

Joachim J. Otte

Instytut Maszyn i Urządzeń Energetycznych

WYZNACZANIE POLA PRĘDKOŚCI I CIŚNIEŃ W KANAŁACH ŁOPATKOWYCH OSIOWYCH MASZYN WIRNIKOWYCH PRZY PRZEPŁYWIE PŁYNU NIEŚCISLIWEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę analizy osiowo-symetrycznego przepływu płynu idealnego, nieściśliwego w układach łopatkowych maszyn wirnikowych o zasadniczym osiowym kierunku przepływu. Uwzględniono najbardziej ogólną geometrię łopatek oraz ogólną strukturę strumienia na wlocie do wienca łopatkowego. Równania przepływu wyprowadzono w formie opartej na pojęciu "krzywizny linii prądu".

1. Wstęp

Jedną z dróg rozwoju teorii przepływu przez maszyny wirnikowe są badania teoretyczne, które w powiązaniu z coraz bardziej upowszechnianymi osiągnięciami elektronicznej techniki obliczeniowej pozwalają oczekiwać na znaczne podwyższenie ich efektywności. Jednym z zagadnień aerodynamiki maszyn przepływowych, w których zastosowanie maszyn cyfrowych jest szczególnie niezbędne, jest analiza przestrzennego przepływu płynu przez układy łopatkowe maszyn przepływowych.

Teoria przepływu przez maszyny wirnikowe osiowe w większości prac (m. in. w [3], [4], [14], [16]) ograniczona jest do opisu ruchu w przestrzeniach międzywieńcowych. Wynika stąd pewien brak powiązania pomiędzy cechami geometrycznymi układu łopatkowego a parametrami przepływu, będący znaczącym utrudnieniem w racjonalnym projektowaniu układu przepływowego maszyny. Wśród stosowanych tutaj metod wyróżnić można metody oparte na przyjęciu kształtu linii prądu w przekroju merydionalnym. Przykładowo w pracach [14], [16] linie prądu zadaje się odpowiednio do przebiegu powierzchni ograniczających kanał przepływowy, inne metody (np. prace Bammerta [1], [2]) opierają się natomiast na hipotezie falistego (sinusoidalnego) kształtu linii prądu. Podstawową wadą tych metod jest to, że geometria linii prądu określana jest na podstawie rozkładu parametrów przepływu w przestrzeniach międzywieńcowych podczas gdy wiadomo, że większą część układu przepływowego zajmują obszary wieńców łopatkowych.

Rozwiązanie zagadnienia przepływu w pełnym ujęciu, tzn. także w obszarach zajętych wieńcami łopatkowymi, prowadzi do znacznych trudności, przede wszystkim matematycznych. Jednocześnie wpływa tu problem doboru najbardziej odpowiedniego modelu zjawiska. Rozpatrując bowiem przepływ w ka-

nałach międzyłopatkowych trudności obliczeniowe potęgują się i chodzi o to, by w tej sytuacji przez zbytnie uproszczenie modelu przepływu nie pozabawiać uzyskanego rozwiązania cech adekwatności do przepływu rzeczywistego. Jest to więc problem odpowiedniego wyważenia między ogólnością modelu a możliwościami efektywnego rozwiązywania zadań sformułowanych w ramach tego modelu.

Znanych jest szereg prac [6], [12], [17], bazujących na trójwymiarowym charakterze przepływu. Przedstawione w nich metody oparte są bądź to na koncepcji sprowadzenia zagadnienia trójwymiarowego do dwu zagadnień dwuwymiarowych [17], [6], bądź też na zastosowaniu tzw. metody punktów osobliwych [12]. Mimo oznionych prób [7] praktycznego zastosowania tych metod, można stwierdzić, że proponowane tu procedury rozwiązania są bardzo skomplikowane i nieefektywne, nawet przy użyciu współczesnych maszyn cyfrowych.

Obeonie znaczne zastosowanie znalazły metody dające rozwiązanie tzw. zagadnienia quasi-trójwymiarowego [11], [13], [15], [16], gdzie obraz przepływu uzyskuje się w rezultacie iteracyjnego rozwiązania dwóch zadań: przepływu płynu przy założeniu jego osiowej symetrii oraz opływu palisady profilu na obrotowych powierzchniach prądu.

Rozważania prowadzone w niniejszej pracy sprowadzają się do rozwiązania w ramach tzw. pierwotnego zagadnienia hydrodynamiki, pierwszego z tych zadań, to jest osiowo-symetrycznego przepływu płynu na powierzchni S'_2 , za którą może być przyjęta pewna średnia powierzchnia kanału międzyłopatkowego.

W pracy uwzględniono najbardziej ogólną strukturę strumienia. Zgodnie z tym, przepływ jest w ogólnym przypadku wirowy, charakteryzujący się w płaszczyźnie wlotowej do układu przepływowego gradientami ciśnienia i prędkości oraz gradientami strat przepływowych w kanałach łopatkowych. Zwięzłe ujęcie tak postawionego zagadnienia było możliwe dzięki zastosowaniu "metody krzywizny linii prądu" [4], [5], [9], która należy do najbardziej dokładniejszych spośród metod obliczeń przepływów.

Ze względu na założenie nieściślności płynu, zakres zastosowania niniejszej teorii ograniczony jest do maszyn hydraulicznych i wentylatorów

2. Sformułowanie zagadnienia osiowo-symetrycznego przepływu przez wieńce łopatkowe

Równania zagadnienia osiowo-symetrycznego uzyskuje się, tak jak i w pracach [10], [11], przez zastosowanie w stosunku do równań opisujących zagadnienie przestrzenne, operację uśrednienia wszystkich funkcji względem czasu i współrzędnej obwodowej [15].

Osiowo-symetryczny przepływ płynu nieściśliwego na pewnej średniej powierzchni S_2 kanału łopatkowego opisany jest następującym układem czterech równań wektorowych [10]:

- równanie ruchu płynu

$$-\bar{w} \times \text{rot } \bar{w} + 2\bar{\omega} \times \bar{w} = -\nabla h^* + \bar{F}_2 + \bar{f} \quad (1)$$

- równanie ciągłości

$$\text{div}(\zeta \bar{w}) = 0 \quad (2)$$

- równanie warunku ortogonalności siły \bar{F}_2 oddziaływania łopatek na strumień względem powierzchni S_2'

$$\bar{n} \times \bar{F}_2 = 0 \quad (3)$$

- równanie określające powierzchnię prądu S_2'

$$\bar{w} \cdot \bar{n} = 0 \quad (4)$$

W miejsce równania ruchu zapisanego względem osi z bierze się zwykle pod uwagę równanie energii wzdłuż merydionalnej linii prądu

$$h_0^* = h^* + \frac{1}{2} \zeta w_0^2 = \text{const}, \quad (5)$$

gdzie h_0^* jest rotalpią w punkcie początkowym, np. na wlocie do układu przepływowego, natomiast $\zeta = \zeta(r, z)$ jest współczynnikiem strat przepływowych.

Rotapia h^* jest następującą funkcją parametrów przepływu [10]

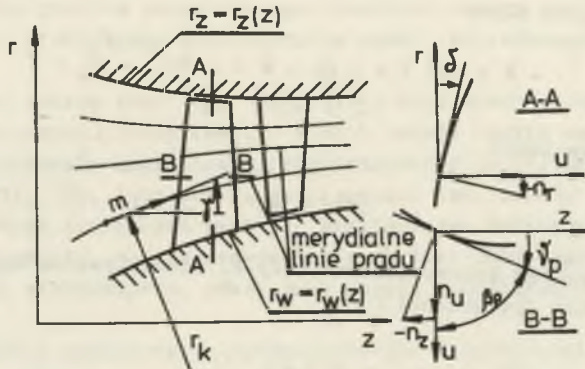
$$h^* = \frac{p}{\rho} + \frac{w^2 - u^2}{2} \quad (6)$$

Siła \bar{f} skierowana przeciwnie do wektora prędkości, zwana dalej siłą tarcia, jest pojęciem wynikłym wskutek wprowadzenia do rozważań strat przepływu. Uwzględnienie w ramach modelu płynu idealnego uśrednionych energetycznych efektów lepkości płynu rzeczywistego w postaci rozkładu współczynnika strat przepływu $\zeta(r, z)$ czyni model ten bardziej ogólnym.

Siłę \bar{f} określa się z równania (1), mnożąc je skalarnie przez wektor prędkości względnej \bar{w} . Uzyskuje się stąd zależność

$$\bar{f} = -\bar{w} \frac{w_0^2}{2w} \frac{d\zeta}{dt} \quad (7)$$

Równania (1-5) tworzą w warunkach pierwotnego zadania hydrodynamiki, gdy zadana jest geometria powierzchni S_2 , zamknięty układ równań z siedmioma niewiadomymi \bar{w} , \bar{F}_2 , p .



Rys. 1. Przekrój merydionalny kanału przepływowego i geometria łopatek

Jeżeli przyjąć, że równanie powierzchni S_2' ma postać $\psi = f(r, z)$ to przyjmując kolejno $z = \text{const}$ oraz $r = \text{const}$ (rys. 1) wyznacza się kąty na dwóch wzajemnie prostopadłych powierzchniach.

$$\text{tg } \delta = r \frac{d\psi}{dr} \quad \text{ctg } \beta_p = r \frac{d\psi}{dz} \quad (8)$$

Te same kąty można określić przy pomocy składowych wektora \bar{n} (n_r , n_u , n_z) normalnego do powierzchni S_2'

$$\text{tg } \delta = -\frac{n_r}{n_u} \quad \text{ctg } \beta_p = -\frac{n_z}{n_u} \quad (9)$$

Z warunku ortogonalności (3) uzyskuje się związki pomiędzy składowymi siły masowej a geometrią powierzchni

$$F_{2r} = -F_{2u} \text{tg } \delta \quad F_{2z} = -F_{2u} \text{ctg } \beta_p \quad (10)$$

natomiast z równania (4) otrzymuje się wyrażenie:

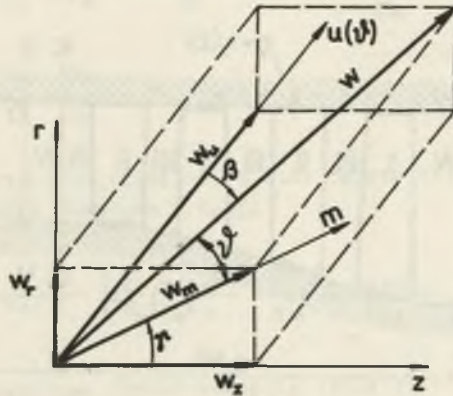
$$w_u = w_r \text{tg } \delta + w_z \text{ctg } \beta_p \quad (11)$$

Wykorzystując związki zachodzące pomiędzy składowymi wektora prędkości (rys. 2)

$$\text{tg } \delta = \frac{w_r}{w_z}; \quad \text{ctg } \beta_p = \frac{w_u}{w_{az}} \quad (12)$$

dochodzi się do następującego wzoru:

$$\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \delta \sin \phi + \operatorname{ctg} \beta_p \cos \phi \quad (13)$$



Rys. 2. Przestrzenne usytuowanie składowych wektorów prędkości

3. Równania osiowo-symetrycznego przepływu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych

Dla celów analizy teoretycznej w układzie przepływowym maszyny wirnikowej wyróżnić można kilka charakterystycznych obszarów (rys. 3). Są to: obszar zajęty łopatkami wirnikowymi (I) i stojanowymi (II) oraz przestrzeń międzywieńcowa (III) i przestrzeń na wlocie i wylocie z układu przepływowego. Dalsze rozważania mają na celu podanie równań opisujących przepływ płynu w wyszczególnionych obszarach oraz metodę ich rozwiązania.

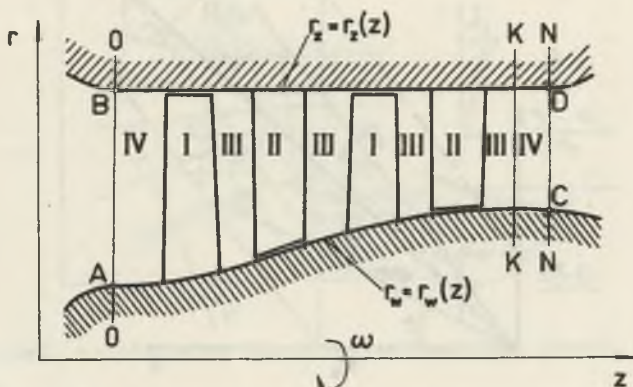
Przedstawione w niniejszej pracy równania przepływu osiowo-symetrycznego wyprowadzono w formie opartej na pojęciu "krzywizny linii prądu". Szczególną trudność stanowi tu odpowiednio dokładne określenie promienia krzywizny merydionalnej linii prądu. Definicyjnie krzywizna opisana jest wyrażeniem

$$\frac{1}{r_k} = - \frac{\partial \phi}{\partial m} \quad (14)$$

Ze względu na dość rozbudowany charakter równań przepływu, a także dla przejrzystości, zastosowano następujący jednolity zapis równań:

$$a_m \frac{\partial c_m}{\partial m} + A c_m^2 + B c_m + C = 0 \quad (15)$$

Przez A, B, C oznaczono wyrażenia funkcyjne zgrupowane przy poszczególnych wyrazach niewiadomej. W dalszych rozważaniach podanie odpowiednich wyrażeń A, B, C będzie więc jednoznaczne z wypisaniem pełnego równania.



Rys. 3. Przekrój merydionalny układu przepływowego maszyny wirnikowej z zaznaczeniem podobszarów ważności wyprowadzonych równań osiowo-symetrycznego przepływu

Równanie ruchu płynu (1) w formie skalarowej, po uwzględnieniu równania (5), przedstawia sobą układ równań

$$-w_u \operatorname{rot}_z \bar{w} + w_z \operatorname{rot}_u \bar{w} - 2\omega w_u = -\frac{\partial h^*}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\xi w_\theta^2)}{\partial r} + F_{2r} + f_r$$

$$w_r \operatorname{rot}_z \bar{w} - w_z \operatorname{rot}_r \bar{w} + 2\omega w_r = F_{2u} + f_u \quad (16)$$

$$-w_r \operatorname{rot}_u \bar{w} + w_u \operatorname{rot}_r \bar{w} = -\frac{\partial h^*}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\xi w_\theta^2)}{\partial z} + F_{2z} + f_z,$$

gdzie składowe rotacji określone są następująco:

$$\operatorname{rot}_r \bar{w} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r w_u)}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_u \bar{w} = \frac{\partial w_r}{\partial r} - \frac{\partial w_z}{\partial r}; \quad \operatorname{rot}_z \bar{w} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r w_u)}{\partial r} \quad (17)$$

Równanie (16.2), po uwzględnieniu równań (17) i (7) oraz związku $w_u = c_m \operatorname{ctg} \beta$, przekształca się do postaci:

$$F_{2u} = c_m^2 \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta \sin \vartheta}{r} + \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial m} \right) + c_m \left(\operatorname{ctg} \beta \frac{\partial c_m}{\partial m} + 2 \omega \sin \vartheta \right) + \sin \beta \cos \beta \frac{w_0^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} \quad (18)$$

Biorąc pod uwagę składową promieniową siły tarcia (7) oraz przekształcone wyrażenie na składową obwodową rotacji

$$\operatorname{rot}_u \bar{w} = \frac{1}{c_m \cos \vartheta} \left[c_m^2 \left(\frac{\sin \vartheta}{c_m} \frac{\partial c_m}{\partial m} - \frac{\cos \vartheta}{r_k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial c_m^2}{\partial r} \right], \quad (19)$$

otrzymuje się następującą postać równania (16.1):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial c_m^2}{\partial r} (1 + \operatorname{ctg}^2 \beta) - \left(\frac{\sin \vartheta}{c_m} \frac{\partial c_m}{\partial m} - \frac{\cos \vartheta}{r_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{ctg}^2 \beta}{\partial r} - \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta}{r} \right) + \quad (20)$$

$$+ 2 c_m \omega \operatorname{ctg} \beta = \frac{\partial h_0^*}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\xi w_0^2)}{\partial r} + \sin \vartheta \sin^2 \beta \frac{w_0^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} - F_{2r}$$

Przy pomocy związku (10) z równań (18) i (20) dochodzi się do zasadniczego równania przepływu osiowo-symetrycznego, które zgodnie z zapisem (15) przedstawia się następująco:

$$\left\{ \begin{aligned} A &\equiv \sin^2 \beta \left(\frac{\cos \vartheta}{r_k} + \frac{\operatorname{ctg} \beta_p \operatorname{ctg} \beta \cos \vartheta}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{ctg}^2 \beta}{\partial r} - \operatorname{tg} \delta \frac{\partial \operatorname{ctg} \beta}{\partial m} \right) \\ B &\equiv \sin^2 \beta \left[2 \omega \operatorname{ctg} \beta_p \cos \vartheta - (\sin \vartheta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \delta) \frac{\partial c_m}{\partial m} \right] \\ C &\equiv \sin^2 \beta \left[- \frac{\partial h_0^*}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\xi w_0^2)}{\partial r} - \sin^2 \beta_p (\sin \vartheta + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{tg} \delta) \frac{w_0^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} \right] \end{aligned} \right. \quad (21)$$

W powyższym równaniu występuje wielkość $\partial o_m / \partial m$, obliczenie której może nastroczać pewne trudności. Aby tego uniknąć, określono ją z równania ciągłości (2), zapisanego skalarowo

$$\frac{\partial(r \zeta w_x)}{\partial r} + \frac{\partial(r \zeta w_z)}{\partial z} = 0, \quad (22)$$

w następującej postaci:

$$\frac{\partial o_m}{\partial m} = -o_m \left[\frac{tg \delta'}{r_k} + \frac{\cos \delta'}{r} \frac{\partial(r tg \delta')}{\partial r} + \frac{\partial \ln \zeta}{\partial m} \right] \quad (23)$$

Podstawienie powyższego związku do równania (21) pozwala wyprowadzić ogólne równanie (24, tablica 1) osiowo-symetrycznego przepływu płynu niesolnelnego w wirujących kanałach łopatkowych maszyn przepływowych. Równanie to zawiera dwie niewiadome, prędkość o_m i kąt δ' . Pozostałe funkcje są zadane, natomiast kąt β określony jest zależnością (13).

Równaniem zamykającym jest równanie ciągłości w formie całkowej

$$\dot{m} = 2\pi r \int_{r_1}^{r_2} \zeta o_m \cos \delta' r dr = \text{const} \quad (25)$$

Aby uzyskać odpowiednie równanie przepływu, ważne dla wieńców stałych (stojanowych) (obszar II, rys. 3) należy przyjąć $\omega = 0$ oraz uwzględnić zmianę oznaczeń:

$$\beta \rightarrow \alpha, \quad \beta_p \rightarrow \alpha_p, \quad w \rightarrow 0, \quad h^* \rightarrow i^*$$

W przestrzeniach międzywieńcowych (III), gdzie $\bar{F}_2 = 0$, $\zeta = 1$; rozkład kątów β zadaje się zależnościami empirycznymi w oparciu o geometrię kanałów łopatkowych lub też na podstawie badań (dmuchaw) palisad.

Przykładowo, równanie (26, tabl. 1) opisuje osiowo-symetryczny przepływ płynu w przestrzeni III za wirnikiem.

Równania opisujące przepływ w przestrzeniach bezłopatkowych (IV) na wlocie i wylocie układu przepływowego otrzymuje się z ogólnego układu przy założeniu: $\bar{F}_2 = 0$, $\zeta = 1$, $\dot{S} = 0$, $\bar{F} = 0$. Odpowiednie równanie (27) dla przestrzeni na wlocie, gdzie z reguły kąt strumienia $\beta = 90^\circ$, przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Równania osiowo-symetrycznego przepływu płynu

Obszar I	Równanie (24)
	$A = \sin^2 \beta \left[\frac{1 + \operatorname{otg} \beta \operatorname{tg} \delta \sin \vartheta}{\cos \vartheta r_k} + \frac{\operatorname{otg}^2 \beta + \sin^2 \vartheta}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{otg}^2 \beta}{\partial r} + \right. \\ \left. - \operatorname{tg} \delta \frac{\partial \operatorname{otg} \beta}{\partial m} + (\sin \vartheta + \operatorname{otg} \beta \operatorname{tg} \delta) \left(\cos \vartheta \frac{\partial \operatorname{tg} \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial \ln r}{\partial m} \right) \right]$ $B = 2 \omega \sin^2 \beta \operatorname{otg} \beta p \cos \vartheta$ $C = \sin^2 \beta \left[- \frac{\partial h^*}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\xi w^2)}{\partial r} - \sin^2 \beta (\sin \vartheta + \operatorname{otg} \beta \operatorname{tg} \delta) \frac{w^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} \right]$
Obszar III ($\delta = 0$, $\xi = 1$)	Równanie (26)
	$A = \sin^2 \beta \left[\frac{1}{\cos \vartheta r_k} + \frac{\operatorname{otg}^2 \beta + \sin^2 \vartheta}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{otg}^2 \beta}{\partial r} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial \operatorname{otg} \beta}{\partial r} \right]$ $B = 2 \omega \sin \beta \cos \beta \cos \vartheta$ $C = \sin^2 \beta \left[- \frac{\partial h^*}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\xi w^2)}{\partial r} - \sin^2 \beta \sin \vartheta \frac{w^2}{2} \frac{\partial \xi}{\partial m} \right]$
Obszar IV ($\beta = 90^\circ$, $\delta = 0$, $\xi = 1$, $\xi = 0$)	Równanie (27)
	$A = \frac{1}{\cos \vartheta r_k} + \frac{\sin^2 \vartheta}{r} + \sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial \operatorname{otg} \beta}{\partial r}$ $B = 0$ $C = - \frac{\partial h^*}{\partial r}$

Wyprowadzone równania ważne są dla obszaru ABCD (rys. 3), przy czym warunki brzegowe są następujące:

- a) dany jest strumień masy \dot{m}_0 ,
- b) powierzchnie AC i BD są powierzchniami prądu,
- c) wzdłuż AB zadane są wszystkie parametry przepływu; muszą one spełniać równanie ciągłości,
- d) wzdłuż CD zadany jest rozkład kątów θ i krzywizny linii prądu,
- e) w obszarach I i II zadane są funkcje $\alpha_p, \beta_p, \delta, \tau, \xi, \omega$,
- f) w obszarach III zadane są funkcje $\alpha, \beta, \xi, \omega$.

Ścisłe określenie warunków brzegowych pod i za wieńcem (wieńcami) możliwe jest tylko w nieskończoności, z wykorzystaniem warunku $ro_u = \text{const}$ wzdłuż linii prądu. Sformułowane wyżej zagadnienie brzegowe, szczególnie przy niecyldrycznych ściankach układu przepływowego postawione jest więc z pewnym przybliżeniem, jednakże dla celów praktyki inżynierskiej całkowicie wystarczającym.

4. Metoda rozwiązania

Przedstawione w pracy równania stanowią układ nieliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych. Wybierając metodę ich rozwiązywania kierowano się tym, by optymalnie godziła ze sobą takie czynniki, jak: prosty sposób uzyskania rozwiązania, wymagania dokładności wyników, krótki czas obliczeń, możliwości maszyn cyfrowych w zakresie pojemności pamięci. Zaproponowana niżej metoda rozwiązania bazuje na koncepcji rozwiązywania równań różniczkowych "metodą prostych" [8]. Idea tej metody polega na tym że pochodne względem jednej ze zmiennych zastępuje się przybliżającymi je różnicami skończonymi, wartości których wyznacza się na podstawie poprzedniego przybliżenia. W ten sposób można przejść od równań o pochodnych cząstkowych do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Wyrażenia funkcyjne A, B, C stają się więc teraz funkcjami tylko współrzędnej promieniowej.

Ważnym momentem w procedurze obliczeniowej jest określenie kąta nachylenia oraz krzywizny linii prądu na podstawie wyników poprzedniego przybliżenia. Mając daną pewną liczbę dyskretnych wartości współrzędnych promieniowych linii prądu, które najczęściej obciążone są pewnymi błędami, należy określić funkcję aproksymującą (interpolującą), na której można wykonywać pewne operacje analityczne (obliczenie pierwszej i drugiej pochodnej) z rozsądną dokładnością. Spośród różnych metod, wiele zalet wydaje się mieć wygładzanie aproksymacją średniokwadratową [11].

Wzory podające wartości pochodnych w punkcie środkowym przy aproksymacji wielomianem algebraicznym trzeciego stopnia na podstawie pięciu punktów j -tej linii prądu przedstawiają się następująco:

$$r'_0 = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{2}{3} (r_{1j} - r_{-1j}) - \frac{1}{12} (r_{2j} - r_{-2j}) \right] \quad (28)$$

$$r''_0 = \frac{1}{\Delta z^2} \left[-\frac{2}{7} r_{0j} - \frac{1}{7} (r_{1j} + r_{-1j}) + \frac{2}{7} (r_{2j} + r_{-2j}) \right] \quad (29)$$

Kąt nachylenia i krzywiznę merydionalnej linii prądu wyznacza się ze wzorów

$$\vartheta = \arctg(r'_0); \quad \frac{1}{r_k} = \frac{r''_0}{(1 + r'^2_0)^{1.5}} \quad (30)$$

Dogodna dla celów obliczeń numerycznych postać równania (15) jest następująca:

$$\frac{d o_m}{dr} = - \left[A(r) o_m + B(r) + \frac{C(r)}{o_m} \right] = F(r, o_m)$$

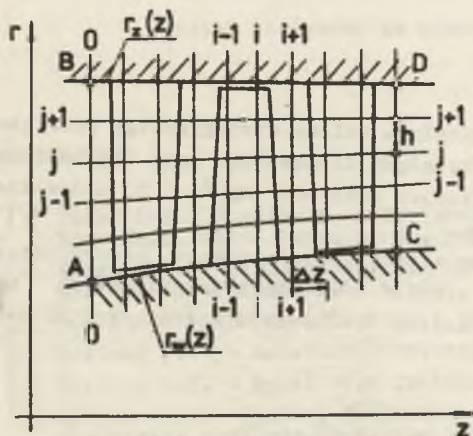
Sposób uzyskania rozwiązania przedstawiony zostanie przy zastosowaniu oalkowania metodą trapezów, chociaż z innych względów korzystniejsze okazać się może użycie innych metod numerycznych.

W wyniku oalkowania równania (31) pomiędzy węzłami r_j oraz r_{j+1} , według formuły trapezów uzyskuje się

$$o_{mj+1} = o_{mj} + \frac{h}{2} \left[F(r_j, o_{mj}) + F(r_{j+1}, o_{mj+1}) \right], \quad (32)$$

gdzie: $h = r_{j+1} - r_j$ (rys. 4) jest krokiem oalkowania, który określa się z równania ciągłości dokonując podziału całego strumienia masy \dot{m}_0 na odpowiednie strugi $\Delta \dot{m}$

$$\Delta \dot{m} = \pi \int h \left[(\rho o_m \cos \vartheta r)_j + (\rho o_m \cos \vartheta r)_{j+1} \right] \quad (33)$$



Rys. 4. Siatka układu współrzędnych

Uwzględniając powyższe, proces kolejnych przybliżeń przebiega następująco:

$$o_{m_{j+1}}^{(\mu+1)} = o_{m_j} + 0,5 h^{(\mu)} \left[F(r_j, o_{m_j}) + F(r_{j+1}^{(\mu)}, o_{m_{j+1}}^{(\mu)}) \right] \quad (34)$$

do momentu, gdy

$$\left| o_{m_{j+1}}^{(\mu+1)} - o_{m_{j+1}}^{(\mu)} \right| \leq \varepsilon_1(o_m), \quad (35)$$

gdzie: μ jest numerem przybliżenia a ε_1 zadaną małą wielkością.

Obliczenia prowadzi się w ten sposób, że w każdym kroku określa się $o_{m_{j+1}}$, h , r_{j+1} dla kolejnej linii prądu. Prędkość merydionalną o_{m0} na promieniu r_0 , będącą stałą całkowania, dobiera się z warunku, by ostatnia linia prądu z żadaną dokładnością pokrywała się ze współrzędną brzegu r_z , co zapisuje się jako

$$\left| r_z - r_0 - \sum_j h \right| < \varepsilon_2(r_z) \quad (36)$$

Analogicznie postępuje się wzdłuż wszystkich obranych prostych, prowadząc obliczenia w kierunku przepływu. W wyniku rozwiązania uzyskuje się nowe współrzędne linii prądu, co pozwala przystąpić do kolejnego przybliżenia.

Otrzymane pole prędkości pozwala w prosty sposób, przy pomocy równań (5), (6), wyznaczyć pole ciśnienia w całym obszarze przepływu.

Uwagi końcowe

Wyprowadzone w pracy równania przepływu osiowo-symetrycznego rozwiązują zagadnienie analizy przepływu w kanałach łopatkowych oraz przestrzeniach międzywieńcowych maszyn wirnikowych osiowych ($\text{tg } \phi < 1$) o dowolnej geometrii w przekroju merydionalnym.

Ze względu na obszerność problemu w niniejszym artykule przedstawiono metodę wyznaczania pól prędkości i ciśnień w układach przepływowych maszyn wirnikowych. W kolejnej pracy autora zreferowane zostaną wyniki obliczeń numerycznych.

Ważniejsze oznaczenia

- A, B, C - wyrażenie funkcyjne (równanie (15))
 \bar{F}_2 - siła masowa oddziaływania łopatek
 o, w - prędkość bezwzględna i względna
 \bar{F} - uśredniona siła tarcia (równanie (7))
 h^*, i^* - entalpia całkowita, entalpia całkowita
 p - ciśnienie
 r, φ, z - współrzędne w układzie cylindrycznym
 r_k - promień krzywizny merydionalnej linii prądu
 t - czas
 u - prędkość obwodowa, współrzędna obwodowa
 α, β - kąty położenia wektorów prędkości \vec{v} oraz \vec{w}
 α_p, β_p - kąty powierzchni S'_2 (łopatkowe) przy $r = \text{const}$
 ϑ - kąt nachylenia linii prądu do osi z
 δ - kąt nachylenia powierzchni S'_2 do kierunku promieniowego
 ϵ - współczynnik zwężenia przekroju przepływowego
 ξ - współczynnik strat przepływu.

Indeksy:

- i - dotyczy kolejnego punktu na j -tej linii prądu
 m - dotyczy kierunku wzdłuż merydionalnej linii prądu
 o - dotyczy wielkości na wlocie do układu przepływowego.

LITERATURA

- [1] Bammert K., Fiedler K. - Zur Auslegung von axialen thermischen Turbomaschinen. VDI-Z. 104, nr 36, 1962.
 [2] Bammert K., Fiedler K. - Die Strömung in axialen Turbomaschinen. Ingenieur Archiv 33, 1964.
 [3] Eckert B. - Sprężarki osiowe i promieniowe. PWT, Warszawa 1952.
 [4] Horlock J.H. - Axialkompressoren. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1967.
 [5] Horlock J.H. - Axial Flow Turbines. London 1966 (tłum. w j. ros.).
 [6] Makarow A.F. - Raschet prostranstwennowo tieczeniya zhidkosti w radialno-osiewoj turbinie. Mehanika Zhidkosti i gaza, nr 6, 1967.
 [7] Marsh H., Digital A. - Computer Program for the Through-flow Fluid Mechanics in an Arbitrary Turbomachine using a Matrix Method. Reports and Memoranda No. 3509, 1966.

- [8] Michlin D.G., Smolnicki C.L. - Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych, PWN, Warszawa 1970.
- [9] Novak R.A. - Streamline Curvature Computing Procedures for Fluid-Flow Problems. Trans. ASME, nr 4, 1967.
- [10] Otte J.J. - Równania przepływu płynu nieściśliwego w kanałach łopatkowych maszyn wirnikowych ZN Pol.Sl. Energetyka w. 53, 1975.
- [11] Otte J.J. - A Method of Analysis of Axial-Symmetric Flow in Blade Channels of Turbines. III Konferencja "Turbiny Parowe wielkiej mocy" Gdańsk 1974 (referat).
- [12] Ribaut M. - Three-Dimensional Calculation of Flow in Turbomachines With the Aid of Singularities. Trans. ASME. ser. A nr 3, 1968.
- [13] Sirotkin J.A. - K postanowkie prímaj zadaczi wíohriewowo teczénija szimajemój žídkostí w turbomaszínach. Inženiernyj Žurnál t. III. wyp. 2, 1963.
- [14] Sirotkin A.A. - Aerodinamíczeski ráschet łopatok osíewych turbomaszín. Izd. Maszínostrojenije, Moskwa 1972.
- [15] Stiepanow G.J. - Godrodinamíka reszetok turbomaszín, Moskwa 1962.
- [16] Traupel W. - Thermische Turbomaschinen. Springer Verlag-Berlin 1966.
- [17] Chung-Hua Wu - A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial Radial and Mixed - Flow Types. Trans. ASME No 8, 1952.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ В МЕЖЛОПАТОЧНЫХ КАНАЛАХ ОСЕВЫХ ТУРБОМАШИН

Резюме

В работе представлено метод анализа осесимметричного течения идеальной, несжимаемой жидкости в межлопаточных каналах осевых турбомашин. Рассматривается наиболее общий случай осесимметричного потока.

Вывод уравнений определяющих поток жидкости сделано в форме основанной на понятии "кривизны линий тока". Решение уравнений строится в полуфиксированной сетке "методом прямых".

DETERMINING OF THE VELOCITY AND PRESSURE
FIELD IN THE BLADE CHANNELS OF AXIAL TURBOMACHINES

S u m m a r y

The paper presents the method of analysing nonviscous and incompressible flow through spatially shaped blade to blade passages of axial turbomachines with the assumption of axial symmetry. The work considers a most general structure of the stream.

The equations of axisymmetric flow have been presented in a form based upon the notion of the "streamline curvature". They are important for any given geometry of the flow channel of a meridional cross-section.