

Stefan Postrzednik

Instytut Techniki Ciepłej

PRZEPIY W CIEPŁA PRZEZ PRZEGRODĘ O KSZTAŁCIE NAROŻA PROSTEGO^{x)}

Streszczenie. Dla układu o geometrii naroża prostego określono charakterystyczne strumienie ciepła w oparciu o wyznaczone współzależne pole temperatury w układzie. Rozwiązanie uzyskano przy zastosowaniu metod analitycznych.

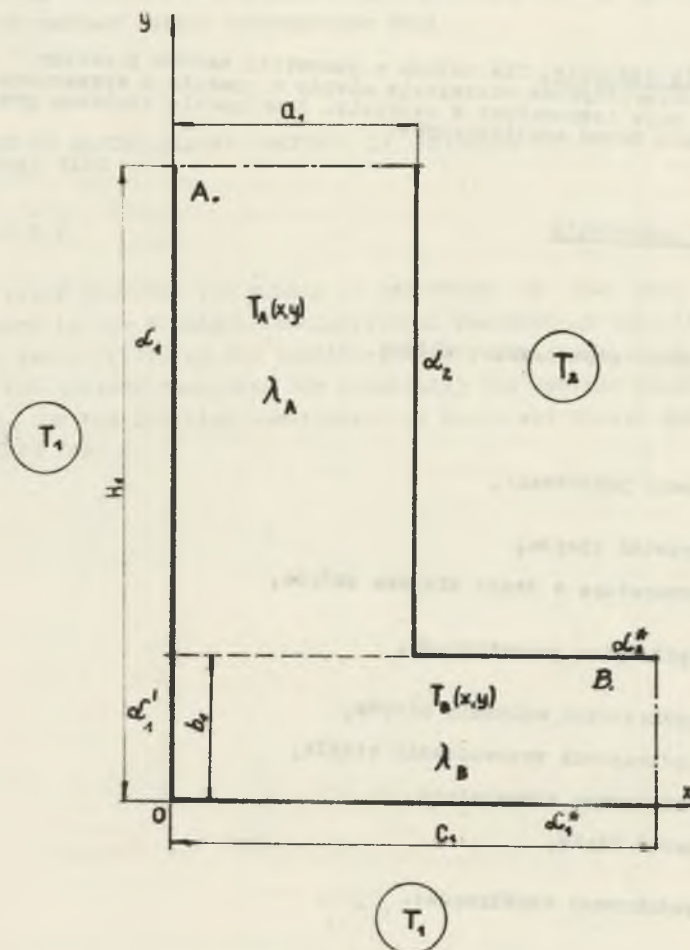
Ważniejsze oznaczenia

a_1	}	- wymiary geometryczne układu,
b_1		
o_1		
h_1		
Δ	}	- umowne podobszary,
B		
\dot{Q}		- strumień ciepła,
T		- temperatura w danym miejscu układu,
x	}	- współrzędne geometryczne,
y		
α		- współczynnik wnikania ciepła,
λ		- współczynnik przewodzenia ciepła,
θ		- zredukowana temperatura,
(Bi)		- liczba Biota,
ξ	}	- zredukowane współrzędne.
η		

^{x)}Praca wykonana przy współpracy z doc. dr hab. inż. T. Besem.

1. Wprowadzenie

W różnorodnych układach nieizotermicznych pole temperatury oraz przepływ ciepła tam występujący odgrywają istotną rolę. W pracy tej przedstawiono rozwiązania odpowiedniego zagadnienia brzegowego, dotyczącego pola temperatury w układzie o geometrii naroża prostego. Na rys. 1 przedstawiono schemat analizowanego układu z zaznaczeniem podstawowych wielkości geometrycznych i termicznych.



Rys. 1. Układ naroża prostego (A)

Uzyskane rozwiązanie dotyczy stanu ustalonego w dwuwymiarowym układzie współrzędnych geometrycznych. Po wykonaniu odpowiednich operacji matematycznych określono następnie pole strumieni ciepła w układzie oraz makrostrumienie przez ustalone powierzchnie kontrolne.

2. Zastosowana metoda rozwiązania

Stacjonarne pole temperatury, bez wewnętrznych źródeł ciepła w układzie, opisane jest rozwiązaniem równania różniczkowego Laplace'a przy uwzględnieniu odpowiednich warunków brzegowych. Ze względu na złożony kształt geometryczny obszaru zastosowano metodę polegającą na tym, że dzieląc go na dwa podobszary A i B (rys. 1), znajduje się najpierw rozwiązania częściowe w poszczególnych podobszarach układu. Rozwiązania te, po wykorzystaniu przynależnych do danego podobszaru zewnętrznych warunków brzegowych, wyznaczone są z dokładnością do pewnych zespołów stałych. Stałe te wyznacza się następnie w oparciu o dodatkowe warunki brzegowe IV rodzaju, wynikające z "zszywania" rozwiązań na granicach podobszarów. Stanowią one: równość temperatur oraz równość strumienia ciepła [1] wzdłuż granicy podziału ($\eta = b$, $0 \leq \xi \leq a$). W rozwiązaniu wykorzystany został ortogonalny zbiór funkcji własnych. Otrzymany w ten sposób podwójnie nieskończony układ algebraicznych równań liniowych został następnie rozwiązany metodą odwracania macierzy. Do konkretnych obliczeń bierze się oczywiście skończoną ilość wyrazów macierzy.

3. Wielkości zredukowane

Dla uproszczenia zapisu oraz lepszej organizacji obliczeń wprowadzono podane niżej wielkości zredukowane (rys. 2):

- współrzędne i parametry geometryczne

$$\xi = \frac{x}{a_1}; \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1)$$

$$\eta = \frac{y}{b_1}; \quad 0 < \eta < H; \quad H = \frac{H_1}{a_1}; \quad a = \frac{a_1}{a_1}; \quad b = \frac{b_1}{a_1}$$

- temperatury

$$\theta_A(\xi, \eta) = \frac{T_A(x, y) - T_1}{T_2 - T_1}; \quad \theta_B(\xi, \eta) = \frac{T_B(x, y) - T_1}{T_2 - T_1} \quad (2)$$

$$0 < \theta_A \leq 1; \quad 0 < \theta_B \leq 1$$

- liczby (Bi)

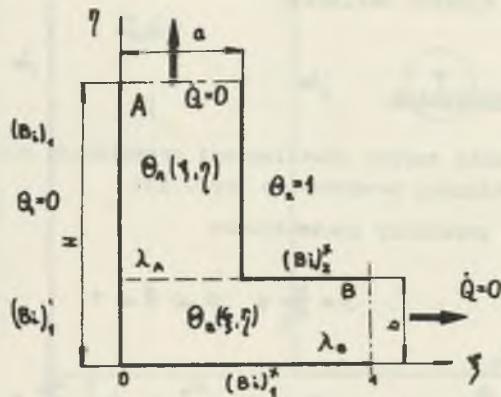
$$(Bi)_1 = \frac{\alpha_1 c_1}{\lambda_A}; \quad (Bi)_1^* = \frac{\alpha_1^* c_1}{\lambda_B}; \quad (Bi)_1' = \frac{\alpha_1' c_1}{\lambda_B} \quad (3)$$

$$(Bi)_2 = \frac{\alpha_2 c_1}{\lambda_A}; \quad (Bi)_2^* = \frac{\alpha_2^* c_1}{\lambda_B}$$

- strumienie ciepła

$$\dot{Q}_1 = \frac{\dot{Q}_{w.1}}{\lambda_A (T_2 - T_1)} \quad (4)$$

Ponadto uwzględniono różne przewodności materiału w części A i B, co wyraża stosunek (λ_A / λ_B) .



Rys. 2. Układ naroża prostego (B)

4. Sformułowanie zagadnienia

Szukane pole temperatury dla naroża prostego stanowi rozwiązanie następującego zagadnienia brzegowego:

- dla podobozaru A

a) równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 \theta_A(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_A(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5)$$

b) warunki brzegowe zewnętrzne:

$$\frac{\partial \theta_A}{\partial \xi} = (B1)_1 \theta_A, \quad \text{dla} \quad \xi = 0, \quad b \leq \eta \leq H \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta_A}{\partial \xi} = -(B1)_2 (\theta_A - 1) \quad \text{dla} \quad \xi = a, \quad b \leq \eta \leq H \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta_A}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq \xi < a, \quad \eta = H \quad (8)$$

- dla podobszaru B

a) równanie różniczkowe:

$$\frac{\partial^2 \theta_B(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_B(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0 \quad (9)$$

b) warunki brzegowe zewnętrzne:

$$\frac{\partial \theta_B}{\partial \xi} = (B1)'_1 \theta_B, \quad \text{dla} \quad \xi = 0, \quad c \leq \eta \leq b \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta_B}{\partial \xi} = 0, \quad \text{dla} \quad \xi = 1, \quad 0 \leq \eta < b \quad (11)$$

$$\frac{\partial \theta_B}{\partial \eta} = (B1)^*_1 \theta_B, \quad \text{dla} \quad 0 \leq \xi < 1, \quad \eta = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta_B}{\partial \eta} = -(B1)^*_2 (\theta_B - 1), \quad \text{dla} \quad a \leq \xi \leq 1, \quad \eta = b \quad (13)$$

Dodatkowe warunki brzegowe IV rodzaju na granicy podobszarów zapisuje się

$$a) \quad \theta_A(\xi, \eta) = \theta_B(\xi, \eta), \quad \text{dla} \quad 0 \leq \xi \leq a, \quad \eta = b \quad (14)$$

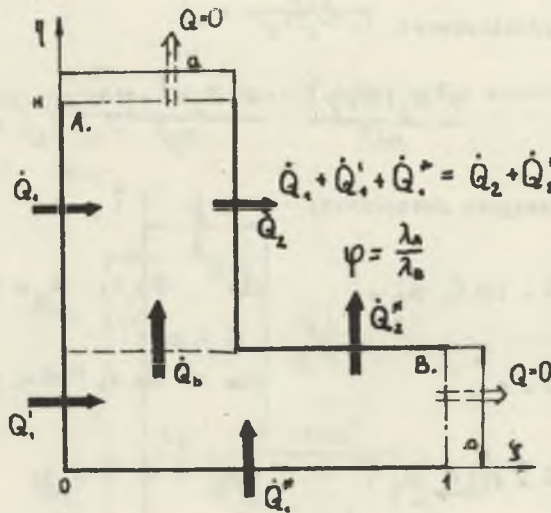
$$b) \quad \frac{\partial \theta_A}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B} \right) = \frac{\partial \theta_B}{\partial \eta}, \quad \text{dla} \quad 0 \leq \xi \leq a, \quad \eta = b \quad (15)$$

Równania (14) i (15) odgrywają właśnie główną rolę w procesie "zszywania" rozwiązań podobszarów.

Charakterystyczne strumienie ciepła w układzie zaznaczone zostały na rys. 3, a obliczać je należy według poniższych formuł:

$$\dot{Q}_1 = \int_b^H \frac{\partial \theta_A(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\eta = (Bi)_1 \int_b^H \theta_A(\xi, \eta) \Big|_{\xi=0} d\eta \quad (16)$$

$$\dot{Q}'_1 = \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right) \int_0^b \frac{\partial \theta_B(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\eta = (Bi)'_1 \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right) \int_0^b \theta_B(\xi, \eta) \Big|_{\xi=0} d\eta \quad (17)$$



Rys. 3. Strumienie ciepła w układzie

$$\dot{Q}'_1 = \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right) \int_0^1 \frac{\partial \theta_B(\xi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\xi = (Bi)'_1 \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right) \int_0^1 \theta_B(\xi, \eta) \Big|_{\eta=0} d\xi \quad (18)$$

$$\dot{Q}_2 = \int_b^H \frac{\partial \theta_A(\xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} d\eta = - (Bi)_2 \int_b^H [\theta_A(\xi, \eta) - 1] \Big|_{\xi=1} d\eta \quad (19)$$

$$\dot{Q}_2^* = \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right) \int_a^1 \frac{\partial \theta_B(\xi, \eta)}{\partial \eta} /_{\eta=b} d\xi = -(Bi)_2^* \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right) \int_a^1 [\theta_B(\xi, \eta) - 1] /_{\eta=b} d\xi \quad (20)$$

$$\dot{Q}_b = \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right) \int_0^a \frac{\partial \theta_A(\xi, \eta)}{\partial \eta} /_{\eta=b} d\xi = \int_0^a \frac{\partial \theta_B(\xi, \eta)}{\partial \eta} /_{\eta=b} d\xi \quad (21)$$

Równania

$$\dot{Q}_b = \dot{Q}_2 - \dot{Q}_1, \quad \dot{Q}_b = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_1^* - \dot{Q}_2^* \quad (22)$$

$$\dot{Q}_1 + \dot{Q}_1^* + \dot{Q}_1^* - \dot{Q}_2 - \dot{Q}_2^* = 0,$$

będące równaniami bilansu energii odpowiednich podobszarów i całego układu mogą ułatwić obliczenie niektórych wielkości lub też stanowić kryterium sprawdzające dokładność obliczeń. Na tej podstawie, przyjmując dokładność wyniku np. 1%, można było ustalić niezbędną ilość wyrazów szeregu.

5. Rozwiązanie problemu brzegowego

Celem wyznaczenia funkcji $\theta_A(\xi, \eta)$, $\theta_B(\xi, \eta)$ wykorzystuje się w pierwszej kolejności metodę Fouriera rozdzielania zmiennych do podanego układu równań różniczkowych. Jest to rzecz znana, klasyczna i dlatego kolejne kroki postępowania w ujęciu tej pracy nie muszą być przedstawione. Aby jednak zagadnienie mogło być rozwiązane do końca, istotną rzeczą jest odpowiednie skonstruowanie postaci poszczególnych wyrazów szeregów będących rozwiązaniem. Chodzi mianowicie o ortogonalizację funkcji w określonych przedziałach zmienności. Każde tego typu zagadnienie brzegowe jest problemem samym w sobie i wymaga indywidualnego oryginalnego podejścia [1].

W przypadku przegrody o kształcie naroża prostego należy zauważyć, że z uwagi na warunek (14) funkcje w szeregu dla $\theta_A(\xi, \eta)$ muszą być ortogonalne w obszarze $0 \leq \xi \leq a$, tzn.

$$\int_0^a F_n^A(\xi) \cdot F_m^A(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ S_n^A \neq 0, & n = m \end{cases}$$

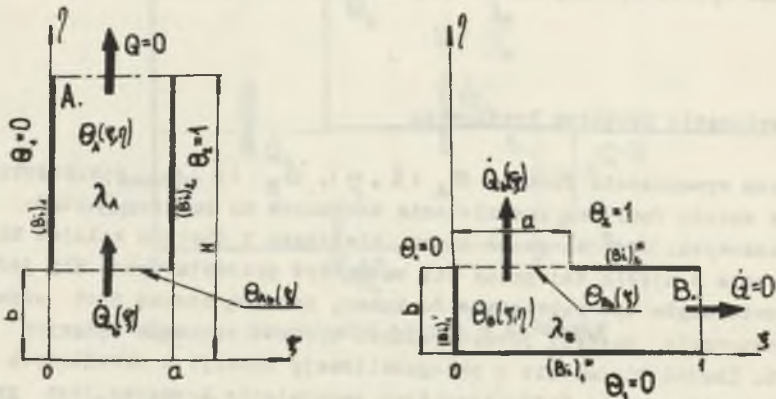
zaś dla funkcji $\theta_B(\xi, \eta)$ ortogonalne w przedziale $0 < \xi \leq 1$, tzn.

$$\int_0^1 F_n^B(\xi) \cdot F_m^B(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ S_n^B \neq 0, & n = m \end{cases}$$

przy czym ostatnią właściwość funkcji trzeba wykorzystać z warunkami (15) i (13) łącznie. Stosując omówioną metodę rozwiązania zagadnienia brzegowego, zobrażowaną dodatkowo na rys. 4, uzyskano:

- dla podobszaru A

$$\theta_A(\xi, \eta) = E + E_0 \frac{a - \xi}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\eta) \frac{\cos(v_j \xi) + \frac{(B1)_1}{v_j} \sin(v_j \xi)}{\cos(v_j a) + \frac{(B1)_1}{v_j} \sin(v_j a)} \quad (23)$$



Rys. 4. Ilustracja metody rozwiązania zagadnienia

gdzie

$$E_j(\eta) = E_j(b) \frac{\operatorname{ch} [v_j (H - \eta)]}{\operatorname{ch} [v_j (H - b)]},$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

(24)

$$E = \frac{B(1+A)}{A+B+AB}, \quad E_0 = \frac{-AB}{A+B+AB},$$

$$A = (Bi)_1 a, \quad B = (Bi)_2 a \quad (25)$$

- dla podobszaru B

$$\Theta_B(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(\eta) \cos[\mu_i(1-\xi)], \quad (26)$$

gdzie:

$$F_i(\eta) = F_1(b) \left\{ \frac{\mu_i}{\operatorname{sh}(\mu_i b) [(Bi)_1 + \mu_i]} \frac{\operatorname{sh}[\mu_i(b-\eta)]}{\operatorname{sh}[\mu_i b]} + \frac{\operatorname{sh}(\mu_i \eta)}{\operatorname{sh}(\mu_i b)} \right\}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Wartości własne μ_i oraz v_j obliczać należy z następujących równań:

$$\mu_i \operatorname{tg}(\mu_i) = (Bi)_1', \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

$$[(Bi)_1 - v_j \operatorname{tg}(v_j a)] + (Bi)_2 \left[1 + \frac{(Bi)_1}{v_j} \operatorname{tg}(v_j a) \right] = 0$$

$$j = 1, 2, 3, \dots,$$

którego rozwiązanie zobrazowano na rys. 5.

Podwójnie nieskończony układ współczynników

$$E_j(b), \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

oraz

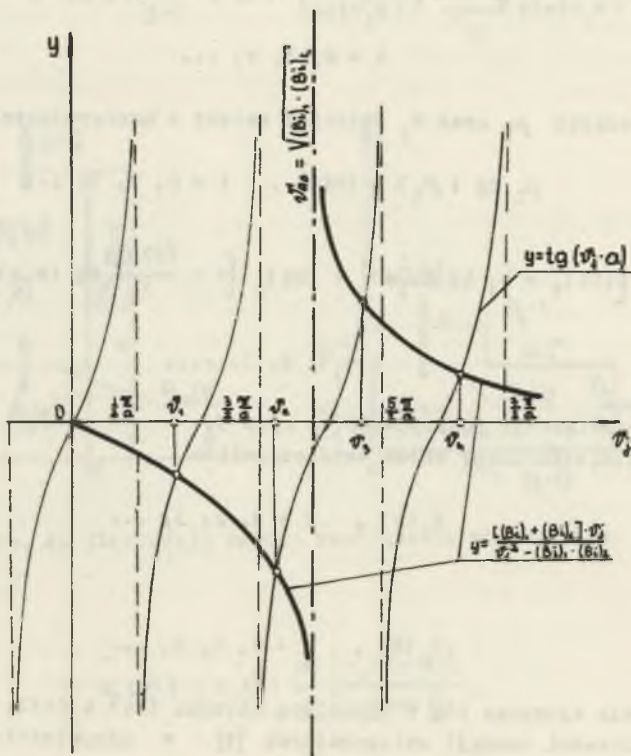
$$F_1(b), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

rozwiązania wyznacza się w oparciu o warunki (14) i (15), przy wykorzystaniu własności funkcji ortogonalnych [1] w odpowiednich przedziałach

zmiennosci. Uzyskuje się wtedy następujący, podwójnie nieskończony lecz liniowy układ równań algebraicznych

$$1. \quad f_k N_k F_k(b) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j A_{jk} E_j(b) - (B1)_2^* \sum_{j=0}^{\infty} B_{jk} F_j(b) + (B1)_2^* C_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

$$2. \quad V_j E_j(b) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{ji} F_i(b) - D_j \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$



Rys. 5. Wartości własne równania

gdzie:

$$f_k = - \frac{\mu_1^2}{\text{sh}^2(\mu_1 b) [(Bi)_1 + \mu_1]} + \mu_1 \text{oth}(\mu_1 b) \quad (31)$$

$$e_j = -v_j \text{th}[v_j(H-b)] \quad (32)$$

$$N_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{\sin(2\mu_k)}{\mu_k} \quad (33)$$

$$B_{1,k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(\mu_1 - \mu_k)(1-a)]}{\mu_1 - \mu_k} + \frac{\sin[(\mu_1 + \mu_k)(1-a)]}{\mu_1 + \mu_k} \right\} \quad (34)$$

$$A_{j,k} = \frac{1}{2} \frac{[(v_j - \mu_k) \{v_j (\sin[(v_j + \mu_k)a - \mu_k] - \sin \mu_k) + (Bi)_1 (\cos \mu_k - \cos [(v_j + \mu_k)a - \mu_k])\} + (v_j + \mu_k) \{v_j (\sin[(v_j - \mu_k)a + \mu_k] - \sin \mu_k) + (Bi)_1 (\sin \mu_k - \cos [(v_j - \mu_k)a + \mu_k])\}]}{(v_j^2 - \mu_k^2) [v_j \cos(v_j a) + (Bi)_1 \sin(v_j a)]} \quad (35)$$

$$C_k = \frac{1}{\mu_k} \sin[\mu_k(1-a)] \quad (36)$$

$$v_j = \frac{1}{4} \frac{2a [v_j^2 + (Bi)_1^2] + v_j \sin(2v_j a) + 4(Bi)_1 \sin^2(v_j a) \left[\frac{(Bi)_1}{2v_j} + 1 \right]}{[v_j \cos(v_j a) + (Bi)_1 \sin(v_j a)]^2} \quad (37)$$

$$D_j = \frac{(E+E_0) \left\{ \sin(v_j a) - \frac{(Bi)_1}{v_j} [\cos(v_j a) - 1] \right\} - \frac{E_0}{a} \left\{ \frac{\cos(v_j a) - 1}{v_j} + a \sin(v_j a) \right\} + \frac{(Bi)_1}{v_j} \left[\frac{\sin(v_j a)}{v_j} - a \cos(v_j a) \right]}{v_j \cos(v_j a) + (Bi)_1 \sin(v_j a)} \quad (38)$$

Układ równań (29), (30) można, po wykonaniu obszernych przekształceń i odpowiednich operacji matematycznych, sprowadzić do układu

$$\sum_{i=0}^{\infty} G_{k,i} F_i(b) = H_k \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

z którego oblicza się

$$F_i(b) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k G_{i,k}^{-1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (40)$$

a następnie

$$E_j(b) = \frac{1}{V_j} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} A_{j,i} F_i(b) - D_j \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (41)$$

gdzie

$$G_{i,k} = \begin{cases} \bar{G}_{i,k} & , \quad \text{dla } i \neq k \\ \bar{G}_{i,k} - \tau_k N_k & , \quad \text{dla } i=k \end{cases} \quad (42)$$

oraz

$$\bar{G}_{i,k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_1 A_{j,k} A_{j,i}}{V_j} - (B1)_2^* B_{i,k} \quad (43)$$

$$H_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_1 A_{j,k}}{V_j} D_j - (B1)_2^* C_k \quad (44)$$

Funkcje (23), (24), (26), (27) oraz zespół stałych (40), (41) opisują jednoznacznie pole temperatury w układzie. W oparciu o to rozwiązanie można określić bliżej, podane równaniami od (16) do (21), odpowiednie strumienie ciepła. Po wykonaniu wskazanych operacji matematycznych uzyskuje się wzory:

$$\dot{Q}_1 = (B1)_1 \left\{ (E-E_0)(H-b) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E_1(b) \operatorname{sh}[v_j(H-b)]}{\operatorname{oh}[v_j(H-b)] \left[\cos(v_j a) + \frac{(B1)_1}{V_j} \sin(v_j a) \right] v_j} \right\} \quad (45)$$

$$\dot{Q}'_1 = \frac{\lambda}{\lambda_B} (B1)'_1 \sum_{i=0}^{\infty} F_1(b) \left[\frac{\operatorname{ch}(\mu_1 b) - 1}{\operatorname{sh}^2(\mu_1 b) [(B1)'_1 + \mu_1]} + \frac{\operatorname{ch}(\mu_1 b) - 1}{\operatorname{sh}(\mu_1 b) \mu_1} \right] \cos \mu_1 \quad (46)$$

$$\dot{Q}^*_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda_B} \right) (B1)^*_1 \sum_{i=0}^{\infty} F_1(b) \frac{\sin \mu_1}{\operatorname{sh}(\mu_1 b) [(B1)^*_1 + \mu_1]} \quad (47)$$

$$\dot{Q}^*_2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda_B} \right) (B1)^*_2 \left[(1-a) - \sum_{i=0}^{\infty} F_1(b) \frac{\sin [\mu_1 (1-a)]}{\mu_1} \right] \quad (48)$$

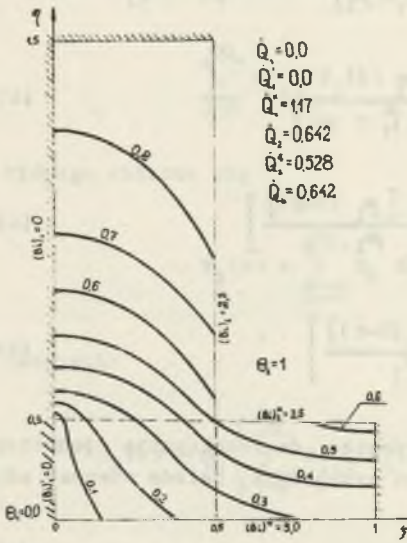
$$\dot{Q}_2 (B1)_2 \left[(H-b) (1-E) - \sum_{j=1}^{\infty} E_j(b) \frac{\operatorname{th} [\nu_j (H-b)]}{\nu_j} \right] \quad (49)$$

Powyższe rozwiązanie można wykorzystać również do rozwiązania podobnego zagadnienia lecz z nieco innymi warunkami brzegowymi; należy wówczas odpowiednio przyjmować wartości liczb $(B1)$.

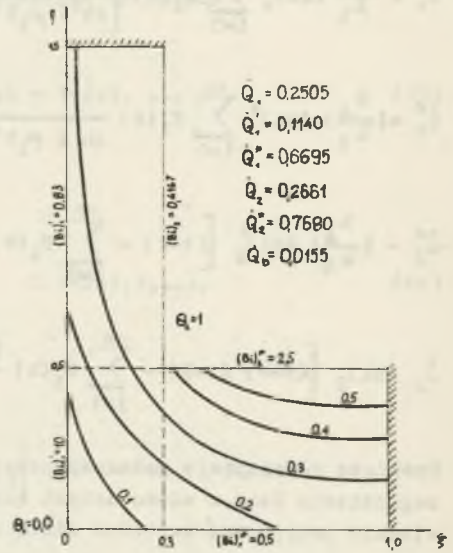
6. Przykładowe pola temperatur i strumienie ciepła w układzie naroża prostego

Dla ilustracji i sprawdzenia uzyskanego rozwiązania analitycznego wykonano szereg obliczeń przy użyciu odpowiedniego programu na EMC. Przyjęte dane oraz uzyskane wyniki zostały przedstawione na kolejnych wykresach - rys. 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

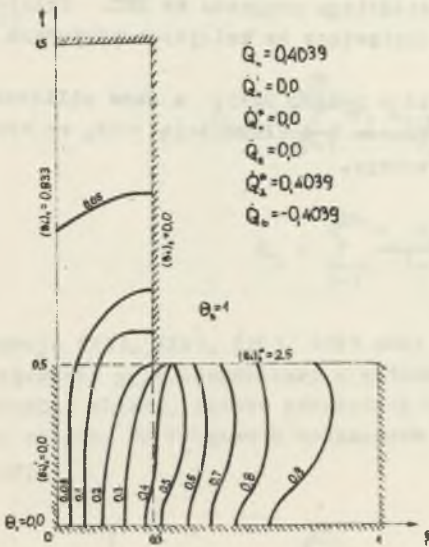
Program obliczeniowy napisany został w języku SAKO, a same obliczenia wykonano na EMC ZAM-41. Obliczenia wykonano z dokładnością $\sim 1\%$, co wymagało uwzględnienia około 15 wyrazów szeregu.



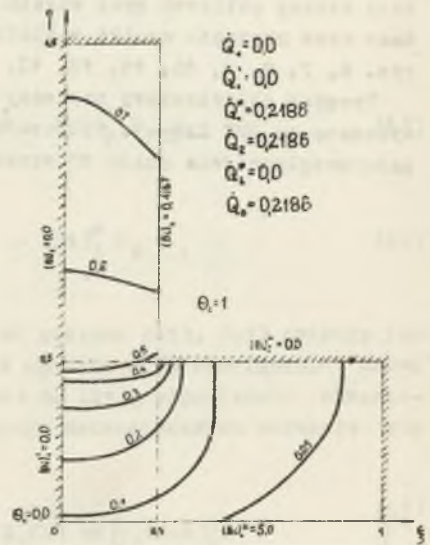
Rys. 6. Pole temperatury w układzie (A)



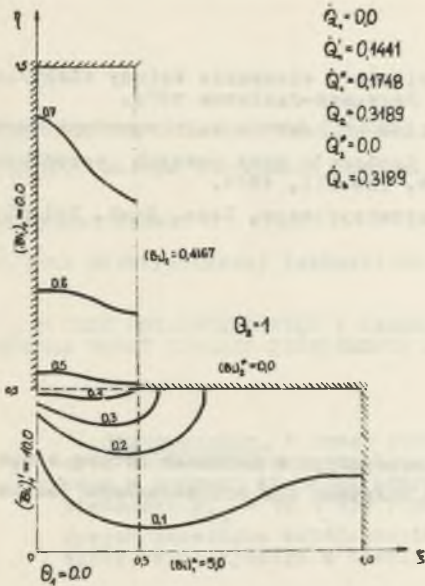
Rys. 7. Pole temperatury w układzie (B)



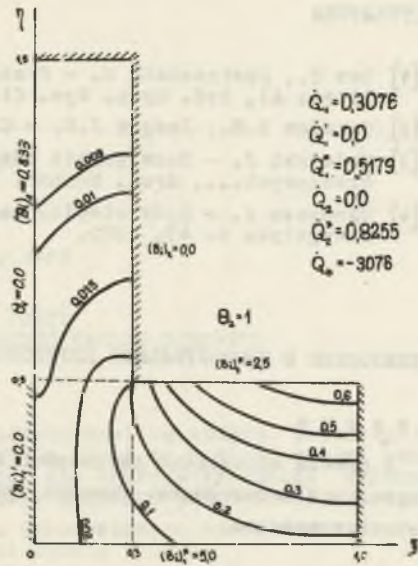
Rys. 8. Pole temperatury w układzie (C)



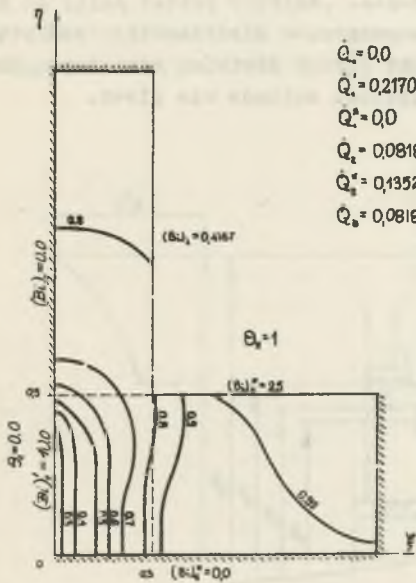
Rys. 9. Pole temperatury w układzie (D)



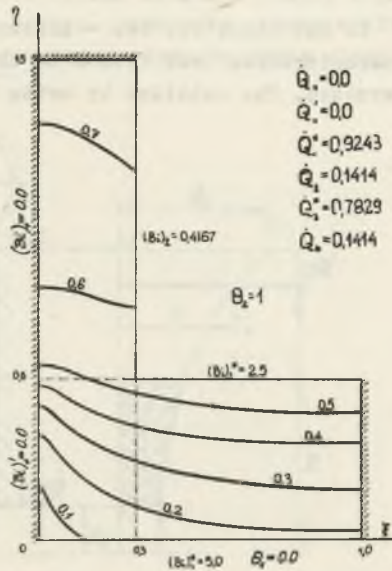
Rys. 10. Pole temperatury w układzie (E)



Rys. 11. Pole temperatury w układzie (F)



Rys. 12. Pole temperatury w układzie (G)



Rys. 13. Pole temperatury w układzie (H)

LITERATURA

- [1] Bes T., Postrzednik S. - Przepływ ciepła w elemencie katody elektrolizera Al, Ref. Symp. Wym. Ciepła, Warszawa-Jabłonna 1974.
- [2] Carslaw H.S., Jaeger J.C. - Conduction of heat in solids, Oxford 1959.
- [3] Madejski J. - Rozwiązanie równania Laplace'a przy pewnych warunkach brzegowych..., Arch. Mechan. Stosow. Tom III, 1951.
- [4] Wandrasz J. - Opór cieplny naroża symetrycznego, Zesz. Nauk. Pol. Śl. Energetyka z. 45, 1972.

ТЕПЛОБМЕН В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕРЕГОРОДКЕ

Р е з ю м е

В статье определено двухмерное поле температуры и тепловые потоки в прямоугольной перегородке. Решение проблемы получено при использовании аналитических методов.

HEAT TRANSFER THROUGH THE STRAIGHT CORNER DIVISION

S u m m a r y

In the paper the two - dimensional temperature distribution and the characteristic heat fluxes in the straight corner division have been determined. The solution by using the analytical methods was given.