

Joachim Józef Otte  
Instytut Maszyn i Urządzeń  
Energetycznych

## RÓWNANIA PRZEPŁYWU PŁYNU NIEŚCISLIWEGO W KANAŁACH ŁOPATKOWYCH MASZYN WIRNIKOWYCH

**Streszczenie:** W pracy wyprowadzono równania przepływu płynu idealnego, nieściśliwego w kanałach łopatkowych maszyn wirnikowych o dowolnej geometrii. Równania dotyczą pierwszego dwuwymiarowego zagadnienia w quasi-trójwymiarowym przepływie płynu. Oddziaływanie łopatek modelowane jest odpowiednią siłą masową. Dla przybliżonego uwzględnienia rzeczywistego charakteru przepływu wprowadzono siłę tarcia.

### 1. Wstęp

Przepływ płynu w kanałach łopatkowych maszyn wirnikowych jest niewątpliwie przestrzenny i nieustalony. Teoretyczna jego analiza możliwa jest więc tylko przy odpowiednich założeniach upraszczających. Znaczne trudności matematyczne, bardzo skomplikowane i nieefektywne procedury rozwiązań proponowanych w podstawowych pracach [6], [9], [16] oraz odbiegające od rzeczywistości modele przepływu powodują, że metody analizy teoretycznej nie znajdują jeszcze szerszego zastosowania. W dalszym ciągu jest więc aktualne zagadnienie opracowania dokładnych i szybkich w praktyce obliczeniowej metod analizy, uwzględniających czynniki charakterystyczne dla przepływu rzeczywistego. W niniejszym artykule, opartym na pracy [8] w znacznej mierze starano się uwzględnić powyższe postulaty.

Obecnie największe zastosowanie znajdują metody dające rozwiązanie tzw. zagadnienia quasi-trójwymiarowego [3], [10], [12], [13], [14], [15], które w dużym stopniu spełniają wymagania efektywności. Rozważania prowadzone w niniejszej pracy dotyczą jednego z zadań rozwiązywanych w teorii quasi-trójwymiarowego przepływu, to jest osiowo-symetrycznego przepływu na powierzchni  $S_2^f$ , za którą może być przyjęta pewna średnia powierzchnia kanału międzyłopatkowego.

Ze względu na założenie nieściśliwości, zakres zastosowania niniejszej teorii ograniczony jest do maszyn hydraulicznych i wentylatorów.

### 2. Sformułowanie zagadnienia osiowo-symetrycznego przepływu przez wieńce łopatkowe

Najbardziej ogólnym równaniem ruchu płynu idealnego jest równanie Eule-

ra

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (1)$$

W analizie przepływu w kanałach łopatkowych wpływ zewnętrznych sił masowych zwykle można pominąć jako nieistotny ( $\bar{F} = 0$ ).

Równanie (1) dla układu współrzędnych obracających się z prędkością kątową  $\omega$ , przy założeniu stacjonarności przepływu, przedstawia się następująco [18]

$$(\bar{w} \cdot \nabla)\bar{w} + 2\bar{\omega} \times \bar{w} - \omega^2 \bar{r} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (2)$$

Całkując powyższe równanie wzdłuż linii prądu uzyskuje się następujące rozwiązanie

$$\frac{1}{2}(w^2 - u^2) + \int \frac{dp}{\rho} = h^*(\psi) \quad (3)$$

gdzie funkcja  $h^*(\psi)$  w ogólnym przypadku zmienia się tylko przy przejściu z jednej linii prądu  $\psi$  na drugą.

Dla płynu nieściśliwego wyrażenie (3) przyjmie postać

$$h^* = \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} \quad (4)$$

Przyjmując  $\omega = 0$  uzyskuje się, wyrażające zasadę zachowania energii, równanie Bernoulliego dla ruchu bezwzględnego

$$i^* = \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} \quad (5)$$

Często stosowana w analizie przepływu wielkość  $h^*$  jest więc entalpią całkowitą w ruchu względnym. W skrypcie [2] określono ją jako uogólnioną entalpię całkowitą w układzie unoszonym i oznaczono przez  $h_0^+$ , natomiast  $W_u$  [17] celem skrócenia zaproponował termin "rotalpia całkowita", co też zostało przyjęte w niniejszej pracy.

Kolejnym równaniem opisującym ruch płynu jest równanie ciągłości

$$\text{div } \bar{w} = 0 \quad (6)$$

Przedstawione wyżej równania opisują zagadnienie przestrzenne. Przejście do zagadnienia osiowo-symetrycznego uzyskuje się przez operację uśrednienia wszystkich funkcji względem czasu i współrzędnej obwodowej [12]. Otrzymuje się w ten sposób równania osiowo-symetrycznego przepływu na pewnej średniej powierzchni  $S_2^i$  kanału łopatkowego.

W wyniku operacji uśrednienia oddziaływanie łopatek na strumień płynu zamienia się na jednorodne wzdłuż obwodu pole masowych sił  $\bar{F}_2$ .

Wprowadza się także uśrednioną siłę tarcia  $\bar{f}$ , działającą na jednostkę masy płynu.

Uśrednione równanie ruchu płynu (1) przyjmie postać

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \bar{F}_2 + \bar{f} \quad (7)$$

Lorenz [5] był pierwszym, który siłę oddziaływania łopatek zamienił na równoważne siły masowe, natomiast możliwości uwzględnienia sił tarcia w zagadnieniach przepływu przestrzennego rozpatrzono w pracy Stiepanowa [12] a następnie rozwinięto w pracach Sirotkina [10], [11] i Bammerta [1].

Uśrednione równanie ciągłości (6) zapisuje się teraz następująco:

$$\text{div}(\bar{c}\bar{w}) = 0 \quad (8)$$

gdzie  $\bar{c}$  jest wielkością charakteryzującą zwężenie kanału przepływowego wywołane grubością łopatek.

Przybliżone uwzględnienie rzeczywistych własności płynów w ramach modelu płynu idealnego sprowadza się do określenia w kanałach łopatkowych uśrednionych efektów lepkości.

Charakterystyczna dla ruchu płynu rzeczywistego jest dysypacja energii spowodowana jego lepkością. Efekt dysypacji uwzględniono wprowadzając tzw. współczynnik strat przepływowych

$$\xi_1 = \frac{2(h_{i-1}^* - h_1^*)}{w_{i-1}^2} \quad (9)$$

który w ogólności jest funkcją położenia:  $\xi = \xi(r, m)$ .

Uogólnione równanie Bernoulliego dla danej linii prądu wyrazi się teraz następująco:

$$h_0^* = h^* + \frac{1}{2} \xi w_0^2 = \text{const}, \quad (10)$$

gdzie  $h_0^*$  jest rotalpią w punkcie początkowym, tzn. na wlocie do wieńca.

Wektor siły tarcia skierowany jest przeciwnie do wektora prędkości  $\bar{w}$  i określony jest następująco [8]

$$\bar{f} = -\bar{w} \frac{w_0^2}{2w^2} \frac{d\xi}{dt} \quad (11)$$

Jeżeli wektor normalny do powierzchni  $S_2^f$  oznaczymy przez  $\bar{n}$ , to warunek ortogonalności siły  $\bar{F}_2$  względem tej powierzchni można zapisać wektorowo

$$\bar{n} \times \bar{F}_2 = 0 \quad (12)$$



Powierzchnia  $S_2'$  jest powierzchnią prądu, czyli musi zachodzić

$$\bar{w} \cdot \bar{n} = 0 \quad (13)$$

Równania (7), (8), (12) i (13) tworzą w warunkach pierwotnego (prostego) zagadnienia hydrodynamiki (zadana jest geometria powierzchni  $S_2'$ ) zamknięty układ równań z siedmioma niewiadomymi ( $\bar{w}$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $p$ ).

Jeżeli przyjąć, że równanie powierzchni  $S_2'$  przedstawia się następująco:

$$\psi = f(r, z), \quad (14)$$

to przyjmując kolejno  $z = \text{const}$  oraz  $r = \text{const}$

określić można kąty na dwóch wzajemnie prostopadłych powierzchniach (rys. 1).

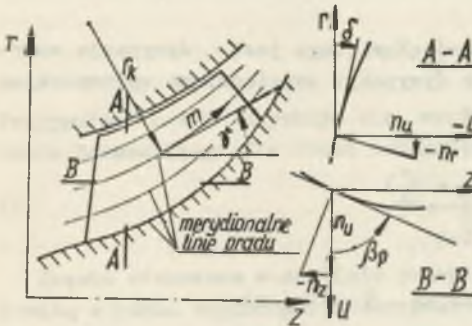
$$\text{tg } \delta = r \frac{d\psi}{dr} \quad (15)$$

$$\text{ctg } \beta_p = r \frac{d\psi}{dz} \quad (16)$$

Te same kąty wyrażone przez składowe wektora  $\bar{n}(n_r, n_u, n_z)$  normalnego do powierzchni  $S_2'$  określa się następująco:

$$\text{tg } \delta = -\frac{n_r}{n_u} \quad (17)$$

$$\text{ctg } \beta_p = -\frac{n_z}{n_u} \quad (18)$$



Rys. 1. Przekrój merydionalny kanału przepływowego i geometria łopatek

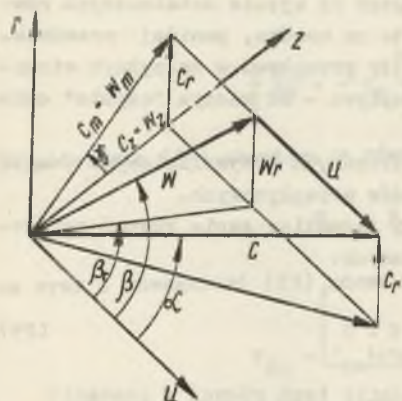
Przestrzenne usytuowanie składowych wektorów prędkości przedstawiono na rys. 2. Kąt nachylenia linii prądu oraz kąty strumienia na osiowo-symetrycznej powierzchni prądu i na powierzchni cylindrycznej opisane są związkami

$$\text{tg } \delta = \frac{w_r}{w_z} \quad \text{ctg } \beta = \frac{w_u}{w_m} \quad \text{ctg } \beta_c = \frac{w_u}{w_z} \quad (19)$$

Wykorzystując te zależności po rozpisaniu równania (13) otrzymuje się wyrażenie

$$w_u = w_r \cdot \text{tg } \delta + w_z \cdot \text{ctg } \beta_p, \quad (20)$$

po przekształceniu którego dochodzi się do wzorów



Rys. 2. Przestrzenne usytuowanie składowych wektorów prędkości

Otrzymane w ten sposób linie przecięcia tych powierzchni nazywane będą merydionalnymi liniami prądu. Jeżeli współrzędną wzdłuż merydionalnej linii prądu oznaczy się przez  $m$  (rys. 1), to składowe są następujące zależności:

$$dm : dr : dz = c_m : c_r : c_z \quad (24)$$

$$c_r = c_m \sin \delta \quad c_z = c_m \cos \delta \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} = \sin \delta \frac{\partial}{\partial r} + \cos \delta \frac{\partial}{\partial z} \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} = c_r \frac{\partial}{\partial r} + c_z \frac{\partial}{\partial z} = c_m \frac{\partial}{\partial m} \quad (27)$$

### 3. Równania osiowo-symetrycznego przepływu przez wieńce łopatkowe

Przedstawione w niniejszej pracy równania przepływu osiowo-symetrycznego wyprowadzono w formie opartej na pojęciu "krzywizny linii prądu" [7]. Analiza przepływu w maszynach wirnikowych metodą krzywizny linii prądu należy do najdokładniejszych [4].

Charakterystyczną cechą tej metody jest konieczność odpowiednio dokładnego wyznaczenia promienia krzywizny merydionalnej linii prądu. Definiuje się wielkość krzywizny opisuje wyrażenie

$$\frac{1}{r_k} = - \frac{\partial \delta}{\partial m} \quad (28)$$

$$\operatorname{ctg} \beta_c = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \phi + \operatorname{ctg} \beta_p \quad (21)$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \delta \sin \phi + \operatorname{ctg} \beta_p \cos \phi \quad (22)$$

Z warunku ortogonalności (12) uzyskuje się związki pomiędzy składowymi siły masowej a geometrią powierzchni

$$F_{2r} = - F_{2u} \operatorname{tg} \delta \quad (23)$$

$$F_{2z} = - F_{2u} \operatorname{ctg} \beta_p$$

Ze względu na osiową symetrię powierzchni prądu, w dalszym ciągu rozpatrywane będą tylko ich przekroje płaszczyzną merydionalną (przekrój merydionalny).

Dość istotnym problemem w metodach analizy przepływu jest wybór odpowiedniego układu współrzędnych, pozwalającego na ujęcie ostatecznych równań w możliwie najprostszy sposób. Mając to na uwadze, poniżej przedstawiono równania w formie stosownej do analizy przepływu w maszynach wirnikowych o różnym stopniu diagonalności przepływu - od maszyn "czysto" osiowych do maszyn o przepływie promieniowym.

Przez zapisanie równań w układzie współrzędnych krzywoliniowych uwzględniono wszystkie przypadki geometrii układów przepływowych.

Celem skrócenia zastosowano następujący jednolity zapis równań osiowo-symetrycznego przepływu w kanałach łopatkowych:

$$c_m \frac{\partial c_m}{\partial n} + A c_m^2 + B c_m + C = 0 \quad (29)$$

Równoległe podawane będą także odpowiedniki tych równań w postaci:

$$w \frac{\partial w}{\partial n} + P w^2 + Qw + T = 0 \quad (30)$$

W powyższym zapisie przez A, B, C oraz P, Q, T oznaczono wyrażenia funkcyjne, zgrupowane przy poszczególnych niewiadomych.

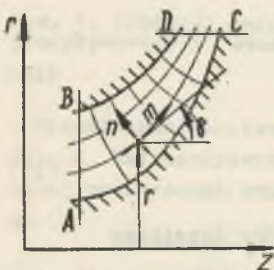
Jeżeli wprowadzi się ortogonalny układ współrzędnych krzywoliniowych m-n (rys. 3) zorientowany w ten sposób, że siatkę układu tworzą merydionalne linie prądu oraz linie ortogonalne do nich, to pomiędzy składowymi pewnego wektora  $\bar{e}$  w układzie współrzędnych walcowych ( $e_r, e_u, e_z$ ) i krzywoliniowych zachodzą następujące zależności:

$$e_n = e_r \cos \phi - e_z \sin \phi, \quad (31)$$

$$e_m = e_r \sin \phi + e_z \cos \phi$$

Spełnione są także równości:

$$\frac{dr}{dn} = \cos \phi, \quad \frac{dr}{dm} = \sin \phi$$



Rys. 3. Siatka układu współrzędnych naturalnych utworzona przez merydionalne linie prądu i linie do nich ortogonalne

Biorąc powyższe pod uwagę oraz uwzględniając, że  $c_n = 0$ , równanie Eulera (7) w układzie współrzędnych krzywoliniowych przedstawia się następująco:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{c_m^2}{r_k} + \frac{c_u^2}{r} \cos^2 \phi + F_{2n}$$



$$\frac{c_m}{r} \frac{\partial(rc_u)}{\partial m} = F_{2u} + f_u \quad (32)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m} = -c_m \frac{\partial c_m}{\partial m} + \frac{c_u^2}{r} \sin \phi + F_{2m} + f_m$$

Na podstawie (31) obowiązuje równość:

$$F_{2n} = F_{2r} \cos \phi - F_{2z} \sin \phi \quad (33)$$

co wraz z równaniami (23) pozwala wyprowadzić związek pomiędzy siłami

$$F_{2n} = F_{2u} (\operatorname{ctg} \phi_p \sin \phi - \operatorname{tg} \delta \cos \phi) \quad (34)$$

Pamiętając, że zachodzi  $c_m = w \sin \beta$  oraz  $c_u = w \cos \beta + \omega r$ , po przekształceniach równania (32.1) otrzymamy:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = w^2 \left( \frac{\sin^2 \beta}{r_k} + \frac{\cos^2 \beta \cos \phi}{r} \right) + 2\omega w \cos \beta \cos \phi + \omega^2 r \cos \phi + F_{2n}$$

Eliminując z powyższego ciśnienie przy pomocy równania rotacji całkowitej (4) oraz równania Bernoulliego (10), otrzymujemy dalej:

$$w \frac{\partial w}{\partial n} + w^2 \left( \frac{\sin^2 \beta}{r_k} + \frac{\cos^2 \beta \cos \phi}{r} \right) + 2\omega w \cos \beta \cos \phi - \frac{\partial h_o^*}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\xi w_o^2)}{\partial n} + F_{2n} = 0 \quad (35)$$

Składową obwodową siły masowej na podstawie równania (32.2) z uwzględnieniem (11) można przedstawić następująco:

$$F_{2u} = w \sin \beta \left[ \left( 2\omega + \frac{w \cos \beta}{r} \right) \sin \phi + \frac{\partial}{\partial m} (w \cos \beta) \right] + \sin \beta \cos \beta \frac{w_o^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} \quad (36)$$

Wykorzystując zależność (34), z równań (36) i (35) otrzymamy ostatecznie:

$$w \frac{\partial w}{\partial n} + w^2 \left[ \frac{\sin^2 \beta}{r_k} + \frac{\cos^2 \beta \cos \phi}{r} + \sin \beta (\operatorname{ctg} \phi_p \sin \phi - \operatorname{tg} \delta \cos \phi) \right] \times \\ \times \left( \frac{\cos \beta \sin \phi}{r} + \frac{\partial \cos \beta}{\partial m} \right) + w \left\{ 2\omega \left[ \cos \beta \cos \phi + (\operatorname{ctg} \phi_p \sin \phi - \operatorname{tg} \delta \cos \phi) \sin \beta \sin \phi \right] + \right. \\ \left. + (\operatorname{ctg} \phi_p \sin \phi - \operatorname{tg} \delta \cos \phi) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial w}{\partial m} \right\} + \\ + \left[ - \frac{\partial h_o^*}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\xi w_o^2)}{\partial n} + (\operatorname{ctg} \phi_p \sin \phi - \operatorname{tg} \delta \cos \phi) \sin \beta \cos \beta \frac{w_o^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} \right] = 0 \quad (37)$$

Jeżeli w równaniu tym przyjąć założenia upraszczające, dotyczące rozkładu parametrów na wlocie do wieńca i charakteru przepływu, to uzyskuje się równanie typu:

$$\frac{\partial w}{\partial n} + P w + Q = 0$$

które przedstawiono w pracach [3], [13], [14].

Zapis równania (37) można uprościć, zauważając, że przy uwzględnieniu zależności (22) spełniona jest tożsamość

$$\cos\beta \cos\delta + (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\delta - \operatorname{tg}\delta \cos\beta) \sin\beta \sin\delta = \operatorname{ctg}\beta_p \sin\beta$$

Stosując teraz przyjętą formę zapisu (30), współczynniki funkcyjne równania (37) przyjmą postać:

$$P = \frac{\sin^2\beta}{r_k} + \frac{\operatorname{ctg}\beta_p \sin\beta \cos\beta}{r} + (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\delta - \operatorname{tg}\delta \cos\beta) \sin\beta \frac{\partial \cos\beta}{\partial m}$$

$$Q = \sin\beta \left[ 2\omega \operatorname{ctg}\beta_p + (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\delta - \operatorname{tg}\delta \cos\beta) \cos\beta \frac{\partial w}{\partial m} \right] \quad (38)$$

$$T = -\frac{\partial h_o^*}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\xi w_o^2)}{\partial n} + (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\delta - \operatorname{tg}\delta \cos\beta) \sin\beta \cos\beta \frac{w_o^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m}$$

Odpowiednie równanie ze względu na niewiadomą  $c_m$ , zapisane według (29) przedstawia się następująco:

$$A = \frac{\sin^2\beta}{r} + \frac{\operatorname{ctg}\beta_p \sin\beta \cos\beta}{r} - \frac{\partial \ln \sin\beta}{\partial n} -$$

$$- (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\delta - \operatorname{tg}\delta \cos\beta) \frac{\partial \beta}{\partial m}$$

$$B = \sin\beta \left[ 2\omega \operatorname{ctg}\beta_p \sin\beta + (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\delta - \operatorname{tg}\delta \cos\beta) \cos\beta \frac{\partial c_m}{\partial m} \right] \quad (39)$$

$$C = \sin^2\beta \left[ -\frac{\partial h_o^*}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\xi w_o^2)}{\partial n} + (\operatorname{ctg}\beta_p \sin\delta - \operatorname{tg}\delta \cos\beta) \sin\beta \cos\beta \frac{w_o^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} \right]$$

Równaniem zamykającym jest równanie ciągłości w formie całkowej:

$$\dot{m} = 2\pi \rho \int_0^{n_1} r^2 c_m dn = \text{const}, \quad (40)$$

ważne dla każdej ortogonalnej.



Równania (38) i (40), względnie (39) i (40) tworzą układ równań różniczkowych typu eliptycznego. Jest on ważny w całym obszarze przepływu, z tym że w przestrzeniach międzywieńcowych należy przyjąć:  $\bar{F}_2 = 0$ ,  $\xi' = 1$ . W przypadku wieńców stałych (stojanowych) należy przyjąć  $\omega = 0$  oraz uwzględnić zmianę oznaczeń:  $\beta \rightarrow \alpha$ ,  $\beta_p \rightarrow \alpha_p$ ,  $w \rightarrow c$ ,  $h_o^* \rightarrow i_o^*$ .

Warunki brzegowe dla tych układów dla obszaru ABCD (rys. 3) są następujące:

a) Wzdłuż AB zadane są wszystkie parametry płynu.

Muszą one spełniać warunek:

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^{n_{10}} c_{m0} r \, dn \quad (41)$$

b) Powierzchnie AC i BD są powierzchniami prądu.

c) Wzdłuż CD zadany jest rozkład kątów  $\beta$  i  $\beta'$ .

d) Znane są funkcje  $\beta_p$ ,  $\delta$ ,  $\tau$ ,  $\zeta$  w całym obszarze przepływu.

e) Dana jest prędkość kątowa  $\omega$  oraz strumień masy  $\dot{m}$ .

Ścisłe określenie warunków brzegowych przed i za wieńcem (wieńcami) łopatkowymi możliwe jest tylko w nieskończoności, z wykorzystaniem warunku  $r c_u = \text{const}$  wzdłuż linii prądu.

W równaniach (38) i (39) występują pochodne  $\partial w / \partial m$  i  $\partial c_m / \partial m$ , wyrażające wpływ zmiany prędkości w kierunku merydionalnym. Wielkości te mogą być określone z równania ciągłości, które w krzywoliniowym układzie współrzędnych zapisuje się następująco:

$$\frac{\partial (r c_m)}{\partial m} + r \tau c_m \frac{\partial \beta'}{\partial n} = 0 \quad (42)$$

stąd otrzymujemy:

$$\frac{\partial c_m}{\partial m} = - c_m \left( \frac{\sin \beta'}{r} + \frac{\partial \beta'}{\partial n} + \frac{\partial \ln \tau}{\partial m} \right), \quad (43)$$

jak również:

$$\frac{\partial w}{\partial m} = - w \left( \frac{\sin \beta'}{r} + \frac{\partial \beta'}{\partial n} + \frac{\partial \ln \sin \beta}{\partial m} + \frac{\partial \ln \tau}{\partial m} \right) \quad (44)$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności, uzyskuje się ostateczną postać równań osiowo-symetrycznego przepływu zapisanych w układzie współrzędnych naturalnych. Wyrażenia funkcyjne tych równań, zgodnie z formułami (29) i (30) określone są następująco:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sin^2 \beta}{r_k} + \frac{\cos^2 \beta \cos \delta}{r} - \frac{\partial \ln \sin \beta}{\partial n} - (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \delta - \operatorname{tg} \delta \cos \delta) \times \\
 &\quad \times \left[ \sin \beta \cos \beta \left( \frac{\partial \delta}{\partial n} + \frac{\partial \ln r}{\partial m} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial m} \right] \\
 B &= 2\omega \operatorname{ctg} \beta_p \sin^2 \beta \quad (45) \\
 C &= \sin^2 \beta \left[ -\frac{\partial h_o^*}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\xi w_o^2)}{\partial n} + (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \delta - \operatorname{tg} \delta \cos \delta) \sin \beta \cos \beta \frac{w_o^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} \right] \\
 P &= \frac{\sin^2 \beta}{r_k} + \frac{\cos^2 \beta \cos \delta}{r} - (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \delta - \operatorname{tg} \delta \cos \delta) \left[ \sin \beta \cos \beta \left( \frac{\partial \delta}{\partial m} + \frac{\partial \ln r}{\partial m} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \beta}{\partial m} \right] \\
 Q &= 2\omega \operatorname{ctg} \beta_p \sin \beta \quad (46) \\
 T &= -\frac{\partial h_o^*}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\xi w_o^2)}{\partial n} + (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \delta - \operatorname{tg} \delta \cos \delta) \sin \beta \cos \beta \frac{w_o^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m}
 \end{aligned}$$

Jakkolwiek współrzędne krzywoliniowe (naturalne) są bardzo wygodne do prowadzenia rozważań ogólnych, to jednak w procedurze obliczeniowej wykazują się istotną wadą, a mianowicie - siatka współrzędnych nie jest umiejscowiona (jest niestała) i w trakcie obliczeń węzły siatki doznają przemieszczeń, co jest przyczyną znacznych trudności [15].

Dlatego też przy układaniu programu obliczeń proponuje się zastosować współrzędne quasi-ortogonalne, co przedstawiono w pracy [8].

### 1. Uwagi końcowe

Przedstawione w niniejszej pracy równania osłowo-symetrycznego przepływu rozwiązują zagadnienie jego analizy tak w kanałach łopatkowych jak i w przestrzeniach bezłopatkowych maszyn wirnikowych o dowolnej geometrii kanałów. Równania te w ramach modelu płynu idealnego i nieściśliwego są najbardziej ogólnymi. Uwzględniono w nich najbardziej ogólną strukturę strumienia na wlocie do wieńca łopatkowego. Zgodnie z tym przepływ jest wirowy, charakteryzujący się w płaszczyźnie wlotowej gradientami ciśnienia i prędkości. W sposób pośredni uwzględniono także efekt lepkości płynu, wprowadzając współczynnik strat przepływu i wynikającą stąd uśrednioną siłę tarcia.

Przy tak ogólnym ujęciu zagadnienia analizy teoretycznej, oprócz matematycznych napotyka się również na trudności natury czysto fizycznej, związane z określeniem warunków brzegowych wymagających odpowiednich danych doświadczalnych.

Szczególną trudność stanowi przyjęcie gradientu strat w wieńcu. Nie można ich bowiem przyjmować takich samych jak otrzymane z doświadczeń, gdyż płyny rzeczywiste dopuszczają znacznie większe gradienty strat. Ze względu więc na konieczność ich ograniczenia, proponuje się przyjmować rozkłady wynikające ze strat profilowych.

Zagadnienie rozwiązania przedstawionych równań przepływu zostało rozpatrzone w nieopublikowanej pracy autora [8]. W najbliższym czasie problemowi temu poświęcony będzie osobny artykuł.

Autor pragnie w tym miejscu podziękować profesorowi Kazimierzowi Kutarbie i docentowi Ryszardowi Grybosłowi za pomoc i wskazówki przy realizacji niniejszej pracy.

#### Ważniejsze oznaczenia

- A, B, C - wyrażenia funkcyjne (równanie 29)
- $F_2$  - siła masowa oddziaływania łopatek
- P, Q, T - wyrażenia funkcyjne (równanie 30)
- c - prędkość bezwzględna
- f - uśredniona siła tarcia
- $h^*$  -entalpia całkowita (równanie 4)
- $i^*$  -entalpia całkowita
- n, m - współrzędne ortogonalnego układu krzywoliniowego
- $\dot{m}$  - strumień masy
- p - ciśnienie
- $r_k$  - promień krzywizny merydionalnej linii prądu
- t - czas
- u - prędkość obwodowa, współrzędna obwodowa
- w - prędkość względna
- $\alpha, \beta$  - kąty położenia wektora prędkości bezwzględnych i względnych w płaszczyźnie stycznej do powierzchni prądu
- $\alpha_p, \beta_p$  - kąty łopatkowe (na powierzchni  $r = \text{const}$ )
- $\theta$  - kąt nachylenia merydionalnej linii prądu do osi z
- $\delta$  - kąt nachylenia powierzchni łopatki do kierunku promieniowego
- $\bar{\tau}$  - współczynnik zwężenia przekroju przepływowego
- $\xi$  - współczynnik strat przepływu
- $\nabla$  - operator gradientu (grad)
- $\rho$  - gęstość.



Indeksy

- i - dotyczy kolejnego punktu na linii prądu  
 m - dotyczy kierunku wzdłuż merydionalnej linii prądu  
 o - dotyczy wielkości na wlocie do wieńca łopatkowego  
 r, u, z - dotyczy składowych w układzie współrzędnych walcowych.

## LITERATURA

- [1] Bammert K, Fiedler K.: Zur Auslegung von axialen thermischen Turbomaschinen. VDI-Z.104(1962) nr 36.  
 [2] Gundlach W.R.: Maszyny przepływowe cz. I. Warszawa 1970.  
 [3] Hamrick G.T., Ginsburg A., Osborn W.M.: Method of Analysis for Compressible Flow Through Mixed - Flow Contrifugal Impellers of Arbitrary Design. NACA Report 1082, 1952.  
 [4] Horlock J.H.: Axialkompressoren. Karlsruhe 1967. Verlag G. Braun.  
 [5] Lorenz H.: Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder Berlin 1906.  
 [6] Makarow A.F.: Rasczet prostranstwiennowo tieczeniya zhidkosti w radialno-osiewoj turbini. Mechanika zhidkosti i gaza 1967 nr 6.  
 [7] Novak R.A.: Streamline Curvature Computing Procedures for Fluid-Flow Problems. Trans. ASME, 1967 nr. 4.  
 [8] Otte J.J.: Osiowo-symetryczny przepływ płynu nieściśliwego w kanałach łopatkowych maszyn wirnikowych. Praca wewnętrzna Instytutu Maszyn i Urządzeń Energetycznych. Wrzesień 1973 (praca nieopublikowana).  
 [9] Ribaut M.: Three-Dimensional Calculation of Flow in Turbomachines With the Aid of Singularities. Trans. ASME, ser. A, 1968 no 3.  
 [10] Sirotkin J.A.: K postanowke priamoj zadaczki wichriewowo tieczeniya szimajemoj zhidkosti w turbomaszinach. Inżeniernyj żurnal t. III, 1963 wyp. 2.  
 [11] Sirotkin J.A.: Aerodinamiczeski rasczet łopatok osiewych turbomaszin. Izd. Maszinstrojenije. Moskwa 1972.  
 [12] Stiepanow G.Ju.: Girodinamika reszetok turbomaszin. Moskwa 1962.  
 [13] Traupel W.: Thermische Turbomaschinen. Springer Verlag-Berlin 1966.  
 [14] Traupel W.: Die theorie der Stromung durch Radialmaschinen Karlsruhe 1962. Verlag G. Braun.  
 [15] Witkowski A.: Analiza przepływu w kanałach łopatkowych osiowego wieńca sprzężającego z merydionalnym przyspieszeniem strumienia. Praca doktorska, Gliwice 1971.  
 [16] Wu Chung-Hua.: General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial Radial and Mixed - Flow Types. Trans. ASME. 1952 no 8.  
 [17] Wu Chung-Hua.: Discussion. Trans. ASME, 1953 no 5.  
 [18] Żukowski M.I.: Aerodinamiczeski rasczet potoka w osiewych turbomaszinach. Izd. Maszinstrojenije. Leningrad 1967.

Praca wpłynęła do Redakcji w dniu 18 marca 1974 roku.

УРАВНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ  
В ТУРБОМАШИНАХ

## Р е з ю м е

В статье приводятся уравнения осесимметрического стационарного течения невязкой и несжимаемой жидкости через турбомашины с произвольным профилем проточной части и пространственно постпоенными лопатками. Рассматривая первую двумерную задачу в квазитрёхразмерном течении, предполагается, что поток является осесимметричным. Для учета воздействия лопастей вводится массовая сила, а для приближенного учета реальных свойств потока появляется сила течения.

## THE FLOW EQUATIONS FOR INCOMPRESSIBLE FLUID IN TURBOMACHINES

## S u m m a r y

An equation for analysis of the nonviscous, incompressible steady axisymmetric fluid flow in turbomachines having arbitrary hub and casing, and with blades of arbitrary spatial shapes has been presented. In the paper the equation for calculation of the first twodimensional solution in quasi-three-dimensional flows has been presented in detail.

