ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1975
Seria: Energetyka z. 53 Nr kol. 420

Józef Szymczyk
Instytut Techniki Cieplnej

WYZNACZENIE FUNKCYJNEJ ZMIENNOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA PRZEWODZENIA CIEPŁA OD TEMPERATURY

Streszczenie: W pracy przedstawiono sposób doboru postaci funkcji określającej zmianę współczynnika przewodzenia ciepła od temperatury na podstawie wyników pomiarów uzyskanych przy ustalonym przewodzeniu ciepła.

Oznaczenia:

λ, WPC - współczynnik przewodzenia ciepła, W/mK

λ_m - średnia wartość WPC,

t, t_i - temperatura, K,

$\dot{Q}$ - strumień ciepła, W,

$\dot{q}_A$ - jednostkowy strumień ciepła, W/m^2,

$\phi_\lambda, \vartheta_\lambda$ - współczynniki temperaturowe WPC,

(x,y), (X,Y)- współrzędne układu pierwotnego i przekształconego.

1. Uwagi wstępne

Pomiary współczynnika przewodzenia ciepła - podobnie jak wiele innych wielkości fizycznych - dokonuje się pośrednio, to znaczy mierzy się inne wielkości, a dopiero na ich podstawie z równania definicyjnego oblicza się wartość λ. Jest to jednak średnia wartość współczynnika przewodzenia ciepła dla mierzonego zakresu temperatur $\Delta t_{i-j} = t_j - t_i$.
Jeżeli różnica temperatury jest niewielka, to tę wielkość WPC można uznać za "rzeczywistą" dla średniej arytmetycznej temperatury $t_{mj} = \frac{1}{2}(t_i + t_j)$. W różnych podręcznikach z miernictwa cieplnego zaleca się więc tak postępować, aby Δt było małe. W wielu przypadkach jest to jednak prawie niemożliwe, gdyż pomiar temperatur w pobliskich punktach obszaru powoduje znaczne zakłócenie pola temperatur przez miernik. Stosując odpowiednie metody opracowywania wyników pomiarowych można wyznaczyć funkcyjną zależność WPC od temperatury bez tego typu założeń.

2. Dobór postaci funkcji $\lambda(t)$ dla wyników pomiaru WPC

Ze względu na to, że dla nieustalonego przewodzenia ciepła przy funkcyjnej zależności WPC od temperatury równanie różniczkowe opisujące pole temperatur jest nieliniowe, więc do dalszych rozważań przyjmuje się, że dane doświadczalne otrzymane będą z metod opartych na ustalonym przewodzeniu. Dla tego typu przepływu ciepła pole temperatur w rozpatrywanym obszarze opisuje następujące równanie:

$$\mathrm{div}\,(\lambda(t)\,\mathrm{grad}\,(t)) = 0 \tag{1}$$

W przypadku przegrody kulistej i przewodzenia ciepła w kierunku promieniowym ma ono następującą postać

$$\frac{d}{dr}\left(\lambda(t)\, r^2 \frac{dt}{dr}\right) = 0 \tag{2}$$

Po pierwszym całkowaniu tego równania otrzymuje się zależność

$$\lambda(t)\, r^2 \frac{dt}{dr} = -C_1 \tag{3}$$

gdzie:

$$C_1 = q_A\, r^2 = \frac{\dot{Q}}{4\pi} \tag{4}$$

Stąd po podstawieniu C_1 otrzymuje się nowe równanie

$$\lambda(t)dt = -\frac{\dot{Q}}{4\pi}\frac{dr}{r^2}, \tag{5}$$

które po scałkowaniu w granicach (i - i+1) można przedstawić następująco:

$$\frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda(t)dt}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\dot{Q}}{4\pi(t_{i+1} - t_i)}\left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i}\right) \tag{6}$$

W równaniu (6) po lewej stronie występuje wielkość mająca charakter średniego współczynnika przewodzenia ciepła, która wyrażona wzorem

$$\lambda_{mi-i+1} = \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda(t)dt}{t_{i+1} - t_i} \tag{7}$$

obliczana jest z zależności występującej po prawej stronie równania (6), przy pomocy wielkości wyznaczonych w czasie pomiaru

$$\lambda_{mi-i+1} = \frac{\dot{Q}}{4\pi(t_{i+1} - t_i)}\left(\frac{1}{r_{i+1}} - \frac{1}{r_i}\right) \tag{8}$$

W przypadku innej geometrii zmieniłaby się jedynie postać wzoru (8). Mając obliczone wartości λ_m z (8), przy pomocy wielkości pomiarowych dla różnych zakresów temperatur, można przy pomocy (7) poszukiwać zależności funkcyjnej $\lambda(t)$, po uprzednim założeniu matematycznej postaci tej funkcji. Najczęściej dla WPC przyjmowana jest liniowa zależność od temperatury

$$\lambda(t) = \lambda_o (1 + \beta_\lambda t) \tag{9}$$

Po wstawieniu (9) do (7) otrzymuje się również liniową zależność

$$\lambda_{mi - i+1} = \lambda_o(1 + \beta_\lambda \frac{t_i + t_{i+1}}{2}) = \lambda_o(1 + \beta_\lambda t_m) \tag{9}$$

dla średnich wartości WPC, gdzie t_m jest średnią arytmetyczną temperatur na powierzcnni warstwy. Sporządzając więc wykres $\lambda_m = \lambda_m(t_m)$ lub obliczając ilorazy różnicowe pierwszego rzędu można się przekonać o poprawności założenia postaci $\lambda(t)$. Jeżeli odchyłki od przebiegu prostej są niewielkie, to można przystąpić do określenia współczynników λ_o i β_λ stosując jedną z metod aproksymacyjnych (np. metodę najmniejszych kwadratów). W przeciwnym przypadku należy przyjąć nową postać funkcji. Jeżeli będzie to zależność paraboliczna

$$\lambda(t) = \lambda_o(1 + \beta_\lambda t + \gamma_\lambda t^2) \tag{10}$$

to z (7) otrzymuje się

$$\lambda_{mi - i+1} = \lambda_o(1 + \beta_\lambda \frac{t_{i+1} + t_i}{2} + \gamma_\lambda \frac{t_{i+1}^2 + t_{i+1} t_i + t_i^2}{3}) \tag{11}$$

Gdy $\lambda_{m,n}$ (dla n-tej warstwy) będzie się liczyć od ustalonego punktu (np. i=1), to $\lambda_{m,1-i+1}$ zgodnie z (11) jest również funkcją kwadratową t_{i+1}.

Najprostszy sposób sprawdzenia, czy dla wyznaczonych wielkości zachodzi zależność paraboliczna

$$y = ax^2 + bx + c \tag{12}$$

polega na zastosowaniu metody wyrównawczej: przekształcenie krzywej do takiego układu, w którym ona jest prostą. W tym celu obiera się jeden punkt (x_o, y_o), dla którego

$$y_o = ax_o^2 + bx_o + c \tag{13}$$

Odejmując stronami (12) i (13) otrzymuje się zależność

$$y - y_o = a(x^2 - x_o^2) + b(x - x_o)$$

którą w układzie

$$Y = \frac{y - y_o}{x - x_o}, \quad X = x + x_o \tag{14}$$

można przedstawić w postaci prostej

$$Y = aX + b \tag{15}$$

Poprawność przyjęcia zależności parabolicznej można również sprawdzić sporządzając tablicę ilorazów rzędu drugiego, które w tym przypadku powinny mieć stałą wartość. Stosując podobne przekształcenie dla zależności (11) jak dla (12) otrzymuje się następujące wyrażenie:

$$\frac{\lambda_{m1-i} - \lambda_{m1-j}}{t_j - t_j} = \frac{\lambda_o \gamma_\lambda}{3}(t_i + t_j) + \lambda_o\left[\beta_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{3} t_i\right],$$

które w układzie

$$Y_{i-j} = \frac{\lambda_{m1-i} - \lambda_{m1-j}}{t_i - t_j} \tag{14a}$$

$$X_{i-j} = \frac{1}{2}(t_1 + t_j) = t_{mij} \tag{14b}$$

można przedstawić w postaci prostej (15).

Podobnie można sprawdzić poprawność przyjęcia innych postaci funkcji dla WPC, mimo że czasami metoda wyrównywania wymaga żmudnych przekształceń. Wynika to stąd, że dla WPC w czasie pomiaru wyznacza się nie rzeczywistą wartość funkcji, a jej wartość średnią w pewnym zakresie zmiany argumentu. Jednak przy pomocy zależności (7) można jednoznacznie określić związek między obliczonymi średnimi wartościami WPC, a pomierzonym polem temperatur. Z tego związku można ustalić postać funkcji $\lambda(t)$. Dla potwierdzenia tego podany zostanie jeszcze jeden przykład dla często spotykanej zależności funkcyjnej WPC od temperatury, w postaci

$$\lambda(t) = \lambda_o \exp(\beta_\lambda t), \tag{16}$$

dla której po zastosowaniu (7) otrzymuje się wyrażenie

$$\lambda_{mi-j}(t_j - t_i) = \frac{\lambda_o}{\beta_\lambda}\left[\exp(\beta_\lambda (t_j - t_i) - 1\right] \exp(\beta_\lambda t_i). \tag{17}$$

Po przyjęciu stałej wartości $\Delta t_{j-i} = t_j - t_i$ i logarytmowaniu obu stron równości (17), otrzymuje się równanie prostej

$$Y = a + \beta_\lambda t_i \tag{18}$$

gdzie:

$$Y = \ln(\lambda_{mi-j})$$

$$a = \ln\left[\left(\frac{\lambda_0}{\beta_\lambda}\right) \exp\left(\beta_\lambda (t_j - t_i) - 1\right)\right] / (t_j - t_i)$$

Znacznie łatwiejsza jest sytuacja w przypadku, gdy wyznaczone wartości WPC można uznać za wartości rzeczywiste. Przyjętą postać funkcji nie trzeba już transformować przy pomocy zależności (7), a jedynie przekształcić ją do układu (X,Y) w celu wyrównania.

Tablica 1

Przekształcenie liniowe w metodzie wyrównania dla rzeczywistych wartości WPC

Postać wzoru empirycznego	Metoda wyrównywania $Y = a + bX$
$\lambda = \lambda_0(1 + \beta_\lambda t + \gamma_\lambda t^2)$	$Y = \frac{\lambda - \lambda_i}{t - t_i}$ $X = x - x_i$ $a = \lambda_0 \gamma_\lambda$ $b = \lambda_0 \beta_\lambda$
$\lambda = \lambda_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\beta_\lambda}$	$Y = \lg\lambda$ $X = \lg(t/t_0)$ $a = \lg \lambda_0$ $b = \beta_\lambda$
$\lambda = \lambda_0 (\alpha)^{\beta_\lambda t}$	$y = a + bt$ $Y = \lg\lambda$, $a = \lg \lambda_0$, $b = \beta_\lambda \alpha$
$\lambda = \lambda_\infty + \frac{(\lambda_0 - \lambda_\infty) t_0}{t}$ $\lambda_0 - \lambda_\infty = \beta_\lambda$	$Y = \lambda t$ $X = t$ $a = (\lambda_0 - \lambda_\infty) t_0$, $b = \lambda_\infty$
$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 + \beta_\lambda t}$	$Y = \frac{1}{\lambda}$ $X = t$ $a = \frac{1}{\lambda_0}$ $b = \frac{\beta_\lambda}{\lambda_0}$
$\lambda = \frac{\lambda_0 t}{1 + \beta_\lambda t}$	$Y = \frac{t}{\lambda}$ $X = t$ $a = \frac{1}{\lambda_0}$ $b = \frac{\beta_\lambda}{\lambda_0}$
$\lambda = \beta_\lambda \lg\left(\frac{t}{t_0}\right) + \lambda_0$	$Y = \lambda$ $X = \lg\left(\frac{t}{t_0}\right)$ $a = \lambda_0$ $b = \beta_\lambda$

Poprawność przyjęcia tej funkcji można sprawdzić graficznie lub analitycznie po wyznaczeniu zbioru (X_i, Y_i) (na podstawie danych pomiarowych). Kryterium analitycznym w tym przypadku jest stałość ilorazów różnicowych ΔY_{i-j}

/ΔX_{i-j}. W tablicy 1 podano dla kilku najczęściej spotykanych funkcji $\lambda(t)$ sposób transformacji w metodzie wyrównywania dla rzeczywistych wartości WPC.

3. Przykład obliczeniowy

W charakterze przykładu podana zostanie próba poszukiwania funkcji WPC dla wyników pomiarów uzyskanych w Instytucie Techniki Cieplnej Pol. Śl., w przypadku monohydratu sody - $Na_2CO_3 \cdot H_2O$, w zakresie temperatur od 30 do 250°C. W związku z tym, że dla temperatur poniżej 100°C i powyżej 180°C obserwowano wzrost λ_m, a pomiędzy tymi zakresami mniej więcej stałą jego wartość, założono dla $\lambda(t)$ zależność paraboliczną (10). Sprawdzenie poprawności założenia tej funkcji postanowiono wykonać przy pomocy omówionej metody wyrównywania. W tym celu obliczono średnie wartości WPC (λ_{m1-i}) w zakresie temperatur $\Delta t_{1-i} = (t_i - t_1)$.
Wyniki obliczeń zamieszczono w poniższej tablicy.

Tablica 2

Średnie wartości WPC dla $Na_2CO_3 \cdot H_2O$

$(t_i - t_1)$°C	λ_{m1-i} W/mK
57÷32	0,417
84÷32	0,368
110÷32	0,309
140÷32	0,283
175÷32	0,268
217÷32	0,272
260÷32	0,294

Obliczenia sprawdzające znajdują się w tablicy 3.

Ze stałości ilorazu różnicowego pierwszego rzędu widać, że przyjęcie zależności parabolicznej należy uznać za poprawne.

W związku z tym można przystać do wyznaczenia stałych λ_0, β_λ i γ_λ. Uczyniono to drogą aproksymacji, stosując metodę najmniejszych kwadratów. W wyniku tego otrzymano następującą zależność

$$\lambda(t) = 0,572(1 - 9,079 \cdot 10^{-3}\, t + 3,249 \cdot 10^{-5}\, t^2) \text{ W/mK}$$

Wzrost λ poniżej 100°C można wytłumaczyć wpływem dodatkowego zawilżenia, w wyniku wydzielania się wody z $Na_2CO_3 \cdot H_2O$, powyżej 180°C - wpływem promieniowania i powstawaniem Na_2CO_3 (sody kalcynowanej ciężkiej).

Tablica 3

Sprawdzenie zachodzenia zależności parabolicznej dla WPC monohydratu sody

i-j	$10^3\ Y_{i-j}$	X_{i-j}	$10^3\ \Delta Y_{i-j}$	ΔX_{i-j}	$10^5\ \Delta Y_{i-j}/\Delta X_{i-j}$
2-3	-1,628	70,5			
			0,366	26,5	1,38
3-4	-1,262	97,0			
			0,382	28,0	1,36
4-5	-0,880	125,0			
			0,454	32,5	1,39
5-6	-0,426	157,5			
			0,525	38,5	1,36
6-7	0,099	196,0			
			0,585	42,5	1,38
7-8	0,684	238,5			

4. Wnioski końcowe

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że dla wyznaczonego zbioru - zarówno średnich jak i rzeczywistych wartości WPC - w czasie pomiaru można drogą prób ustalić jednoznacznie postać funkcji określającej zależniść WPC od temperatury. Do tego celu szczególnie nadaje się metoda wyrównywania, to znaczy przekształcenia funkcji do takiego układu współrzędnych (X,Y), w którym ona jest prostą. W tym układzie poprawność przyjęcia postaci funkcji jest łatwo sprawdzalna przy pomocy kryterium analitycznego (stałość ilorazów różnicowych pierwszego rzędu) lub graficznie.

LITERATURA

[1] Whittaker E., Robinson G.; The Calculus of Observations, London, 1948.
[2] Scarborough J.: Numerical Mathematical Analysis, London, 1955.
[3] Demidowicz B.P., Maron I.A.: Metody numeryczne. Warszawa 1965.

Praca wpłynęła do Redakcji w dniu 8 marca 1974 roku.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Р е з ю м е

В работе представлен метод определения температурной зависимости коэффициента теплопроводности при использовании результатов измерений, полученных для установившейся теплопроводности.

DETERMINING OF THE FUNCTION DEPENDENCE OF THE THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT ON THE TEMPERATURE

S u m m a r y

The paper presents the selection method of the form of a function describing the dependence of the thermal - conductivity coefficient on temperature.
Considerations have been carried out on the ground of the measurement results obtained for a steady conduction of heat.