roku.

ПЕРЕНОС ТЕПЛА ИЗЛУЧЕНИЕМ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ
В ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ

Р е з ю м е

В работе представлен теоретический анализ передачи тепла излучением и теплопроводностью в полупрозрачной среде. На полученных графиках показано распределение температуры по толщине слоя для различных значений соотношения радиации и Теплопроводности при сложном теплообмене.

С ростом доли радиации происходит усложнение профиля температуры и увеличение его отношения от распределения, выступающего при чистой теплопроводности, описываемого уравнением фурье.

HEAT TRANSFER BY RADIATION AND CONVECTION IN A SEMITRANSPARENT MEDIUM

S u m m a r y

The paper presents the theoretical analysis of an influence of radiation of the temperature distribution in a motionless semitransparent layer which conducts a heat. There is obtained the temperature distribution which considerably differs from the distribution described by Fourier equation, and it can have essential influence on the analysis of stress state.