

Gerard KOSMAN
Joachim J. OTTE

Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

METODA KOLEJNYCH PRZYBLIŻEŃ MODELOWANIA OSIOWO-SYMETRYCZNYCH
PÓL TEMPERATUR NA PAPIERZE PRZEWODZĄCYM

Streszczenie. W pracy omówiono zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do badań analogowych pól temperatur na papierze przewodzącym, jako ośrodka modelującym. Rozważania dotyczą osiowo-symetrycznych rozkładów temperatury w grubościennych powłokach obrotowych. Kształt brzegu powłoki może być dowolny. Dzięki zastosowaniu metody kolejnych przybliżeń bardzo znacznie zmniejszono pracochłonność przygotowania modeli, ponieważ nie trzeba zmieniać oporności papieru przez perforację, naklejanie lub malowanie.

Ważniejsze oznaczenia

- A - zbiór punktów brzegowych elementu,
- c - ciepło właściwe,
- C - pojemność elektryczna,
- T - temperatura,
- T_0 - temperatura początkowa,
- t - czas,
- \dot{q}_v - gęstość objętościowa wewnętrznych źródeł ciepła,
- \dot{q}_v^* - gęstość objętościowa zastępczych źródeł ciepła,
- V - zbiór punktów wewnętrznych elementu,
- U - potencjał elektryczny,
- x, z, y - współrzędne prostokątne,
- r, z, φ - współrzędne walcowe,
- ρ - gęstość,
- λ - współczynnik przewodzenia ciepła.

1. Wstęp

Zagadnienie nieustalonego przewodzenia ciepła w izotropowych ciałach stałych z wewnętrznymi źródłami ciepła sprowadza się do poszukiwania rozkładu temperatury w postaci funkcji $T(\vec{x}, t)$, ($\vec{x} \in V$, $t > 0$), spełniającej w obszarze V równanie

$$\lambda \nabla^2 T + \dot{q}_v(\vec{x}) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

warunek początkowy

$$T(\vec{x}, 0) = T_0(\vec{x}) \quad (2)$$

oraz warunki brzegowe na brzegu obszaru A .

Postać laplasjanu ∇^2 zależy od przyjętego układu współrzędnych, a ten z kolei należy dostosować do kształtu rozpatrywanego ciała.

W przypadku osiowo-symetrycznego rozkładu temperatury w ciałach o kształcie brył obrotowych wygodnie jest stosować współrzędne walcowe i wtedy równanie (1) sprowadza się do postaci

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

Analityczne metody rozwiązania równania (3) rozpatrywane są szczegółowo w literaturze poświęconej zagadnieniom przepływu ciepła w ciałach stałych i teorii równań różniczkowych cząstkowych. Opisane metody mogą być praktycznie stosowane tylko dla ciał o regularnych kształtach. Z tego względu w badaniu rozkładów temperatur w złożonych elementach maszyn coraz większe zastosowanie znajdują metody numeryczne i analogii elektrycznej.

W modelowaniu elektrycznym pól temperaturowych można wyróżnić dwa kierunki: modelowanie w ośrodkach ciągłych oraz modelowanie w ośrodkach dyskretnych. Jednym ze sposobów modelowania ciągłego jest modelowanie na papierze przewodzącym. Metoda ta wykazuje szereg istotnych zalet w porównaniu z innymi ośrodkami modelującymi (taniaść modelu, możliwość modelowania stanów cieplnych w elementach o złożonym kształcie, prosta metodyka pomiarów).

Papier przewodzący, jako ośrodek ciągły, umożliwia modelowanie pól dwuwymiarowych (płaskich i osiowo-symetrycznych). Na podstawie dotychczasowych badań można stwierdzić, że modelowanie pól płaskich nie przedstawia trudności, natomiast analiza pól osiowo-symetrycznych jest znacznie bardziej skomplikowana [1, 2, 3, 4]. Główna trudność związana jest z koniecznością stworzenia ośrodka przewodzącego prąd, o oporności zmieniającej się w jednym kierunku.

Jedną z metod modelowania uwzględniających powyższy fakt jest metoda transformacji brzegów obszaru polegająca na zastosowaniu przekształcenia lagorytmicznego promienia $x = \ln r$.

Stosowane są również metody polegające na zmianie oporności papieru przewodzącego. Tę zmianę można uzyskać przez:

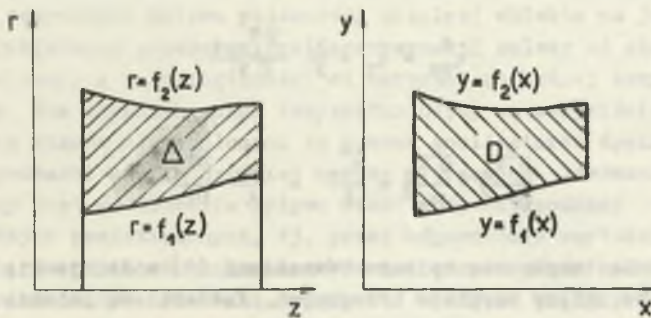
- perforację,
- naklejanie warstw papieru przewodzącego za pomocą klejów oporowych,
- nakładanie na papier farby przewodzącej w postaci punktowej.

Każdy z wymienionych sposobów jest albo pracochłonny albo mało dokładny. Wszystkie zaś dają skokową zmianę oporności i nie pozwalają modelować temperatur w pobliżu osi.

Przedstawiona w niniejszej pracy metoda wykazuje w porównaniu z wyżej wymienionymi szereg istotnych zalet. Przede wszystkim zmniejszono pracochłonność przygotowania modeli. Wylimitowano skokową zmianę oporności papieru, co miało duży wpływ na zniekształcenie badanego pola.

2. Metoda rozwiązania zagadnienia

Rozpatrzmy bryłę obrotową ograniczoną powierzchniami $r = f_1(z)$ i $r = f_2(z)$ przedstawioną na rys. 1a. Jeżeli założyć, że początkowy rozkład temperatury i warunki brzegowe nie zmieniają się w kierunku obwodowym, to szukany, niestabilny rozkład temperatury w powłoce będzie również osiowo-symetryczny.



Rys. 1

W celu wyznaczenia pola temperatur w powłoce w oparciu o badania analogowe na papierze przewodzącym jako ośrodku modelującym rozpatrujemy pomocnicze zagadnienie przewodzenia ciepła w obszarze płaskim D ograniczonym krzywymi $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ (rys. 1b).

Rozkład temperatury w obszarze D określa równanie

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}_v^*}{\lambda} = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4)$$

Jeżeli początkowy rozkład temperatury w obszarze D i warunki brzegowe są te same jak dla badanej powłoki oraz

$$\dot{q}_v^* = \dot{q}_v + \frac{\lambda}{y} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5)$$

to pola temperatur w przekroju podłużnym powłoki i obszarze płaskim są identyczne.

W związku z tym w miejsce zagadnienia osiowo-symetrycznego można modelować prostsze zagadnienie płaskie dla odpowiednio dobranej gęstości objętościowej zastępczych wewnętrznych źródeł ciepła \dot{q}_v^* . Warto podkreślić, że kształt brzegu obszaru płaskiego pokrywa się z przekrojem podłużnym badanej powłoki.

Gęstość objętościową zastępczych wewnętrznych źródeł ciepła wyznaczymy metodą kolejnych przybliżeń. Pierwsze przybliżenie przyjmujemy w postaci:

$$\dot{q}_{v1}^* = \dot{q}_v \quad (6)$$

które wykorzystane w równaniu (4) pozwala określić pierwsze przybliżenie szukanego pola temperatur.

Ogólnie, dalsze przybliżenia konstruujemy według zależności

$$\dot{q}_{vn}^* = \dot{q}_v + \frac{\lambda}{y} \frac{\partial T_{n-1}}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}_{vn}^*}{\lambda} = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial T_n}{\partial t}$$

Kolejne pola temperatur opisane równaniami (8) modeluje się na tym samym modelu bez zmiany warunków brzegowych. Każdorazowo zmienia się jedynie gęstość wewnętrznych źródeł ciepła wg zależności (7).

Do określenia kolejnego przybliżenia \dot{q}_{vn}^* nie musimy znać rozkład temperatury $T_{n-1}(x, y, t)$ w całym obszarze płaskim D , a jedynie gradient w kierunku promieniowym. Podany wyżej algorytm można więc jeszcze uprościć. Pierwsze badania analogowe ograniczamy tylko do określenia $\partial T / \partial y$, a dopiero gdy różnica między kolejnymi przybliżeniami \dot{q}_{vn}^* jest dostatecznie mała wyznaczamy rozkład temperatury.

3. Modelowanie równań (8) na papierze przewodzącym

Metody modelowania stanów nieustalonych opisanych równaniami (8) są szczegółowo opisane w dostępnej literaturze. Najbardziej "klasyczną" z nich jest metoda polegająca na wykorzystaniu bezpośredniej analogii równań (8) opisujących zjawiska cieplne i równania (9) opisującego zjawiska elektryczne w geometrycznie podobnym modelu przewodzącym

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + R \cdot i = RC \frac{\partial U}{\partial t} \quad (9)$$

Ostatnie równanie można modelować w układach posiadających pewną pojemność właściwą, rozłożoną w modelu (papierze przewodzącym) w sposób ciągły. Wartość tej pojemności można określić z porównania równań (8) i (9). Realizacja wyznaczonej w ten sposób pojemności o rozkładzie ciągłym stwarza wiele trudności. Z tego względu częściej pojemność tę modeluje się w sposób dyskretny, dzieląc powierzchnię modelu na podobszary i dołączając do środka każdego z nich odpowiednim przewodem kondensator.

Prowadzenie badań według przedstawionej metody wymaga odpowiedniego wyposażenia, a w szczególności urządzenia do automatycznego ładowania i rozładowywania kondensatorów.

Znacznie prostszą w praktycznej realizacji jest metoda kolejnych stanów ustalonych [5]. W metodzie tej proces rzeczywisty aproksymuje się szeregiem kolejnych stanów ustalonych. Rozkład temperatury w dowolnej chwili czasu t modelujemy jak dla stanu ustalonego przyjmując warunki brzegowe zgodnie z ich rzeczywistym przebiegiem w czasie. W ten sposób nie uwzględnia się oczywiście wpływu pojemności cieplnej obiektu na jego stan termiczny. Dokładność przedstawionej aproksymacji zależy od charakteru badanego przebiegu, a w szczególności od wartości pochodnej temperatury względem czasu. Dla szybkich zmian temperatur błędy są oczywiście większe.

Badania stanów nieustalonych za pomocą analizatorów dyskretnych (siatkowych) prowadzi się najczęściej metodą iteracyjną Liebmann [6]. Istotą tej metody jest modelowanie upływu czasu w sposób podobny do modelowania współrzędnych przestrzennych, tj. przez odpowiednie wartości oporów elektrycznych. Metodę Liebmana można również adaptować do modelowania na papierze przewodzącym. Pierwszą taką próbę podjęto w [7] przy modelowaniu nieustalonych stanów cieplnych w złączu śrubowym kadłuba turbiny.

4. Badania wstępne

Dla opanowania techniki badań oraz dla oceny dokładności metody wykonano pomiary na kilku modelach kontrolnych. Do analizy wybrano przykłady, których rozwiązanie metodami analitycznymi nie sprawia trudności, umożliwiając porównanie wyników badań analogowych i obliczeń. Do szczegółowej dyskusji w tym rozdziale wybrano problem dotyczący ustalonego rozkładu temperatur w grubościennej powłoce walcowej, opisany równaniami

$$\frac{d^2T}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dT}{dR} = 0$$

$$T = T_w \quad \text{dla} \quad R = R_w \quad (10)$$

$$T = T_z \quad R = R_w + h$$

W celu wyznaczenia rozkładu temperatury w oparciu o badania modelowe na papierze przewodzącym jako ośrodku modelującym, wygodnie jest sprowadzić zależności (10) do postaci bezwymiarowej

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = 0$$

$$v = 1 \quad \text{dla} \quad r = a \quad (11)$$

$$v = 0 \quad r = a + 1$$

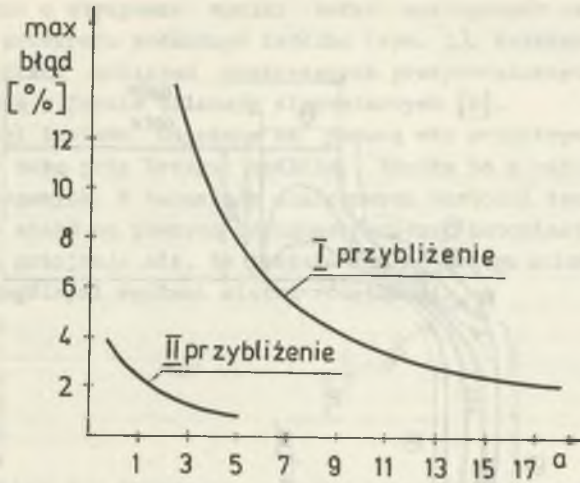
gdzie:

$$v = \frac{T - T_z}{T_w - T_z}, \quad r = \frac{R}{h}, \quad a = \frac{R_w}{h} \quad (12)$$

Badania ograniczono do wyznaczenia I i II przybliżenia pola temperatury z uwagi na szybką zbieżność wyników badań analogowych do wartości dokładnych określonych formułą

$$v = \frac{\ln[(a+1)/r]}{\ln[(a+1)/a]} \quad (13)$$

Na rys. 2 podano zależność maksymalnego błędu I i II przybliżenia pola temperatury w funkcji bezwymiarowego promienia wewnętrznego "a". Z przebiegu podanych krzywych wynika, że w większości przypadków II przybliżenie daje bardzo dokładne wyniki pola temperatur. Dla powłok "mniej" grubościennych badania można ograniczyć do I przybliżenia.



Rys. 2

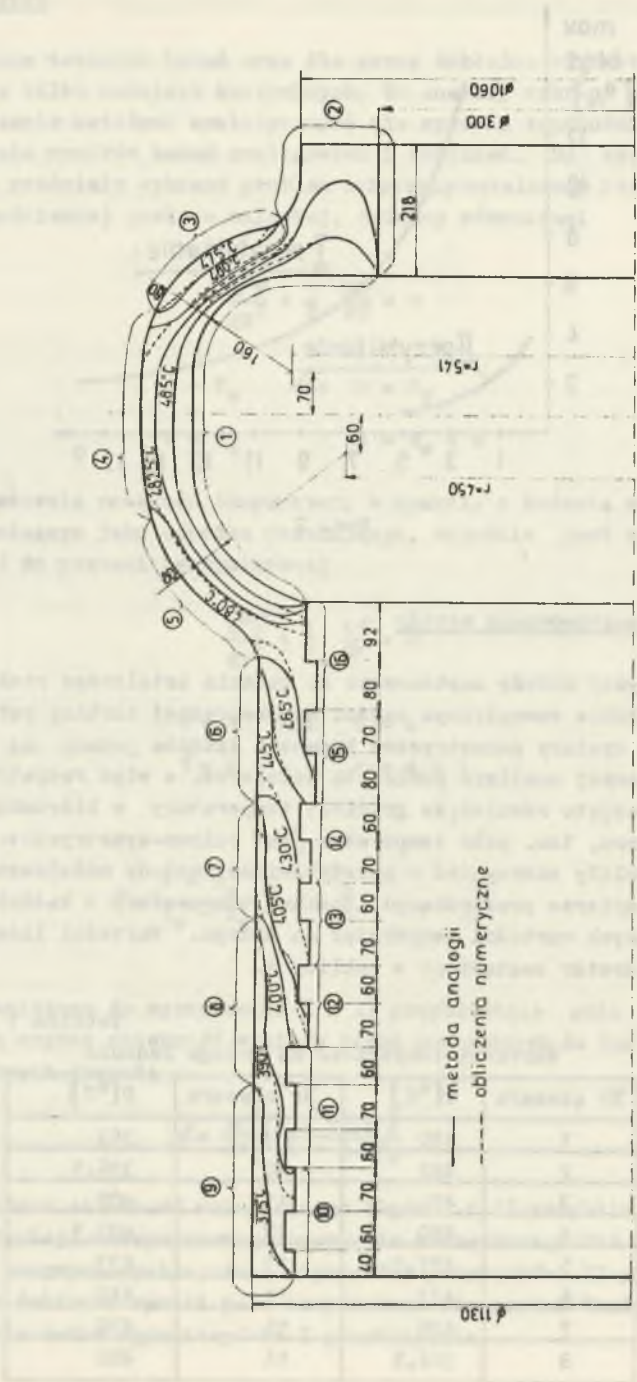
5. Przykład zastosowania metody

Opisaną wyżej metodę zastosowano do badania ustalonego rozkładu temperatury w kadłubie wewnętrznym części wysokoprężnej turbiny parowej dużej mocy. Główne wymiary geometryczne badanego kadłuba podano na rysunku 3. W przeprowadzonej analizie pominięto kołnierze, a więc rozpatrywano model obrotowy. Przyjęto również, że gradient temperatury w kierunku obwodowym jest równy zero, tzn. pole temperatur jest osiowo-symetryczne. Powyższe założenia pozwoliły skorzystać z przedstawionej metody modelowania pół temperatur na papierze przewodzącym. Rozkład temperatury w kadłubie poszukiwano dla znanych wartości temperatur na brzegu. Wartości liczbowe wspomnianych temperatur zestawiono w tabelicy 1.

Tabela 1

Wartości temperatur na brzegu kadłuba

Nr obszaru	T[°C]	Nr obszaru	T[°C]
1	490	9	365
2	482	10	396,5
3	470	11	400
4	480	12	407,5
5	477,5	13	433
6	433	14	440
7	400	15	470
8	386,5	16	480



Rys. 3

W oparciu o otrzymane wyniki badań analogowych nakreślono przebiegi izoterm w przekroju podłużnym kadłuba (rys. 3). Uzyskane rezultaty porównano z wynikami obliczeń numerycznych przeprowadzonych metodą różnicową bezpośrednią w formie bilansów elementarnych [8].

Przebiegi izoterm uzyskane za pomocą obu rozpatrywanych metod różnią się między sobą przy brzegu kadłuba. Wynika to z różnic w zadawaniu warunków brzegowych. W badaniach analogowych wartości temperatur brzegowych zadaje się stałe na pewnych odcinkach brzegu, natomiast w obliczeniach numerycznych przyjmuje się, że temperatura na brzegu zmienia się liniowo między poszczególnymi węzłami siatki różnicowej.

LITERATURA

- [1] Wiśniewski S.: Obciążenia cieplne silników tłokowych. WKiŁ, Warszawa, 1972.
- [2] Praca zbiorowa: Wyznaczenie rozkładu temperatur w wirnikach i kadłubach turbin gazowych za pomocą modelu elektrolitycznego. Brown Boveri Mitteilungen, Band 5/6, 1953.
- [3] Traupel W.: Termische Turbomaschinen. Berlin, 1960.
- [4] Kunes J., Ulrych B.: Analogue-Digital Analysis of Thermal Shock in a High-Pressure Valve Body. Technical Digest 11/67.
- [5] Tarczyńska A., Wiśniewski Z.: Zastosowanie metod analogii elektrycznej do badania pól temperaturowych w elementach turbin. ABM z.2, 1970.
- [6] Liebman G.: A new electrical analog method for the solution of transient heat conduction problems. Transaction of the ASME nr 3, 1956.
- [7] Mazanowski P.: Badania pól temperaturowych w elementach turbin, praca dyplomowa magisterska, Gliwice, 1970.
- [8] Kosman G.: Ustalony rozkład temperatur w kadłubach zmodernizowanej turbiny TK200. Prace naukowo-badawcze, Gliwice 1971.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОСЕЦИММЕТРИЧНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ БУМАГИ

Р е з ю м е

В работе описано применение метода последовательных приближений для решения вопросов теплопроводности при помощи электропроводной бумаги. Рассматривается осесимметричная задача для толстостенной оболочки вращения произвольной формы. В заключительной части статьи представлены результаты моделирования температурного поля в корпусе паровой турбины.

SUCCESSIVE APPROXIMATION METHOD FOR DETERMINING OF THE AXIAL-SYMMETRIC TEMPERATURE FIELD BY MEANS OF THE ELECTRICALLY CONDUCTIVE PAPER

Summary

This paper discusses a successive approximation method for solving the axial-symmetric problem of thermal conduction with arbitrary boundary conditions by means of the electrically conductive paper. The arbitrary shape of the thick-walled shells can be used. Application of the successive approximation method has reduced time of models preparing.

The final part of the paper presents the modelling results of temperature field in steam turbine cylinders.