ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976
Seria: ENERGETYKA z.57 Nr kol. 493

Stanisław Jerzy GDULA
Instytut Techniki Cieplnej

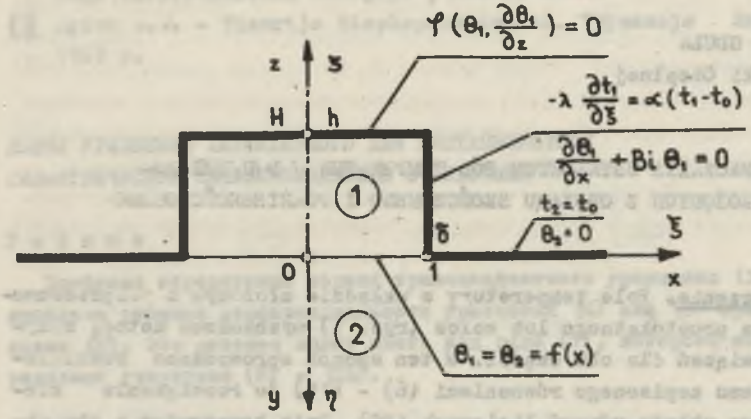
ANALITYCZNE WYZNACZANIE USTALONYCH PÓL TEMPERATUR W DWUWYMIAROWYCH UKŁADACH ZŁOŻONYCH Z OBSZARU SKOŃCZONEGO I PÓŁNIESKOŃCZONEGO

Streszczenie. Pole temperatury w układzie złożonym z półprzestrzeni i pręta prostokątnego lub walca (rys. 1) wyznaczono metodą zszywania rozwiązań dla obu części. W ten sposób sprowadzono rozwiązanie problemu zapisanego równaniami (6) - (15) do rozwiązania nieskończonego układu równań liniowych (45). Pola temperatur w obu obszarach wyrażają się za pomocą równań (37) i (43). Przedstawiona metoda może być stosowana do wyznaczania strat ciepła do gruntu pieców przemysłowych.

Metody zszywania rozwiązań są często stosowane do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła i innych zagadnień brzegowych fizyki matematycznej w układach złożonych z obszarów skończonych (por. np. [1]). W niniejszej pracy zastosowano jedną z realizacji tej metody do przypadku, gdy jeden z podukładów układu złożonego jest półprzestrzenią. Zagadnienia tego typu występują np. przy obliczaniu strat ciepła do gruntu pieców posiadających masywne elementy ustawione na gruncie (np. trzon wielkiego pieca). Konieczne jest wówczas oczywiście założenie, że współczynnik przewodzenia ciepła fundamentu zanurzonego w gruncie jest bliski wartości tego współczynnika dla gruntu. Ponadto przyjmujemy następujące założenia:

- temperatura powierzchni gruntu na zewnątrz elementu "doczepionego" do gruntu jest równa temperaturze otoczenia,
- na powierzchni bocznej tego elementu (np. trzonu pieca) odbywa się wymiana ciepła drogą konwekcji, ze stałym współczynnikiem wnikania ciepła (warunek brzegowy III rodzaju),
- na powierzchni górnej elementu (równoległej do gruntu) zachodzi wymiana ciepła opisana liniowym warunkiem brzegowym I, II, III lub IV rodzaju,
- współczynniki przewodzenia ciepła w obu podobszarach są stałe.

W zakresie geometrii rozpatrywanych układów ograniczymy się do przypadków, gdy podobszar skończony ma kształt długiego pręta o przekroju prostokątnym (parametr w operatorze Laplace'a $r = 0$) lub walca ($r = 1$). W przekroju ilustruje to rys. 1. Gdy pręt prostokątny jest dostatecznie dłu-



Rys. 1. Przekrój układu złożonego

gi i na całej jego powierzchni bocznej panują takie same warunki brzegowe, a walec charakteryzuje się osiową symetrią warunków brzegowych, to w obu rozpatrywanych przypadkach pole temperatury jest dwuwymiarowe.

Dla uproszczenia zapisu wprowadzamy następujące zmienne bezwymiarowe:

- zredukowana temperatura

$$\theta = \frac{t - t_0}{\Delta t}, \tag{1}$$

gdzie t_0 jest temperaturą otoczenia, Δt - charakterystyczną różnicą temperatur. Dla jej wyznaczenia konieczne jest bliższe sprecyzowanie warunku brzegowego na powierzchni górnej ($\zeta = h$) podobszaru skończonego,

- zredukowane współrzędne

$$x = \frac{\xi}{\delta}, \quad y = \frac{\eta}{\delta}, \quad z = \frac{\zeta}{\delta}, \tag{2}$$

gdzie δ jest wymiarem charakterystycznym podobszaru skończonego, tzn. połową podstawy prostokąta lub promieniem walca,

- zredukowana wysokość elementu skończonego

$$H = \frac{h}{\delta}, \tag{3}$$

- liczba Biota

$$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda_1}, \tag{4}$$

- stosunek współczynników przewodzenia ciepła

$$K_{\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{5}$$

W równaniach (4) i (5), jak i w dalszych rozważaniach, indeksem 1 będziemy oznaczać podobszar skończony, indeksem 2 podobszar nieskończony.

Z uwagi na symetrię problemu będziemy analizować pole temperatury dla nieujemnych x. Stosując do rozpatrywanego problemu metodę zszywania rozwiązań przyjmiemy, że wzdłuż linii styku obu podobszarów ($x \in [0,1]$) rozkład temperatury opisuje nieznana funkcja $f(x)$. Przyjęcie tej samej funkcji dla obu podobszarów zapewnia spełnienie pierwszego z warunków brzegowych IV rodzaju, tzn. równości temperatur na styku podobszarów.

Bezwymiarowy zapis rozpatrywanego problemu, przy sprecyzowanych uprzednio założeniach, jest następujący:

- Podobszar skończony

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial x^2} + \frac{r}{x}\frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

$$\text{dla } x=0 \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} = 0, \tag{7}$$

$$\text{dla } x=1 \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} + Bi\, \Theta_1 = 0, \tag{8}$$

$$\text{dla } z=0 \quad \Theta_1 = f(x), \tag{9}$$

$$\text{dla } z=H \quad \varphi(\Theta_1, \frac{\partial \Theta_1}{\partial z}) = 0, \tag{10}$$

przy czym w warunku brzegowym (10) operator φ jest liniowy.

- Podobszar nieskończony

$$\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial x^2} + \frac{r}{x}\frac{\partial \Theta_2}{\partial x} = 0, \tag{11}$$

$$\text{dla } y=0 \quad \Theta_2 = f(x)\, h(1-x), \tag{12}$$

gdzie $h(x)$ jest dystrybucją Haeviside'a,

$$\text{dla } y=\infty \quad \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} = 0, \tag{13}$$

$$\text{dla } x=\pm\infty \quad \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} = 0, \quad \Theta_2 = 0. \tag{14}$$

Funkcję $f(x)$ w równaniach (9) i (12) należy dobrać tak, by spełniony był drugi z warunków brzegowych IV rodzaju na styku podobszarów, wyrażający

równość strumieni ciepła na linii styku

$$\text{dla } |\mu| < 1 \qquad \frac{\partial \Theta_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} + K_N \frac{\partial \Theta_2}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0. \tag{15}$$

Do obu podobszarów zastosujemy transformację całkową współrzędnej x

$$\bar{\Theta}_1(\mu_k, z) = \int_0^1 \Theta_1(x,z)\, x^r v(\mu_k x)\, dx, \tag{16}$$

$$\bar{\Theta}_2(\mu, y) = \int_0^\infty \Theta_2(x,y)\, x^r v(\mu x)\, dx. \tag{17}$$

W obu transformacjach jądro jest wspólne i jego postać zależy jedynie od geometrii układu

$$\text{dla } r=0 \qquad v(x) = \cos x, \tag{18}$$

$$\text{dla } r=1 \qquad v(x) = J_0(x). \tag{19}$$

W transformacji (16) zmienna stransformowana jest zmienną dyskretną przybierającą wartości rosnącego ciągu dodatnich pierwiastków równań

$$\text{dla } r = 0 \qquad \mu_k \operatorname{tg}\mu_k = Bi, \tag{20}$$

$$\text{dla } r=1 \qquad \mu_k J_1(\mu_k) = Bi\ J_0(\mu_k), \tag{21}$$

a transformacja odwrotna jest szeregiem

$$\Theta_1(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^2}\, \bar{\Theta}_1(\mu_k, z)\, v(\mu_k z). \tag{22}$$

W równaniu (22) N_k^2 jest kwadratem normy jądra transformacji

$$N_k^2 = (v,v) = \int_0^1 x^r v^2(\mu_k x)\, dx. \tag{23}$$

Dla obu rozpatrywanych geometrii wynosi ona [2,3]

$$\text{dla } r=0 \qquad N_k^2 = \frac{\mu_k^2 + Bi^2 + Bi}{2(\mu_k^2 + Bi^2)}, \tag{24}$$

$$\text{dla} \quad r=1 \qquad N_k^2 = \frac{(Bi^2+\mu_k^2)\, J_0(\mu_k)}{2\mu_k^2}. \tag{25}$$

W transformacji (17) zmienna stransformowana jest zmienną ciągłą, a transformacja odwrotna wyraża się całką

$$\Theta_2(x,y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-r} \int_0^\infty \bar{\Theta}_2(p\ y)p^r v(px)dp. \tag{26}$$

Jądro transformacji (16) $v(\mu_k x)$ tworzy ortogonalny układ funkcji w przedziale $[0,1]$. Możemy zatem nieznaną funkcję $f(x)$, wyrażającą rozkład temperatury na styku podobszarów (równania (9) i (12) rozwinąć w szereg Fouriera

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v(\mu_k x) \tag{27}$$

o współczynnikach

$$A_k = \frac{(f,v)}{(v,v)} = \frac{1}{N_k^2} \int_0^1 f(x)x^r v(\mu_k x)dx. \tag{28}$$

Ponieważ funkcja $f(x)$ nie jest znana, nieznane są również współczynniki A_k. Dla dalszych rozważań istotny jest związek tych współczynników z transformatą funkcji, wynikający z porównania definicji (16) transformacji skończonej z równaniem (27)

$$\bar{f}(\mu_k) = \int_0^1 f(x)x^r v(\mu_k x)dx = A_k N_k^2. \tag{29}$$

Transformacja równania różniczkowego (6), przy wykorzystaniu warunków brzegowych (7) i (8), prowadzi do równania

$$\frac{d^2\bar{\Theta}_1}{dz^2} - \mu_k^2 \bar{\Theta}_1 = 0. \tag{30}$$

Warunek brzegowy (9) transformuje się, w myśl (29), następująco

$$\text{dla} \quad z=0 \qquad \bar{\Theta}_1 = A_k N_k^2. \tag{31}$$

natomiast ogólnie zapisany warunek brzegowy (10) będzie po transformacji nadal wyrażał ten sam liniowy związek, lecz dotyczący transformaty funkcji $\bar{\Theta}_1$

$$\text{dla } z=H \qquad \varphi(\bar{\Theta}_1, \frac{\partial\bar{\Theta}_1}{\partial z}) = 0. \tag{32}$$

Całka ogólna równania (30) ma postać

$$\bar{\Theta}_1 = C \operatorname{ch} \mu_k z + D \operatorname{sh} \mu_k z. \tag{33}$$

Z warunku brzegowego (31) wynika wartość stałej C

$$C = A_k N_k^2, \tag{34}$$

natomiast z liniowości warunku brzegowego (32) wynika liniowa zależność stałej D od współczynnika A_k

$$D = \beta + \gamma A_k \tag{35}$$

Stałe β i γ wyrażają się przez współczynniki liniowego operatora φ oraz przez wyrażenia $\operatorname{ch} \mu_k H$ i $\operatorname{sh} \mu_k H$. Transformata (33), przyjmuje zatem postać

$$\bar{\Theta}_1 = A_k N_k^2 \operatorname{ch} \mu_k z + (\beta + \gamma A_k) \operatorname{sh} \mu_k z. \tag{36}$$

Oryginał, przedstawiający rozkład temperatury w podobszarze skończonym, uzyskujemy po wykorzystaniu równania (22)

$$\Theta_1(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \mu_k z + \frac{\beta + \gamma A_k}{N_k^2} \operatorname{sh} \mu_k z)\, v(\mu_k x). \tag{37}$$

Równanie różniczkowe (11) przewodzenia ciepła w obszarze półnieskończonym transformujemy zgodnie z (17), wykorzystując przy tym warunki brzegowe (14)

$$\frac{d^2\bar{\Theta}_2}{dy^2} - p^2\, \bar{\Theta}_2 = 0. \tag{38}$$

Równaniu temu towarzyszą stransformowane warunki brzegowe (12) i (13) dla współrzędnej y

$$\text{dla } y=0 \quad \bar{\Theta}_2 = \int_0^{\infty} f(x)h(1-x)x^r v(px)dx = \int_0^1 f(x)x^r v(px)dx \tag{39}$$

dla $y=\infty$ $$\frac{d\bar{\Theta}_2}{dy} = 0. \tag{40}$$

Do warunku brzegowego (39) podstawiamy rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg (równanie (27)), uzyskując

dla $y=0$ $$\bar{\Theta}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \bar{v}_k(p). \tag{39a}$$

W równaniu tym $\bar{v}_k(p)$ oznacza transformatę skończoną (16) jądra $v(px)$ transformaty nieskończonej (17)

$$\bar{v}_k(p) = \int_0^1 x^r v(px) v_k(\mu_k x) dx. \tag{41}$$

Równanie różniczkowe (38) i warunek brzegowy (40) spełnia funkcja

$$\bar{\Theta}_2 = G\, e^{-py}.$$

Stałą G wyznaczamy z warunku brzegowego (39a), otrzymując

$$\bar{\Theta}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \bar{v}_k(p) e^{-py}. \tag{42}$$

Po retransformacji (równanie (26)) otrzymujemy rozkład temperatury w podobszarze nieskończonym

$$\Theta_2(x,y) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^{\infty} p^r\, \bar{v}_k(p) v(px) e^{-py} dp. \tag{43}$$

Aby równania (37) i (43) stanowiły rozwiązanie poszukiwanego problemu, musimy znać współczynniki A_k. Dla ich określenia wykorzystamy warunek brzegowy (15). Po wykonaniu przewidzianych w tym warunku działań na funkcjach Θ_1 i Θ_2 otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k^2} (\beta + \gamma A_k) \mu_k v(\mu_k x) + K_N \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(x) = 0, \tag{44}$$

gdzie

$$u_k(x) = \int_0^{\infty} p^{r+1}\, \bar{v}_k(p) v(px) dp.$$

Równanie (44) musi być spełnione dla wszystkich $x \in [0,1)$. Mnożąc obustronnie to równanie przez $x^r v(\mu_j x)$ i całkując w przedziale $[0,1]$, otrzymujemy

$$(p + \vartheta\lambda_j)\mu_j + K_\lambda \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1-r} \sum_{k=1}^{\infty} A_k (u_k, v_j) = 0, \tag{45}$$

gdzie

$$(u_k, v_j) = \int_0^1 x^r u_k(x) v(\mu_j x)\,dx.$$

Kładąc w równaniu (45) $j = 1, 2, 3, \ldots$ otrzymujemy nieskończony układ równań, z którego wyznaczamy ciąg $\{A_k\}$.

LITERATURA

[1] Kurzin W.B. - Ob odnom metodie skleiwanija dla reszenija liniejnych krajewych zadacz. Żurn. Wycz. Mat. i Mat. Fiz., 9, 5 s. 1184-1188, 1969.
[2] Łykow A.W. - Tiepłomassoobmien. "Energia" Moskwa 1972.
[3] Ozisik M.W. - Boundary Value Problems of Heat Conduction. Intern. Textbook Comp. Scranton, Pennsylvania 1968.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ СОСТОЯЩИХ ИЗ КОНЕЧНОГО И ПОЛУКОНЕЧНОГО ПРОСТАРНСТВА

Р е з ю м е

Температурное поле в системе состоящей из полупространства и стержня прямоугольного сечения или цилиндра (рис 1) определено методом склеивания решений для обеих частей. Таким образом сведено решение проблемы записанной уравнениями (6) - (15) к решению бесконечной системы линейных уравнений (45). Температурные поля в обоих пространствах выражаются с помощью уравнений (37) и (43). Представленный метод может применяться для определения потерь тепла в промышленных печах.

ANALYTICAL DETERMINATION OF SETTLED TEMPERATURE FIELDS IN TWO DIMENSIONAL SYSTEMS COMPOSED OF FINITE REGION AND SEMI INFINITE REGION

S u m m a r y

In the paper temperature field, in the system composed of half- spaces and rectangular rods or cylinder (drg.1.) has been determined by the method of solutions connection for both parts. In this way, the solution of a problem noted by equations (6) - (15) it was resolved to the solution of non-finite linear system of algebraic equations (45). Temperatures fields in both areas have been expressed by equations (37) and (43). The presented method may be used for determination of heat losses to the industrial fornaces ground.