ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: ENERGETYKA z.57 Nr kol.493

Stanisław Jerzy GDULA
Instytut Techniki Cieplnej

PIERWIASTKI RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNEGO DLA NIEUSTALONEGO, SYMETRYCZNEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA W PŁYCIE

Streszczenie. Problem wyznaczenia pierwiastków równania przestępnego (1) sprowadzono do problemu rozwiązania równania różniczkowego (4) lub (5), przy warunku brzegowym (6). Rozwiązanie to może mieć postać szeregu (7), którego współczynniki określają równania (8) - (15).

Analityczne rozwiązywanie symetrycznych zagadnień przewodzenia ciepła w płycie, długim pręcie prostokątnym i w sześcianie doprowadza do rozwiązania w postaci szeregu, będącego rozwinięciem funkcji opisującej poszukiwane pole temperatury względem ortogonalnego układu funkcji $\cos \mu_k x$. Współczynniki μ_k są wartościami własnymi związanego z tym problemem zagadnienia Sturma-Liouville'a i spełniają równanie

$$\mu \operatorname{tg} \mu = \mathrm{Bi}, \tag{1}$$

gdzie $\mathrm{Bi} = \alpha d/\lambda$ jest liczbą Biota charakteryzującą warunek brzegowy III rodzaju, wynikający z konwekcyjnej wymiany ciepła na powierzchni ciała przewodzącego ciepło. Przy ręcznych obliczeniach sumy szeregu korzysta się zwykle z tablic (np. [3]) podających zależność wartości własnych od liczby Biota i od wskaźnika k

$$\mu_k = \mu_k(\mathrm{Bi}) = \mu(k,\mathrm{Bi}). \tag{2}$$

Przy obliczeniach komputerowych ten sposób postępowania jest co najmniej niedogodny a niekiedy wręcz niemożliwy. Wiąże się to bowiem z wczytywaniem do pamięci komputera dużej porcji danych liczbowych oraz z koniecznością ich wyszukiwania i interpolacji. Przy tym wszystkim tablice podają tylko kilka pierwszych wartości własnych, co w niektórych przypadkach nie wystarcza.

Obliczanie wartości własnych drogą rozwiązania równania przestępnego (1) metodami przybliżonymi [2] daje możliwość uzyskania dowolnej dokładności i uzyskania dowolnie wysokiego wskaźnika k, wiąże się jednak z dużym zużyciem czasu komputerowego, co wynika z konieczności stosowania procedur iteracyjnych.

Pierwszą próbą analitycznego przedstawienia zależności wartości własnej od wskaźnika k i od liczby Biota Bi jest praca [1], w której dla kolejnych k = 1(1)10 podano wielomiany aproksymujące najlepiej, w sensie Czebyszewa, zależność od liczby Biota. Aproksymowano dane liczbowe uzyskane z przybliżonego rozwiązania równania przestępnego (1). Wadą tej aproksymacji jest ograniczoność wskaźnika k oraz ograniczona dokładność.

Prezentowana w niniejszej pracy metoda umożliwia wyznaczenie wartości własnych dla dowolnego wskaźnika k, z dowolną dokładnością. Idea metody polega na sprowadzeniu równania przestępnego (1) do równania różniczkowego. W tym celu różniczkujemy je względem Bi

$$\left(\mathrm{tg}\mu + \mu \frac{1}{\cos^2\mu}\right) \frac{d\mu}{dBi} = 1 . \tag{3}$$

Postać zróżniczkowaną (3) kojarzymy z samym równaniem, podstawiając

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{Bi}{\mu} ,$$

$$\frac{1}{\cos^2\mu} = 1 + \mathrm{tg}^2\mu = 1 + \frac{Bi^2}{\mu^2} .$$

Po podstawieniu i przekształceniu otrzymujemy

$$\frac{d\mu}{d\,Bi} = \frac{\mu}{Bi^2 + Bi + \mu^2} , \tag{4}$$

Wygodniej jest operować kwadratem wartości własnej μ^2, zastępując równanie (4) równoważnym mu

$$\frac{d(\mu^2)}{d\,Bi} = \frac{2\mu^2}{Bi^2 + Bi + \mu^2} . \tag{5}$$

Równaniom (4) i (5) towarzyszy warunek brzegowy wynikający z faktu,że dla Bi = 0 (zagadnienie brzegowe II rodzaju dla przewodzenia ciepła) wartości własne są odpowiednimi krotnościami $\pi/2$

$$\text{dla } Bi = 0 \qquad \mu = \mu_{ko} = (k-1)\frac{\pi}{2} . \tag{6}$$

Łatwo zauważyć, że równanie różniczkowe jest wspólne dla wszystkich wartości własnych, a zależność od numeru k wartości własnej tkwi w warunku brzegowym.

Rozwiązanie równania różniczkowego (4) może być przedstawione w postaci szeregu

$$\mu_k^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k)\, Bi^n . \tag{7}$$

Współczynniki szeregu obliczamy z następujących równań

dla $k = 1$
$$a_o = 0 \tag{8}$$
$$a_1 = 1 \tag{9}$$
$$a_2 = -\frac{1}{3} \tag{10}$$
$$a_n = \frac{1}{1-2n}\left[\sum_{i=2}^{n-1} i\, a_i a_{1+n-i} + (n-1)a_{n-1}\right] \tag{11}$$

dla $k > 1$
$$a_o = \mu_{ko}^2 = \left[(k-1)\frac{\pi}{2}\right]^2 \tag{12}$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = -\frac{1}{a_o} \tag{13}$$
$$a_n = -\frac{1}{na_o}\left[\sum_{i=1}^{n-1} i\, a_i a_{n-i} + (n-2)a_{n-2} + (n+3)a_{n-1}\right]. \tag{14}$$

Rozwinięcie (7) potwierdza znane asymptotyczne przedstawienie pierwszej wartości własnej
$$\mu_1^2 = \mathrm{Bi}, \tag{16}$$
słuszne dla małych liczb Biota. Lepsze przybliżenie daje następująca suma częściowa
$$\mu_1^2 = \mathrm{Bi} - \frac{1}{3}\mathrm{Bi}^2 + \frac{4}{45}\mathrm{Bi}^3 . \tag{17}$$

Równanie różniczkowe (5), przy warunku brzegowym (6), może być również rozwiązane numerycznie, np. metodą Runge-Kutta. Ten sposób rozwiązania jest szczególnie dogodny wtedy, gdy obliczamy wartości własne dla wielu liczb Biota, np. przy tablicowaniu funkcji (2) lub w przypadku stosowania metod iteracyjnych do rozwiązywania problemu przewodzenia ciepła przy zmiennej liczbie Biota.

LITERATURA

[1] Epsztejn M.S. - Czebyszewskaja polinominalnaja approksimacija korniej transcendentnogo urawnienija $\mu tg\mu$= b. Inż.Fiz.Żurn. 20, 2 s.347-348, 1971 r.

[2] Grigoriew L.J., Mankowskij O.N. - Inżeniernyje zadaczi niestacionarnogo tiepłoobmiena."Energija", Moskwa 1968.
[3] Łykow A.W. - Tieorija tiepłoprowodnosti. "Wysszaja Szkoła", Moskwa 1967 r.

КОРНИ УРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРНОГО ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЛАСТИНЕ

Р е з ю м е

Проблема определения корней трансцендентного уравнения (1) сведена к проблеме решения дифференциального уравнения (4) или (5) при начальном условии (6). Это решение может иметь вид ряда (7), которого коэффицжетны определяют уравнения (8) - (15).

THE ROOTS OF A CHARACTERISTIC EQUATION FOR SYMMETRIC TRANSIENT HEAT FLOW IN AN INFINITE PLATE

S u m m a r y

In the paper the problem of roots calculation of the transcedental equation (1) has been resolved to the problem of the solution of a differential equation (4) or (5) with an initial condition (6).

This solution may be in a form of series (7), the coefficients of which define the equations (8)-(15).