# ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Seria: ENERGETYKA z. 54

Jan SKŁADZIEŃ Instytut Techniki Cieplnej Politechniki Śląskiej

NAGRZEWANIE POWIERZCHNIOWE I OBJĘTOŚCIOWE W JEDNOWYMIAROWYM UKŁADZIE PŁASKIM ORAZ WALCOWYM

> <u>Streszczenie</u>. W artykule podano wykresy we współrzędnych bezwymiarowych służące do wyznaczenia charakterystycznych temperatur przy nagrzewaniu powierzchniowym bez strat oraz objętościowym ze stratami obiektów jednowymiarowych płaskich i walcowych. Przyjęto ogólnie stosowane założenia upraszczające.

## Wykaz oznaczeń

ø - współczynnik wnikania ciepła. δ - połowa grubości płyty. θ - temperatura bezwymiarowa względnie nadwyżka temperatury. r - temperatura, Vp - temperatura początkowa ( $\mathcal{V}_{n} = \mathcal{V}_{F_{0}=0}$ ), λ - współczynnik przewodzenia ciepła. - wartości własne. μ - współrzędna bezwymiarowa ( $\zeta = \frac{x}{\sqrt{2}}$ ξ lub - gęstość masy. 6 T - czas. A, - pomocnicze stałe. - współczynnik przewodzenia temperatury (a =  $\frac{\lambda}{c_n \rho}$ ), a - liczba Biota (Bi = 🚾 lub Bi =  $\frac{\alpha_R}{\lambda}$ ), Bi - właściwa pojemność cieplna przy stałym ciśnieniu, c<sub>p</sub> - powierzchnia zewnętrzna wsadu, F  $(Fo = \frac{aT}{62}$  lub  $Fo = \frac{aT}{52}),$ - liczba Fouriera Fo - wektor normalny do powierzchni zewnętrznej (skierowany na zewnątrz), n q wydajność powierzchniowych źródeł ciepła na jednostkę powierzchni, qv - wydajność objętościowych źródeł cicpła przypadająca na jednostkę objętości.

1975

Nr kol. 462

 $r, x - współrzędne bezwzględne (0 \leq |x| \leq \delta; 0 \leq r \leq R),$ 

R - promień walca,

t\_ - temperatura otoczenia,

 $\overline{t}_0$  - fikcyjna temperatura otoczenia ( $\overline{t}_0 = t_0 + \frac{2}{3}$ ),

V.Y - bezwymiarowe temperatury kryterialne.

## Przyjęte założenia

- Rozpatrzono układy jednowymiarowe: płaski i walcowy. W przypadku układu płaskiego założono symetrię, w związku z czym środek układu współrzędnych znajduje się w środku płyty o grubości 2δ.
- Rozważania dotyczą ciał izotropowych, posiadających stałe właściwości niezależne od położenia i temperatury.
- Przed rozpoczęciem procesu nagrzewania temperatura początkowa  $v_p$  jest w każdym punkcie ogrzewanego ciała taka sama.
- Wydajność powierzchniowych q względnie objętościowych q<sub>v</sub> źródeł ciepła jest stała, niezależna od położenia i czasu. Stały jest również współczynnik wnikania ciepła α oraz temperatura otoczenia t<sub>o</sub>.

## 1. Nagrzewanie powierzchniowe

W pewnych przypadkach nagrzewanie wsadu odbywa się w wyniku doprowadzenia przez powierzchmię ciała do jego wnętrza określonego strumienia ciepła niezależnego od temperatury powierzchni. Sytuacja taka ma np. miejsce w przypadku dopływu ciepła do wsadu przez promieniowanie od ciała posiadającego temperaturę znacznie wyższą od temperatury powierzchni ogrzewanego wsadu. Ciepło może się również wytwarzać bezpośrednio na powierzchni zewnętrznej ciała, co dzieje się podczas nagrzewania indukcyjnego materiałów będących dobrymi przewodnikami prądu elektrycznego. Ponad 85% ciepła wytwarza się wtedy w warstwie przypowierzchniowej wsadu o grubości równej głębokości wnikania prądu, proporcjonalnej do pierwiastka z rezystywności oraz odwrotnie proporcjonalnej do pierwiastka z częstotliwości prądu.Jeśli głębokość ta jest znacznie mniejsza np. od promienia walca, to można przyjąć, że cała ilość ciepła wydziela się na powierzchni wsadu.

Nagrzewaniu powierzchniowemu odpowiada warunek brzegowy drugiego rodzaju. Jeśli jednak strumień ciepła doprowadzony do powierzchni zewnętrznej wsadu, bądź pośrednio poprzez promieniowanie, bądź bezpośrednio wytworzony w warstwie przypowierzchniowej, jest częściowo przewodzony do wnętrza ciała, częściowo zaś wnika do otoczenia zgodnie z prawem Newtona,wtedy warunek brzegowy przyjmuje postać: Nagrzewanie powierzchniowe i objętościowe ...

$$\lambda \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right|_{F} = \dot{q} - c(\vartheta) \Big|_{F} - t_{o}$$
 (1)

Po wprowadzeniu fikcyjnej temperatury otoczenia zależność (1) sprowadza się do warunku brzegowego trzeciego rodzaju:

$$-\lambda \left. \frac{\partial \hat{v}}{\partial n} \right|_{F} = \alpha \left( \hat{v} \right|_{F} - \hat{t}_{0} \right)$$
(2)

Nagrzewanie powierzchniowe ze stratami ciepła do otoczenia można zatem w obliczeniach traktować jak nagrzewanie pośrednie z zastosowaniem warunku brzegowego trzeciego rodzaju (2) zawierającego fikcyjną temperaturę otoczenia t w miejsce temperatury rzeczywistej t<sub>o</sub>. Po wprowadzeniu bezwymiarowej temperatury 0:

$$\theta = \frac{t_o - \vartheta}{t_o - \vartheta_p}$$
(3)

zachowują swoją ważność wykresy zależności temperatury  $\Theta$  od liczb kryterialnych Fo i Bi podawane w postaci wykresów wężykowych [1,5] 1 -  $\Theta$  = = f(Bi,Fo) oraz w postaci [3,5] wykresów  $\Theta$  =  $\Theta$  (Bi,Fo).

W dalszej części pracy rozpatrzony jest przypadek, gdy nie występują straty ciepła do otoczenia, co odpowiada sytuacji C = 0. Zależność (1) sprowadza się wtedy do warunku brzegowego drugiego rodzaju.

## 1.1. Nagrzewanie powierzchniowe płaskiej płyty

Po wprowadzeniu nadwyżki temperatury 🙃

$$\Theta = \vartheta^{\circ} - \vartheta^{\circ}_{D}$$
 (4)

równanie przewodzenia ciepła wraz z warunkiem początkowym i brzegowym we współrzędnych niezależnych bezwymiarowych przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial F_0}$$
(5)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}\Big|_{\zeta=\pm 1} = \pm \frac{\delta \delta}{\lambda}$$
(6)

Warunek (6) spełnia wymaganie symetrii, które również można wyrazić równaniem:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \bigg|_{\zeta=0} = 0$$
(8)

Rozwiązanie zagadnienia (5);(7) jest sumą dwóch funkcji:

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 \tag{9}$$

spełniających warunki:

$$\frac{\partial^{2} \theta_{1}}{\partial \zeta^{2}} = \frac{\partial \theta_{1}}{\partial F_{0}}$$
(10)
$$\frac{\partial \theta_{1}}{\partial \zeta} \bigg|_{\zeta=\pm 1} = \pm \frac{\dot{\alpha} \dot{\delta}}{\lambda}$$
(11)
$$\frac{\partial^{2} \theta_{2}}{\partial \zeta^{2}} = \frac{\partial \theta_{2}}{\partial F_{0}}$$
(11)
$$\frac{\partial \theta_{2}}{\partial \zeta} \bigg|_{\zeta=\pm 1} = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 0$$
 (12)  
Fo=0

Po założeniu funkcji  $\Theta_1$  w postaci:

$$\theta_1 = C_1 F_0 + C_2 + C_3$$
 (13)

otrzymuje się z (10):

$$c_1 = \frac{\dot{q}\delta}{\lambda} ; \quad c_3 = \frac{\dot{q}\delta}{2\lambda}$$
 (14)

Z równań (11) wynika:

$$\Theta_2 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(i\pi\xi) e^{-i^2\pi^2 Fo}$$
(15)

Nagrzewanie powierzchniowe i objętościowe ...

Po wstawieniu (13)+(15) do (12) i po wykorzystaniu warunku ortogonalności dostaje się:

$$A_{1} = -\frac{-1}{\int \cos^{2}(i\pi\xi) d\xi} = (-1)^{1-1} \frac{2 d\delta}{i^{2} \pi^{2} \lambda}$$
(16)

Stałą C<sub>2</sub> otrzymuje się po zastosowaniu równania (12) dla punktu  $\xi = 0$ :

$$G_2 = -\sum_{i=1}^{\infty} A_i = -\frac{i\delta}{b\lambda}$$
(17)

Ostatecznie przyrost temperatury 0 wyraża wzór:

$$\Theta = \frac{\dot{q}\delta}{\lambda} Y(\xi, Fo)$$
 (18)

gdzie bezwymiarową temperaturę kryterialną Y określa zależność:

$$Y = Fo - \frac{1}{6}(1 - 3\xi^2) - \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} \cos(i\pi\xi) e^{-i^2\pi^2 Fo}$$
(19)

Wzory (18) i (19) określają rozkład temperatury w nagrzewanej powierzchniowo płaskiej nieskończenie rozległej płycie w funkcji bezwymiarowej przestrzennej zmiennej  $\xi$  oraz bezwymiarowego czasu Fo. Wykres zależności bezwymiarowej temperatury Y w funkcji czasowego kryterium Fo w charakterystycznych punktach płyty, tzn. na powierzchni ( $\xi = \pm 1$ ) oraz w środku ( $\xi = 0$ ) pokazany jest na rys. 1. Dla Fo – otrzymuje się asymptoty, których równania podane są na wykresie. Z rysunku 1 wynika wniosek,że dla Fo  $\geq 0,5$  można pominąć sumę występującą po prawej stronie zależności (19). Rozkład temperatury wewnątrz płyty jest wtedy określony funkcją paraboliczną.

Płyta nagrzewana tylko z jednej strony stałym strumieniem ciepła q, z drugiej zaś zaizolowana cieplnie, zachowuje się jak połowa płyty ogrzewanej powierzchniowo z obu stron. Podane wzory są słuszne dla płyty jednostronnie zaizolowanej, jeśli za  $\delta$  podstawi się całkowitą grubość płyty. Dla powierzchni grzejącej jest wtedy  $\xi = 1$ , dla zaizolowanej zaś  $\xi = 0$ .

123

(20)



Rys. 1. Wykres zależności Y = Y(Fo) J =0,1 płaskiej płyty

# 1.2. Nagrzewanie powierzchniowe okrągłego walca

Przyrost temperatury 0 określony zależnością (4) jest w przypadku powierzchniowego nagrzewania nieskończenie długiego okrągłego walca rozwiązaniem zagadnienia początkowo-brzegowego:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta}{\partial F_0}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=1} = \frac{\dot{\alpha} R}{\lambda}$$

$$\theta \bigg|_{F_0=0} = 0$$

Po rozwiązaniu zagadnienia (20) w analogiczny sposób jak dla płaskiej nieskończenie rozległej płyty otrzymuje się [4] po wprowadzeniu bezwymiarowej temperatury kryterialnej Y:

$$Y = \frac{\Theta \lambda}{q R}$$
(21)

następującą zależność:

$$Y = 2 F_0 - \frac{1}{4} (1 - 2\xi^2) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_i^2 J_0(\mu_i)} J_0(\mu_i \xi) e^{-\mu_i^2 F_0}$$
(22)

We wzorze (22)  $J_0$  jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju, rzędu zerowego, wartości własne  $\mu_1$  zaś są dodatnimi miejscami zerowymi funkcji Bessela pierwszego rodzaju rzędu pierwszego, tzn. większymi od zera rozwiązaniami równania:

 $J_1(\mu) = 0$  (23)





Wykres zależności bezwymiarowej temperatury Y w funkcji bezwymiarowego czasu Fo dla środka nieskończonego walca ( $\xi = 0$ ) oraz dla jego powierzchni ( $\xi = 1$ ) pokazany jest na rys. 2. Asymptoty dla Fo $\rightarrow$  podobnie jak uprzednio są równoległymi prostymi o równaniach jak na rysunku. Widać przy tym, że już dla Fo $\geqslant 0,3$  suma występująca po prawej stronie wzoru (22) ma bardzo mały wpływ i można ją pominąć, rozkład temperatury zaś wewnątrz walca jest paraboliczny.

## 2. Nagrzewanie objętościowe

Podczas nagrzewania wsadu będącego dielektrykiem w nagrzewnicy pojemnościowej za pomocą zmiennego pola elektrycznego generuje się w całej jego objętości moc cieplna proporcjonalna do częstotliwości prądu oraz do kwadratu jego napięcia. Jeśli pole elektryczne oraz struktura materiałowa są jednorodne, to w każdym miejscu wsadu istnieje źródło ciepła o stałej wydajności odniesionej do jednostki objętości. Przy takim nagrzewaniu wsa du odizolowanego cieplnie od otoczenia, posiadającego na początku stałą w każdym punkcie temperaturę  $\mathcal{V}_p$ , temperatura wsadu w każdej chwili jest jednakowa i nie zależy od położenia. Przy stałym  $q_v$  oraz c $_p$  temperatura ta rośnie liniowo w funkcji czasu. Gdy istnieją straty ciepła do otoczenia, to temperatura jest funkcją położenia i czasu. Przy skończonych wartościach współczynnika wnikania ciepła, na powierzchni wsadu występuje warunek brzegowy trzeciego rodzaju, uwzględniony w dalszych rozważaniach.

### 2.1. Nagrzewanie objętościowe płaskiej płyty

Po wprowadzeniu nadwyżki temperatury 0:

$$\theta = t - t_c$$
 (24)

równanie przewodzenia ciepła dla nagrzewanej objętościowo nieskończenie rozległej płaskiej płyty przyjmuje, wraz z warunkiem początkowym i brzegowym, we współrzędnych niezależnych bezwymiarowych, postać:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial F_0} = \frac{\partial \theta}{\partial F_0}$$
(25)

$$\Theta \Big|_{Fo=0} = \Theta_p = \vartheta_p - t_0$$
 (27)

Nagrzewanie powierzchniowe i objętościowe ...

Warunek symetrii, uwzględniony już w równaniu (26), można również zapisać w postaci:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0$$
 (28)

Rozwiązanie jest sumą dwóch funkcji:

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 \tag{29}$$

z których pierwsza jest rozwiązaniem dla stanu ustalonego:

$$\frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} = -\frac{\dot{q}_v \delta^2}{\lambda}$$
(30)

druga zaś dla nieustalonego:

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \chi^2} = \frac{\partial \theta_2}{\partial P_0}$$
(31)

Każda z funkcji składowych musi spełniać równanie (26). W rezultacie:

$$\theta_1 = \frac{\dot{a}_v \delta}{\alpha} + \frac{\dot{a}_v \delta^2}{2\lambda} (1 - \zeta^2)$$
(32)

$$\theta_{2} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{i} \cos(\mu_{i} \zeta) e^{-\mu_{i}^{2}Fo}$$
(33)

gdzie wartości własne 💾 są dodatnimi rozwiązaniami równania:

$$\frac{\mu}{BI} = \operatorname{ctg} \mu \tag{34}$$

Stałe A, wyznacza się z warunku (27):

$$A_{1} = \frac{\int_{0}^{1} (\theta_{p} - \frac{\dot{q}_{v}\delta}{c\xi} - \frac{\dot{q}_{v}\delta^{2}}{2\lambda} + \frac{\dot{q}_{v}\delta^{2}}{2\lambda}\xi^{2}) \cos(\mu_{1}\xi) d\xi}{\int_{0}^{1} \cos^{2}(\mu_{1}\xi) d\xi}$$
(35)

a stąd:

$$A_{i} = 4 \frac{\theta_{p} \sin \mu_{i} - \frac{\dot{q}_{v} \delta^{2}}{\lambda}}{2\mu_{i} + \sin(2\mu_{i})} \frac{\sin \mu_{i}}{\mu_{i}^{2}}}{(36)}$$

Jeśli wsad ulega nagrzewaniu od temperatury początkowej równej temperaturze otoczenia ( $\theta_p = 0$ ) [2], to po wprowadzeniu bezwymiarowej temperatury kryterialnej:

$$V = \frac{\theta \alpha}{\dot{q}_{uv} \delta}$$
(37)

otrzymuje się rozwiązanie w postaci:

$$V = 1 + \frac{Bi}{2} (1 - \xi^2) - 4Bi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2} \frac{\sin\mu_i \cos(\mu_i \xi)}{2\mu_i + \sin(2\mu_i)} e^{-\mu_i^2 Fo}$$
(38)

Wzór (38) podaje zależność temperatury V od bezwymiarowej zmiennej położenia  $\zeta$ , bezwymiarowego czasu Fo oraz od liczby Biota Bi. Zmianę V w funkcji liczb Fo i Bi dla środka płyty ( $\zeta = 0$ ) oraz dla jej powierzchni ( $\zeta = 1$ ) pokazują wykresy na rys. 3 i 4. Przy większych liczbach Biota szybciej zostaje osiągnięty stan ustalony, przy którym temperatura V zależy tylko od położenia:

$$V = 1 + \frac{B1}{2} (1 - \zeta^2)$$
 (39)

Gdy płyta oddaje ciepło tylko jedną stroną, druga zaś jest zaizolowana, wtedy podane wzory oraz wykresy są słuszne, gdy  $\delta$  oznacza grubość całej płyty. Dla powierzchni zaizolowanej jest wtedy  $\zeta = 0$ , dla oddającej zaś ciepło do otoczenia  $\zeta = 1$ . Płyta taka zachowuje się jak połowa płyty oddającej ciepło do otoczenia obu powierzchniami bocznymi.

128



Rys. 3. Wykres zależności V = V(Bi,Fo) dla nieskończenie rozległej płaskiej płyty



Rys. 4. Wykres zależności V = V(Bi,Fo) dla nieskończenie rozległej ţ=1 płaskiej płyty

# 2.2. Nagrzewanie objętościowe okrągłego walca

Jeśli ciepło generuje się równomiernie w całej objętości nieskończenie długiego okrągłego walca, to równanie przewodzenia ciepła po uwzględnieniu (24) wraz z warunkiem początkowym oraz brzegowym trzeciego rodzaju przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{\dot{q}_v R^2}{\lambda} = \frac{\partial \theta}{\partial F_0}$$
(40)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + Bi \theta = 0$$

$$(41)$$

$$\Theta = \Theta_{p} = \vartheta_{p} - t_{o}$$

$$F_{o=0}$$
(42)

130

## Nagrzewanie powierzchniowe i objętościowe...

Po zastosowaniu przedstawionej uprzednio metody postępowania otrzymuje się kolejno:

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 \tag{43}$$

$$\theta_1 = \frac{q_{\rm w}R}{2c\zeta} + \frac{q_{\rm w}R^2}{4\lambda} (1 - \zeta^2)$$
 (44)

$$\Theta_{2} = \sum_{i=1}^{\infty} A_{i} J_{o}(\mu_{i} \xi) e^{-\mu_{i}^{2} F o}$$
(45)

gdzie wartości własne  $\mu_i$  są rozwiązaniem równania:

$$\frac{\mu}{B1} = \frac{J_{0}(\mu)}{J_{1}(\mu)}$$
(46)

Stałe A, oblicza się z warunku (42):

$$A_{1} = \frac{\int_{0}^{1} (\theta_{p} - \frac{\dot{q}_{v}R}{2\alpha\zeta} - \frac{\dot{q}_{v}R^{2}}{4\lambda} + \frac{\dot{q}_{v}R^{2}}{4\lambda} \zeta^{2}) \zeta J_{o}(\mu_{1}\zeta) d\zeta}{\int_{0}^{1} \zeta J_{o}^{2}(\mu_{1}\zeta) d\zeta}$$
(47)

a stąd:

$$A_{i} = \Theta_{p} \frac{2 J_{1}(\mu_{i})}{\mu_{i} [J_{0}^{2}(\mu_{i}) + J_{1}^{2}(\mu_{i})]} - \frac{2 \dot{q}_{v} R^{3} \alpha}{\lambda^{2} \mu_{i}^{2} (Bi^{2} + \mu_{i}^{2}) J_{0}(\mu_{i})}$$
(48)

Jeśli wprowadzi się bezwymiarową temperaturę kryterialną:

$$V = \frac{\Theta \alpha}{q_{v} R}$$
(49)

to dla wsadu ogrzewanego od temperatury otoczenia ( $\theta_p = 0$ ) [2] otrzymuje się:

$$V = \frac{1}{2} + \frac{Bi}{4} (1 - \xi^2) - 2Bi^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_i \xi)}{\mu_i^2(Bi^2 + \mu_i^2) J_0(\mu_i)} e^{-\mu_i^2 Fo}$$
(50)





Rys. 6. Wykres zależności V = V(Bi,Fo) dla nieskończenie długiego dla nieskończenie długiego
krągłego walca

Powyższą zależność bezwymiarowej temperatury V od liczby Biota Bi oraz od bezwymiarowego czasu Fo dla charakterystycznych punktów walca pokazano na rysunkach. Rysunek 5 przedstawia wykres V = V(Bi,Fo) dla środka walca ( $\xi$  = 0), wykres na rysunku 6 pokazuje tę samą zależność dla powierzchni bocznej walca ( $\xi$  = 1). Widać, że przy dużych liczbach Biota dość szybko wielkość V dąży do wartości obowiązujących dla stanu ustalonego z parabolicznym rozkładem temperatury:

$$V = \frac{1}{2} + \frac{Bi}{4} (1 - \zeta^2)$$
 (51)

### LITERATURA

- [1] Gdula S.J.: Podstawy techniki cieplnej, Gliwice 1972. (Skrypt).
- [2] Kącki E.: Termokinetyka, Warszawa 1967.
- [3] Kostowski E. i in.: Zbiór zadań z przepływu ciepła, (praca zbiorowa), Gliwice 1973. (Skrypt).
- 4 Schwartz T.: Termokinetyka układów elektrotermicznych, Warszawa 1966.
- 5. Staniszewski B.: Wymiana ciepła, podstawy teoretyczne, Warszawa 1963.

ПОВЕРХНОСТНЫЙ И ОБЪЕМНЫЙ НАГРЕВ В ОДНОМЕРНОЙ ПЛОСКОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОИ СИСТЕМАХ

### Резюме

В статье приводятся в безразмерных координатах диаграммы, служащие для определения характеристических температур при поверхностном нагреве без потерь, а также объемном нагреве с потерями одноразмерных плоских и цилиндрических объектов. Приняты общеприменяемые упрощающие данные.

#### THE SURFACE AND VOLUME HEATING OF ONE-DIMENSIONAL FLAT AND CYLINDRICAL OBJECTS

### Summary

In the paper the graphs with dimensionless co-ordinates for determination of characteristic temperatures during surface heating without heat losses and during volume heating with heat losses of one-dimensional flat and cylindrical objects have been given. There were applied generally used simplifying assumptions.