ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975
Seria: Energetyka z. 53 Nr kol. 420

Gerard Kosman
Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

NUMERYCZNE MODELOWANIE POLA NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ W ZŁOŻONYCH ELEMENTACH MASZYN CIEPLNYCH

Streszczenie: Rozpatrzono zagadnienie wyznaczenia rozkładu naprężeń i odkształceń w elementach maszyn cieplnych przy nieustalonym przewodzeniu ciepła. Podano metodę analizy naprężeń termicznych z uwzględnieniem rzeczywistej zależności własności fizycznych materiału od temperatury. Układ równań równowagi rozwiązano metodą różnic skończonych. W celu sprawdzenia otrzymanych zależności przeprowadzono obliczenia rozkładu naprężeń w walcu, którego przekrój poprzeczny ograniczony jest dwoma współogniskowymi elipsami. Uzyskane wyniki porównano z rozwiązaniem dokładnym.

1. Wstęp

Rozwój maszyn i urządzeń energetycznych jest nierozerwalnie związany z doskonaleniem metod ich projektowania, jak również wprowadzeniem nowych technologii wytwarzania. Uwaga ta odnosi się w szczególności do obliczeń wytrzymałościowych, których wynik decyduje w głównej mierze o wyborze cech konstrukcyjnych projektowanej maszyny. Dokładna analiza stanu naprężenia i odkształcenia w elementach maszyn cieplnych jest znacznie utrudniona z uwagi na skomplikowany kształt i złożone warunki brzegowe. Uwzględnienie zmienności własności fizycznych badanego ciała jeszcze bardziej komplikuje zagadnienie. W związku z tym do analizy warunków pracy elementów maszyn cieplnych stosuje się różne metody przybliżone.

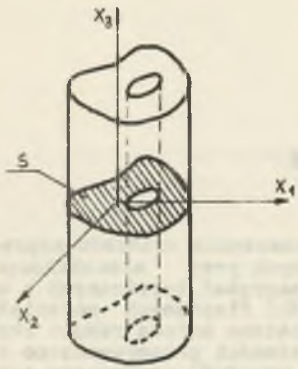
W niniejszej pracy zostanie przedstawiona numeryczna metoda rozwiązania dwuwymiarowego zagadnienia termosprężystości, dla którego składowe stanu naprężenia i odkształcenia nie zmieniają się w kierunku jednej z osi układu współrzędnych. Podana metoda pozwala wyznaczyć naprężenia i odkształcenia w złożonych elementach maszyn wywołane obciążeniami mechanicznymi oraz nierównomiernym nagrzaniem. Możliwe jest przy tym uwzględnienie zależności stałych materiałowych od temperatury.

2. Założenia problemu

Rozpatrzmy ciało, którego wymiar w kierunku osi x_3 jest znacznie większy niż pozostałe (rys. 1). Obciążenie powierzchniowe i pole temperatur nie zmienia się w kierunku osi x_3. Przykładem takiego ciała może być np. łopatka kierownicza względnie robocza turbin cieplnych, ożebrowana rura odparownika (rura z płetwą).

Przeprowadzone rozważania słuszne są dla następujących założeń:

a) przekrój poprzeczny - ukształtowany dowolnie - nie zmienia się w kierunku osi x_3;



Rys. 1. Model łopatki turbiny cieplnej

b) powierzchnia boczna jest obciążona siłami stałymi na długości i prostopadłymi do tego kierunku;

c) pole temperatury nie zależy od współrzędnej x_3;

d) zmiana temperatury w czasie jak również stopień nierównomierności nagrzania ciała są tak duże, że powodują istotne zmiany stałych materiałowych. Przyjmujemy więc, że stałe te zależą od temperatury, a tym samym są funkcjami miejsca;

e) przekroje poprzeczne pozostają po odkształceniu płaskie, a wydłużenie jednostkowe w kierunku osiowym jest wielkością stałą: ε_3 = const. Załóżmy na wstępie, że $\varepsilon_3 = 0$, a następnie wprowadzimy odpowiednie poprawki.

Problem wyznaczenia rozkładu temperatur $T(x_1, x_2, t)$ omówiono szczegółowo w pracach [3,4]. Prace te zawierają szczegółowe wzory obliczeniowe dla szczególnie przydatnych w obliczeniach układów współrzędnych łącznie z konkretnymi przykładami zastosowań. W związku z tym w dalszych rozważaniach przyjmiemy, że rozkład temperatury jest znany.

3. Numeryczne wyznaczenie pola naprężeń i odkształceń

Do wyznaczenia stanu naprężenia z uwzględnieniem zależności stałych materiałowych od temperatury zastosujemy metodę siatek (różnic skończonych). W metodzie tej funkcje zmiennej $\vec{x}$ nie są podawane dla każdego punktu badanego obszaru, ale tylko dla pewnych jego punktów $\vec{x}_k$ (k = 1,2,...) zwanych węzłami i tworzących siatkę. W celu skonstruowania odpowiedniej siatki należy badane ciało podzielić na elementarne wielościany. Podział złożonych elementów maszyn przy użyciu elementarnych prostopadłościanów nie zapewnia dostatecznej dokładności szukanego rozwiązania. Problem zwiększenia dokładności może być rozwiązany dwoma sposobami: przez wprowadzenie nowych układów współrzędnych gwarantujących dokładniejszy podział rozpatrywanej bryły lub przez wprowadzenie odpowiednich poprawek do wzorów obliczeniowych. Rozpatrzmy pierwszy sposób postępowania. W związku z tym wprowadźmy specjalne układy współrzędnych krzywoliniowych q_1, q_2, q_3 [6] o powierzchniach odpowiadających kształtom bryły.

Badaną bryłę dzielimy na elementarne wielościany za pomocą:

- płaszczyzn x_3 = const.
- powierzchni

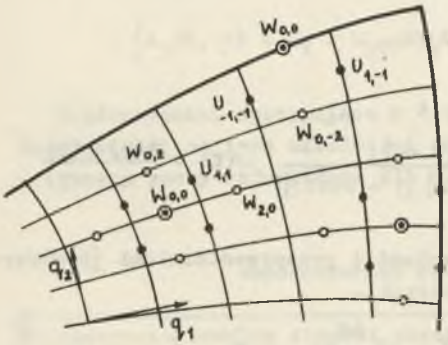
$$q_{1m} = q_{10} + m \cdot \Delta q_1$$

$$(m,n, = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$q_{2n} = q_{20} + n \cdot \Delta q_2$$

Powierzchnie środkowe q_{10} i q_{20} można przyjąć dowolnie.

Punkty obliczeniowe obieramy w środkach ścian bocznych. Rozpatrywane zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia przemieszczeń w punktach obliczeniowych $U_{m,n}$ w kierunku osi q_1 oraz w punktach $W_{m,n}$ w kierunkach osi q_2 [7] (rys. 2). Po wyznaczeniu przemieszczeń można w prosty sposób wyznaczyć odkształcenia a następnie naprężenia.



Rys. 2. Podział różnicowy obszaru płaskiego

4. Różnicowe równania równowagi

Odpowiednie zależności między przemieszczeniami w punktach sąsiednich uzyskamy z równań równowagi. Równania te we współrzędnych krzywoliniowych sprowadzają się w badanym przypadku ($H_3 = 1$, $\partial / \partial q_3 = 0$, $v = 0$) do postaci [5,2]

$$H_j \frac{\partial \sigma_i}{\partial q_j} + \frac{\partial H_j}{\partial q_i} (\sigma_i - \sigma_j) + H_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial q_j} + 2\sigma_{ij} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} = 0 \qquad (1)$$

$$i,j = 1,2; \quad i \neq j$$

Przyjmujemy, że równanie równowagi w kierunku osi q_1 będzie spełnione w węzłach $U_{m,n}$ natomiast równanie drugie w węzłach $W_{m,n}$. Rozpatrzmy równanie równowagi w kierunku osi q_2 w punkcie $W_{0,0}$ (rys. 2). Zastępując pochodne różnicami skończonymi otrzymujemy

$$\Delta q_1 H_1 \Delta_2 \sigma_2 + \Delta q_1 \Delta_2 H_1 (\sigma_2 - \sigma_1) + \Delta q_2 H_2 \Delta_1 \sigma_{12} + 2 \Delta q_2 \sigma_{12} \Delta_1 H_2 = 0. \qquad (2)$$

W równaniu tym zastosowano następujące oznaczenia [1]

$$F(m,n) \equiv F(q_{1m}, q_{2n}),$$

$$\Delta_1 F(m,n) \equiv F(m+1,n) - F(m-1,n).$$

Dodatkowo przyjmujemy, że wartości dowolnej funkcji F w badanym punkcie (m = 0 i n = 0) podawane będą bez dodatkowych oznaczeń, więc

$$F = F(0,0),$$

$$\Delta_i F = \Delta_i F(0,0). \qquad i = 1,2$$

Naprężenia w równaniu (2) można wyrazić przez odkształcenia następująco

$$\sigma_i = (2\mu + \lambda)\varepsilon_i + \lambda\varepsilon_j - \omega T \qquad i,j = 1,2;\ i \neq j$$

$$\sigma_3 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \omega T$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

gdzie:

$$\mu(T) = \frac{E(T)}{2\left[1 + \nu(T)\right]}, \quad \lambda(T) = \frac{E(T)\,\nu(T)}{\left[1 + \nu(T)\right]\left[1 - 2\nu(T)\right]}, \quad \omega(T) = \frac{E(T)\,\alpha(T)}{1 - 2\nu(T)}$$

Uwzględniając związki między odkształceniami i przemieszczeniami [5] otrzymujemy

$$\sigma_1 = \frac{2\mu + \lambda}{H_1}\left(\frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{w}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) + \frac{\lambda}{H_2}\left(\frac{\partial w}{\partial q_2} + \frac{u}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right) - \omega T,$$

$$\sigma_3 = \lambda\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial q_2} + \frac{u}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{w}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right) - \omega T, \tag{4}$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\left[\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{u}{H_1}\right) + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{w}{H_2}\right)\right].$$

Zależność naprężenia σ_2 od przemieszczeń uzyskamy z pierwszego z równań (4) posługując się regułą przemiany cyklicznej. Zastępując w zależnościach (4) pochodne cząstkowe różnicami skończonymi można np. naprężenie σ_1 przedstawić w formie

$$\sigma_1 = \frac{2\mu + \lambda}{H_1}\left[\frac{U_{1,1} + U_{1-1} - U_{-1,1} - U_{-1,1}}{2\Delta q_1} + \frac{W_{0,0}}{H_2}\frac{\Delta_2 H_1}{\Delta q_2}\right] + \tag{5}$$

$$+ \frac{\lambda}{H_2}\left[\frac{W_{0,2} - W_{0,-2}}{2\Delta q_2} + \frac{U_{1,1} + U_{1,-1} + U_{-1,1} + U_{-1,-1}}{4H_1}\frac{\Delta_1 H_2}{\Delta q_1}\right] - \omega T_{0,0}$$

W podobny sposób można wyrazić pozostałe naprężenia występujące w równaniu (2). Otrzymamy wtedy różnicowe równanie równowagi wyrażone przez przemieszczenia

$$\left[D_3 + E_3(1,0)\right]W_{2,0} + \left[-D_3 + E_4(-1,0)\right]W_{-2,0} + \left[A_1(0,1) - C_3\right]W_{0,2} +$$

$$+ \left[A_2(0,-1) + C_3\right]W_{0,-2} - \left[A_2(0,1) + A_1(0,-1) + C_4 + D_4 + E_4(1,0) +\right.$$

$$\left. + E_3(-1,0)\right]W_{0,0} + \left[A_3(0,1) - C_1 + D_1 + E_1(1,0)\right]U_{1,1} - \left[A_4(0,1) - C_2 +\right.$$

$$\left. - D_1 + E_1(-1,0)\right]U_{-1,1} + \left[A_4(0,-1) + C_2 - C_2 + E_2(1,0)\right]U_{-1,-1} +$$

$$- \left[A_3(0,-1) + C_1 + D_2 + E_2(1,0)\right]U_{1,-1} = F_1(T_{0,1} - T_{0,-1}) \qquad (6a)$$

Współczynniki występujące w ostatnim równaniu zestawiono w tablicy 1. Podstawiając do tych zależności odpowiednie wartości współczynników Lamego otrzymamy wzory szczegółowe dla elementów prostokątnych, walcowych i innych.

Tablica 1

Współczynniki równań przemieszczeniowych
- Zagadnienie płaskie -

Współczynniki	Dowolny element płaski Układ współrzędnych: q_1, q_2 Współczynniki Lamego: H_1, H_2	Element prostokątny x_1, x_2 1, 1	Element walcowy r, 0 1, r
1	2	3	4
$A_{1,2}$	$(2\mu+\lambda)\frac{H_1}{H_2}\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} \pm \frac{\lambda}{2H_2}\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2}\Delta_2 H_1$	$(2\mu+\lambda)\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}$	$(2\mu+\lambda)\frac{\Delta r}{r\Delta\theta}$
$A_{3,4}$	$\lambda \pm \frac{2\mu+\lambda}{2}\frac{\Delta_1 H_2}{H_2}$	λ	$\lambda \pm \frac{2\mu+\lambda}{2}\frac{\Delta r}{r}$
$C_{1,2}$	$\frac{\Delta_2 H_1}{2H_1}\left[(2\mu+\lambda) \pm \frac{\lambda}{2H_2}\Delta_1 H_2\right]$	0	0
C_3	$\frac{\lambda\Delta_2 H_1}{2H_2}\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2}$	0	0
C_4	$(2\mu+\lambda)\frac{(\Delta_2 H_1)^2}{H_1 H_2}\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2}$	0	0

c.d. tablicy 1

1	2	3	4
$D_{1,2}$	$\frac{\mu \Delta_1 H_2}{2H_2}\left(1 \mp \frac{\Delta_2 H_1}{2H_1}\right)$	0	$\frac{\mu \Delta r}{2r}$
D_3	$\frac{\mu \Delta_1 H_2}{2H_1} \frac{\Delta q_2}{\Delta q_1}$	0	$\frac{\mu \Delta \Theta}{2}$
D_4	$\frac{\mu}{H_1 H_2} \frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} (\Delta_1 H_2)^2$	0	$\frac{\mu \Delta \Theta \Delta r}{r}$
$E_{1,2}$	$\mp \frac{\mu \Delta_2 H_1}{2H_1}$	μ	μ
$E_{3,4}$	$\frac{\mu}{H_1} \frac{\Delta q_2}{\Delta q_1}\left(H_2 \mp \frac{\Delta_1 H_2}{2}\right)$	$\mu \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$	$\mu \frac{\Delta \Theta}{\Delta r}\left(r \mp \frac{\Delta r}{2}\right)$
F_1	$\omega H_1 \Delta q_1$	$\omega \Delta x_1$	$\omega \Delta r$
F_2	$\frac{\omega}{2} \Delta q_1 \Delta_2 H_1$	0	0

Dla punktów obliczeniowych zewnętrznych (rys. 2) odpowiednie zależności między pomieszczeniami w punktach sąsiednich otrzymamy w podobny sposób wychodząc z równań warunków brzegowych. Po przekształceniach mamy

$$\left[-D_3 + E_4(-1,0)\right] W_{-2,0} + \left[A_1(0,1) - C_3\right] W_{0,2} + \left[A_2(0,-1) + C_3\right] W_{0,-2} +$$

$$-\left[A_2(0,1) + A_1(0,-1) + C_4 - D_3 + D_4 + E_3(-1,0)\right] W_{0,0} + \left[A_3(0,1) - C_1 +\right.$$

$$\left. + D_1\right] U_{1,1} - \left[A_4(0,1) - C_2 - D_1 + E_1(-1,0)\right] U_{-1,1} + \left[A_4(0,-1) + C_2 - D_2 +\right.$$

$$\left. + E_2(-1,0)\right] U_{-1,-1} - \left[A_3(0,-1) + C_1 + D_2\right] U_{1,-1} = F_1(T_{0,1} - T_{0,-1}) \tag{6b}$$

Dla punktów na powierzchni ciała otrzymujemy

$$\left[A_2(0,-1) + C_3\right]W_{0,-2} - \left[A_1(0,-1) + C_3 + \frac{1}{2}C_4\right]W_{0,0} +$$
$$\left[A_4(0,-1) + C_2\right]U_{-1,-1} - \left[A_3(0,-1) + C_1\right]U_{1,-1} + F_2T_{0,0} + F_1(0,-1)T_{0,-1} = 0 \tag{6c}$$

Równania (6) dotyczą punktów $W_{m,n}$ położonych na ściankach prostopadłych do osi q_2. Równania równowagi dla punktów $U_{m,n}$ otrzymamy przez cykliczną zmianę wskaźników.

Rozwiązując układ równań dla wszystkich punktów obliczeniowych otrzymujemy stan przemieszczenia. Naprężenia otrzymujemy z równań (4) zastępując w podanych wzorach pochodne cząstkowe różnicami skończonymi.

5. Wyznaczenie naprężeń osiowych

Obliczony wyżej stan naprężenia odpowiada założeniu $\varepsilon_3 = 0$. Jeżeli ciało posiada końce swobodne, to do otrzymanego rozwiązania należy dodać jednowymiarowy stan naprężenia

$$\sigma_3' = \frac{2\mu(3\lambda + \mu)}{2\lambda + \mu}\varepsilon_3 = E\varepsilon_3. \tag{7}$$

Stąd na podstawie założenia e, otrzymujemy

$$\sigma_3' = a + bx_1 + cx_2. \tag{8}$$

Stałe a,b,c należy wyznaczyć z warunków równowagi sił i momentów. Wypadkowa siła osiowa oraz wypadkowe momenty względem osi x_1 i x_2 muszą być równe zeru. Otrzymujemy więc zależności

$$\iint_S (\sigma_3 + \sigma_3')dS = 0$$
$$\iint_S (\sigma_3 + \sigma_3')x_1 dS = 0 \tag{9}$$
$$\iint_S (\sigma_3 + \sigma_3')x_2 dS = 0$$

lub po uwzględnieniu (8)

$$\iint_S (\sigma_3 + a + bx_1 + cx_2)dS = 0$$
$$\iint_S (\sigma_3 + a + bx_1 + cx_2)x_1 dS = 0 \tag{9a}$$

$$\iint_S (\sigma_3 + a + bx_1 + cx_2)x_2 dS = 0$$

Rozwiązując podany układ równań mamy

$$a = -\frac{S_\sigma}{S}$$

$$b = -\frac{B_{2\sigma}J_{11} - B_{1\sigma}J_{12}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2} \tag{10}$$

$$c = -\frac{B_{1\sigma}J_{22} - B_{2\sigma}J_{12}}{J_{11}J_{22} - J_{12}^2}$$

gdzie:

$$S_\sigma = \iint_S \sigma_3 dS, \qquad J_{ij} = \iint_S x_i x_j dS$$

$$B_{i\sigma} = \iint_S x_i \sigma_3 dS \tag{11}$$

Naprężenia σ_1, σ_2 oraz σ_{12} nie ulegają zmianie. Znając nowy, wypadkowy stan naprężenia można wyznaczyć stan odkształcenia, a następnie rzeczywiste przemieszczenia.

6. Rozkład naprężeń w walcu

W oparciu o przedstawiony algorytm obliczeń przeprowadzono analizę pola temperatur i naprężeń w walcu, którego przekrój poprzeczny ograniczony jest dwoma współogniskowymi elipsami. Obliczenia wykonano dla następujących warunków jednoznaczności:

a) powierzchnia zewnętrzna

$$\frac{x_1^2}{0,16} + \frac{x_2^2}{0,0625} = 1$$

b) powierzchnia wewnętrzna

$$\frac{x_1^2}{0,1075} + \frac{x_2^2}{0,01} = 1$$

c) temperatury na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej

$$T_w = 150^\circ C \qquad T_z = 20^\circ C$$

d) własności fizyczne materiału walca

$$E = 2{,}06 \cdot 10^5 \frac{MN}{m^2}; \quad \alpha = 13{,}6 \cdot 10^{-6} \frac{1}{deg}; \quad \nu = 0{,}3$$

Ze względu na rodzaj przyjętych warunków brzegowych wystarczy rozpatrywać jedynie ćwiartkę elementu. Uwzględniając kształt przekroju poprzecznego walca wygodnie jest zastosować do jego podziału na elementarne wielościany współrzędne eliptyczne x,y o powierzchniach określonych równaniami

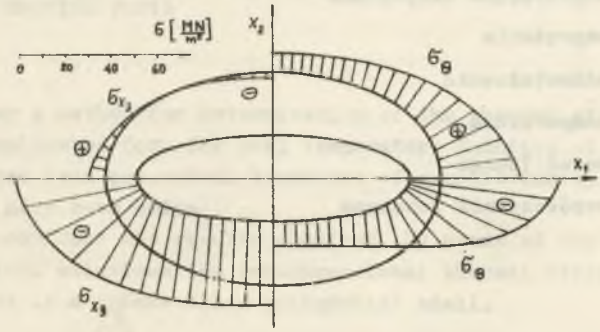
$$\frac{x_1^2}{c^2 ch^2 x} + \frac{x_2^2}{c^2 sh^2 x} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{c^2 \cos^2 y} - \frac{x_2^2}{c^2 \sin^2 y} = 1$$

gdzie w naszym przypadku c = 0,3125 m.

Pierwsze z równań przedstawia rodzinę elips współogniskowych. Na każdej z tych elips x ma wartość stałą, a zmienia się y. Drugie równanie dla stałej wartości y przedstawia hiperbolę, która ma te same ogniska co elipsa. Tak więc równanie to przedstawia rodzinę współogniskowych hiperbol, na każdej z których y jest stałe, a x zmienne.

W celu rozwiązania sformułowanego zadania opisaną metodę numeryczną podzielono badany przekrój na elementarne wycinki (4 w kierunku osi x oraz 8 w kierunku osi y). Punkty obliczeniowe obrano w środkach ścian bocznych. W oparciu o podane wyżej zależności można dla każdego punktu obliczeniowego wypisać równanie równowagi wyrażające zależność między przemieszczeniami w punktach sąsiednich. Uzyskano w ten sposób 76 równań o 76 niewiadomych. Elementy macierzy przy niewiadomych są jedynie funkcjami wymiarów siatki oraz położenia punktu obliczeniowego. Elementy kolumny wyrazów wolnych są



Rys. 3. Rozkład naprężeń obwodowych i osiowych w walcu

dodatkowo zależne od temperatury. W rozpatrywanej metodzie macierz przy niewiadomych jest macierzą pasmową, tzn. niezerowe elementy są zgrupowane wokół głównej przekątnej. Szerokość pasma i jego położenie zależy od numeracji punktów obliczeniowych.

Do rozwiązania podanego układu zastosowano metodę optymalnego eliminowania będącą pewną modyfikacją metody Gaussa. Celem uzyskania możliwie dużej dokładności wykonania obliczeń zastosowano sposób eliminacji z wyborem maksymalnego co do bezwzględnej wartości elementu w rozpatrywanym wierszu.

Wyniki obliczeń pola naprężeń przedstawiono na rys. 3. Ustalony rozkład temperatur w walcu, niezbędny do określenia naprężeń, wyznaczono metodą bilansów elementarnych [4] oraz przybliżoną metodą analityczną [3].

Sformułowany problem rozwiązał w odmienny sposób Bażenow [8], wykorzystując metody odwzorowania konforemnego. Z porównania obu wyników obliczeń wynika, że naprężenia wyznaczone numerycznie mało różnią się od rezultatów podanych w [8]. Różnice pomiędzy obu wartościami naprężeń osiowych i obwodowych we wszystkich punktach przekroju nie przekraczają 2%. Większe odchyłki występują przy wyznaczeniu naprężeń promieniowych i w ekstremalnych punktach dochodzą do ok. 5%. Należy jednak dodać, że bezwzględna wartość naprężeń promieniowych jest mała, a więc jej wpływ na wartość naprężenia zastępczego znikomy.

Zestawienie ważniejszych oznaczeń

x_1, x_2, x_3 - współrzędne prostokątne

q_1, q_2, x_3 - współrzędne krzywoliniowe

u, w - przemieszczenia w kierunku osi q_1, q_2

U, W - przybliżone wartości przemieszczeń u, w

H_1, H_2 - współczynniki Lamego

r, Θ - współrzędne walcowe

x, y - współrzędne eliptyczne

σ - naprężenie

ε - odkształcenie

T - temperatura

E - moduł Younga

ν - współczynnik Poissona

LITERATURA

[1] Collatz L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych, PWN, Warszawa, 1960.

[2] Goldenblat I.I.: Rasczety na procznost i kolebanija w usłowijach wysokich temperatur. Maszinostrojenie, Moskwa, 1965.

[3] Kosman G.: Pola temperatur w powłoce o dowolnym przekroju poprzecznym i podłużnym. ZNPS, Energetyka, z. 45, 1973.

[4] Kutarba K., Chmielniak T., Kosman G.: Badania nieustalonych pól temperatur w złożonych elementach maszyn, ABM, z. 3, 1971.

[5] Łurie A.J.: Prostranstwiennyje zadaczi teorii uprogosti, GTTJ, 1955.

[6] Margenau H.: Matematyka w fizyce i chemii. PWN, Warszawa 1956.

[7] Tiepłowyje napriażenija w elementach konstrukcji, Wypusk 7, 1967.

[8] Ugodczikow A.G. i inni: Reszenie krajewych zadacz płaskoj teorii uprugosti na cifrowych i analogowych maszinach, Moskwa 1970.

Praca wpłynęła do Redakcji w dniu 20 marca 1974 roku.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
В СЛОЖНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ МАШИН

Р е з ю м е

Работа содержит некоторые результаты исследований термических напряжений в сложных элементах машин. Представлен метод определения напряжений для произвольной зависимости механических параметров материала от температуры. Уравнения равновесия решены методом конечных разностей. Подробные расчеты сделаны для толстостенной цилиндрической оболочки. Полученные результаты сравнены с точными.

A NUMERICAL MODELING OF THE STATE OF STRESS
IN COMPLICATED MACHINE PARTS

S u m m a r y

In this paper a method for determination of the thermal stress in machine parts of complicated form for real temperature function of coefficients of elasticity has been presented. Equations of equilibrium by way of finite differences have been solved.

In order to confront the results obtained by means of the present method and analytical solutions the one-dimensional thermal stress distribution is computed in a thick-walled cylindrical shell.