

Stanisław Jerzy GDULA  
Instytut Techniki Ciepłej

Eugeniusz KROP  
"PROSYNCHM" Gliwice

## ZASTOSOWANIE SKUPIONYCH ŹRÓDEŁ CIEPŁA DO OBLICZEŃ ZASTĘPCZEJ DROGI PRZEWODZENIA CIEPŁA W TERMOBLOKACH

Streszczenie. W blokowym wymienniku ciepła wydzielono powtarzalny element (rys. 1). W celu wyznaczenia zastępczej drogi przewodzenia ciepła pomiędzy kanałami bloku zastąpiono te kanały liniowymi źródłami ciepła (rys. 2). Przeprowadzono porównanie z wynikami uzyskanymi innymi metodami (rys. 6).

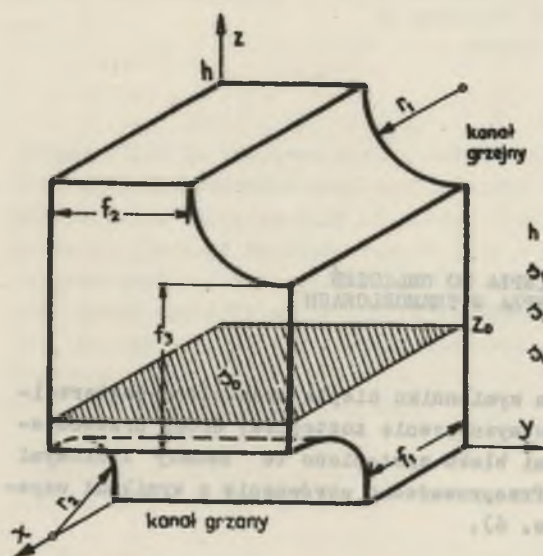
### 1. Wstęp

Termobloki są to masywne prostopadłościany z otworami dla krzyżowo-prądowego przepływu czynników. Jako materiał masywu stosuje się grafit, żelazo itp. W przypadku masywów lanych kanały wykonuje się często nie przez nawiercenie, lecz przez umieszczenie w formie rur (stalowych w przypadku odlewów żeliwnych).

W literaturze napotkano próby określenia zastępczej drogi przewodzenia ciepła w takich aparatach [2, 3, 4]. Na wyróżnienie zasługują przede wszystkim prace Miejerowicza i Nowopawłowskiego [2], którzy uzyskali rozwiązanie na drodze numerycznej oraz Palicy [4], który uzyskał rozwiązanie na drodze doświadczalnej wykorzystując analogię równań ustalonego przewodzenia ciepła i spadku ciśnienia przy przepływie laminarnym cieczy przez wypełnienie.

W obu tych pracach autorzy stosowali klasyczne podejście do przybliżenia wartości zastępczej drogi przewodzenia ciepła, polegające na przyjęciu do rozważań modelu bloku z izotermicznymi powierzchniami grzejnymi i grzаныmi, a następnie wyznaczeniu całkowitego natężenia przepływu ciepła od czynnika grzejnego do grzanego. Założenie izotermiczności powierzchni grzejnych i grzanych w bloku oraz przyjęcie braku wymiany ciepła z otoczeniem poprzez ściany boczne bloku pozwoliło im na wyodrębnienie z całego bloku podstawowego elementu, segmentu (rys. 1) do szczegółowych rozważań.

Stosunek różnicy temperatur powierzchni grzejnej i grzanej do wyznaczonej ilości ciepła wymienionego między tymi powierzchniami w segmencie określa opór cieplny przewodzenia ciepła przez segment, którego znajomość



$$h = r_1 + f_2 + r_2$$

$$\delta_1 = 0,5 \cdot \pi \cdot r_1 (r_2 + f_1)$$

$$\delta_2 = 0,5 \cdot \pi \cdot r_2 (r_1 + f_2)$$

$$\delta_0 = (r_1 + f_2) \cdot (r_2 + f_1)$$

Rys. 1. Podstawowy element (segment) podgrzewacza

pozwala następnie na wyznaczenie zastępczej drogi przewodzenia ciepła.

Rezultaty prac Miejerowicza-Nowopawłowskiego [2] i Palicy [4] można stosować jedynie dla pewnego zakresu rozwiązań konstrukcyjnych blokowych wymienników ciepła.

Istnieje zatem potrzeba podania sposobu przybliżenia zastępczej drogi przewodzenia ciepła w takich aparatach dla całego zakresu stosowanych rozwiązań konstrukcyjnych.

Wykorzystamy tutaj podejście, polegające na przybliżeniu modelu rzeczywistego modelem ze skupionymi źródłami, które stosuje się niejednokrotnie przy rozwiązywaniu zagadnień przewodzenia ciepła (np. określanie pola temperatur wokół rurociągu w gruncie) oraz w innych dziedzinach nauki (np. mechanice).

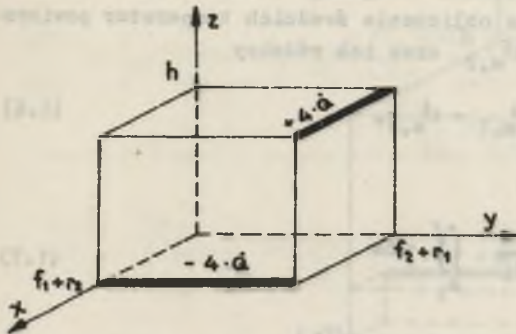
## 2. SPORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

W rozważaniach naszych przyjmujemy, że wymienniki są wykonane z jednorodnego izotropowego materiału, dla którego w rozpatrywanym zakresie temperatur współczynnik przewodzenia ciepła  $\lambda$  można traktować jako niezmienny.

Dalej przyjmujemy, że będziemy rozpatrywali w nich ustaloną wymianę ciepła bez wewnętrznych źródeł ciepła.

Przewodzenie ciepła (rozkład temperatury  $\vartheta^b$ ) w takich wymiennikach opisuje równanie Laplace'a [1]

$$\frac{\partial^2 v^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^s}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1)$$



Rys. 2. Model segmentu z liniowymi źródłami ciepła

Przyjmijmy do rozważań model bloku, w którym rozłożone wzdłuż osi kanałów (wypełnionych grafitem) liniowe źródła ciepła (o jednakowym natężeniu na całej długości kanałów) odpowiednio oddają i pobierają przepływające przez blok ciepło  $\dot{Q}_b$ . Przyjęcie dodatkowo założenia braku wymiany ciepła z otoczeniem poprzez ściany boczne pozwala na wyodrębnienie z całego bloku podstawowego elementu, segmentu ze źródłami (rys. 2) do dalszych rozważań.

Zgodnie z tymi założeniami na zagędnienie brzegowe opisujące rozkład temperatury  $v^s$  w segmencie składają się:

- równanie Fouriera-Kirchhoffa ze źródłami, o postaci:

$$\begin{aligned} & \lambda \left( \frac{\partial^2 v^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^s}{\partial z^2} \right) + \\ & + \frac{4 \dot{Q}_b}{r_1+r_2} \delta(y - f_2 - r_1) \delta(z - h) + \\ & - \frac{4 \dot{Q}_b}{r_2+r_1} \delta(x - f_1 - r_2) \delta(z) = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

gdzie  $\delta$  jest symbolem dystrybucji Diraca,

- warunki brzegowe uwzględniające symetrię (ze względu na rozkład temperatury w bloku) ścian bocznych segmentu

$$\left( \frac{\partial v^s}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial v^s}{\partial x} \right)_{x=f_1+r_2} = 0, \quad (1.3)$$

$$\left( \frac{\partial v^s}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial v^s}{\partial y} \right)_{y=f_2+r_1} = 0, \quad (1.4)$$

$$\left( \frac{\partial v^s}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial v^s}{\partial z} \right)_{z=h} = 0. \quad (1.5)$$



Dla każdego z liniowych źródeł ciepła (rys. 2) przylegają cztery symetryczne segmenty, stąd przy natężeniu przepływu ciepła przez segment  $\dot{Q}$  dla źródeł w równaniu (1.2) znalazł się czynnik 4.

Wyznaczony z rozwiązania zagadnienia brzegowego (1.2) - (1.5) rozkład temperatury w segmencie pozwala na obliczenie średnich temperatur powierzchni grzejnej  $\vartheta_{m,1}^*$  i grzanej  $\vartheta_{m,2}^*$  oraz ich różnicy

$$\Delta t = \vartheta_{m,1}^* - \vartheta_{m,2}^* \quad (1.6)$$

gdzie

$$\vartheta_{m,i}^* = \frac{1}{s_i} \iint_{s_i} \vartheta ds \quad (1.7)$$

Stosunek  $\Delta t$  do ciepła  $\dot{Q}$  określa całkowity opór cieplny przewodzenia ciepła przez segment

$$R_t = \frac{\Delta t}{\dot{Q}} \quad (1.8)$$

który możemy również wyrazić przy pomocy zastępczej drogi przewodzenia ciepła, odniesionej do powierzchni  $s_0$  (rys. 1).

$$R_t = \frac{d_0}{\lambda} \cdot \frac{1}{s_0} \quad (1.9)$$

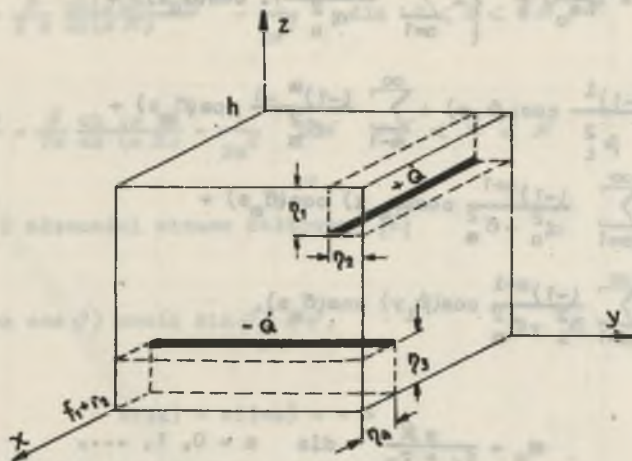
Z porównania prawych stron równań (1.8) i (1.9) otrzymujemy

$$d_0 = \frac{\Delta t}{\left(\frac{\dot{Q}}{\lambda s_0}\right)} = \frac{\vartheta_{m,1}^* - \vartheta_{m,2}^*}{\left(\frac{\dot{Q}}{\lambda s_0}\right)} \quad (1.10)$$

### 3. METODA ROZWIĄZANIA

Rozszczepmy liniowe źródła ciepła rozłożone wzdłuż osi kanałów każde na cztery jednakowe liniowe źródła odsunięte od osi kanałów (o dowolnie mały odcinek) symetrycznie "w głąb" przylegających segmentów (rys. 3).

Zgodnie z tym założeniem równanie Fouriera-Kirchhoffa ze źródłami odsuniętymi od osi kanałów opisujące rozkład temperatury  $\vartheta^*$  w segmencie (rys. 3), przyjmuje postać



Rys. 3. Model segmentu z "rozszczepionymi" liniowymi źródłami ciepła odsuniętymi od osi kanału

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} +$$

$$+ \left( \frac{\dot{Q}}{W S_0} \right) \cdot \frac{S_0}{F_1 + r_2} \delta(y - f_2 - r_1 + r_2) \delta(z - h + r_1) -$$

$$- \left( \frac{\dot{Q}}{W S_0} \right) \cdot \frac{S_0}{F_2 + r_1} \delta(x - f_1 - r_2 + r_1) \delta(z - r_3) = 0 \quad (2.1)$$

i jest uzupełnione warunkami brzegowymi (1.3) - (1.5).

Do rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia brzegowego możemy zastosować trzykrotnie (kolejno względem zmiennej  $x$ ,  $y$  i  $z$ ) skończoną kosinusową transformację Fouriera (np. [5]).

Rozkład temperatury  $v^*(x, y, z)$ , będący rozwiązaniem zagadnienia brzegowego (1.2) - (1.5) sformułowanego dla liniowych źródeł ciepła w osi kanałów, otrzymamy jako wartość graniczną rozkładu  $v^*(x, y, z)$  dla odległości od osi kanałów  $r_1, r_2, r_3, r_4$  zmierzających do zera:

$$\lim_{r_1, r_2, r_3, r_4 \rightarrow 0} v^*(x, y, z; r_1, r_2, r_3, r_4) = v^*(x, y, z). \quad (2.2)$$

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \rightarrow 0$$

Po rozwiązaniu zagadnienia brzegowego dla  $v^*(x, y, z)$  i przejściu granicznym (2.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \vartheta(x, y, z) = & \left( \frac{\dot{q}_0}{\lambda R_0} \right) \frac{r}{h} \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2} \cdot \cos(\alpha_n x) + \right. \\
 & + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\beta_i^2} \cos(\beta_i y) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\sigma_m^2} \cos(\sigma_m z) + \\
 & + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha_n^2 + \sigma_m^2} \cos(\alpha_n x) \cos(\sigma_m z) + \\
 & \left. + 4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{\beta_i^2 + \sigma_m^2} \cos(\beta_i y) \cos(\sigma_m z), \right. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{r_1 + r_2} \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots, \quad (2.4)$$

$$\beta_i = \frac{i\pi}{r_2 + r_1} \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, \quad (2.5)$$

$$\sigma_m = \frac{m\pi}{h} \quad \text{dla } m = 0, 1, \dots. \quad (2.6)$$

#### 4. ZASTĘPCZA DROGA PRZEWODZENIA CIEPŁA

Średnie temperatury powierzchni kanałów (rys. 1): grzejnego  $\vartheta_{m,1}^s$  i granego  $\vartheta_{m,2}^s$  wyznaczmy z (1.7) w oparciu o rozkład  $\vartheta(x, y, z)$  określony równaniem (2.3), przechodząc do współrzędnych walcowych:

$$\vartheta_{m,1}^s = \frac{2}{\pi r_1 (r_1 + r_2)} \int_0^{r_1+r_2} dx \int_0^{\pi/2} \vartheta(x, r_2+r_1-r_1 \cos \varphi, h-r_1 \sin \varphi) r_1 d\varphi, \quad (3.1)$$

$$\vartheta_{m,2}^s = \frac{2}{\pi r_2 (r_2 + r_1)} \int_0^{r_2+r_1} dy \int_0^{\pi/2} \vartheta(r_1+r_2-r_2 \cos \varphi, y, r_2 \sin \varphi) r_2 d\varphi. \quad (3.2)$$

Po wykorzystaniu wzorów na sumy szeregów [6]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \quad \text{dla } 0 < x \leq 2\pi, \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos(kx)}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \quad \text{dla } -\pi < x \leq \pi, \quad (3.4)$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\operatorname{ch}[a(\pi - x)]}{\operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \quad \text{dla } 0 \leq x < 2\pi, \quad (3.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(kx)}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{sh}(a\pi)} - \frac{1}{2a^2} \quad \text{dla } -\pi < x \leq \pi \quad (3.6)$$

oraz określenia i własności sinusa całkowego [6]

$$\operatorname{si}(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-x \cos \varphi) \cos(x \sin \varphi) d\varphi, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{si}(x) - \operatorname{si}(-x) = -\pi \quad (3.8)$$

otrzymujemy następujące wyrażenia na  $v_{m,1}^{\beta}$  i  $v_{m,2}^{\beta}$

$$v_{m,1}^{\beta} = \left( \frac{\dot{Q}}{N S_0} \right) \cdot \left\{ \frac{h}{2} - \frac{2}{\pi} r_1 - \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\operatorname{si}(\beta_i r_1)}{\beta_i} - \frac{\pi/\beta_i}{\exp(2\beta_i h) - 1} \right] \right\} \quad (3.9)$$

$$v_{m,2}^{\beta} = \left( \frac{\dot{Q}}{N S_0} \right) \cdot \left\{ \frac{2}{\pi} r_2 - \frac{h}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\operatorname{si}(\alpha_n r_2)}{\alpha_n} - \frac{\pi/\alpha_n}{\exp(2\alpha_n h) - 1} \right] \right\}. \quad (3.10)$$

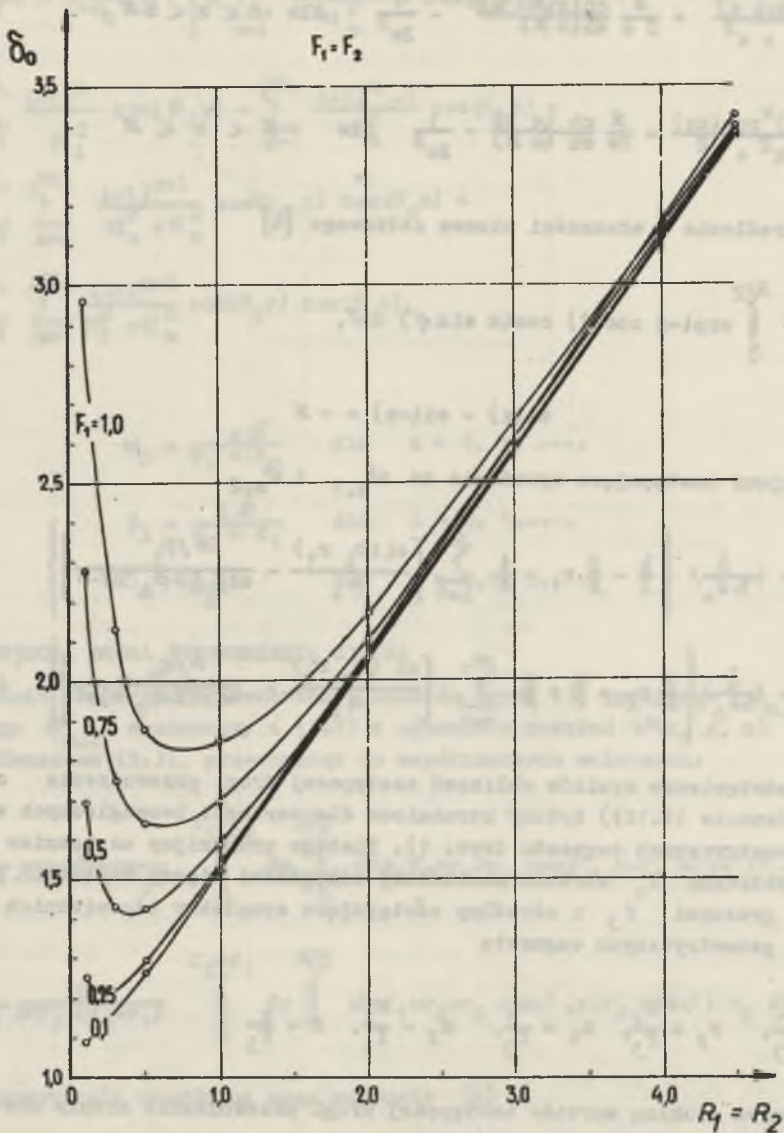
Przedstawienie wyników obliczeń zastępczej drogi przewodzenia ciepła  $d_0$  (równanie (1.10)) byłoby utrudnione dla wartości bezwzględnych wymiarów geometrycznych segmentu (rys. 1). Dlatego przyjmijmy za rozmiar charakterystyczny  $l_0$  wartość minimalnej odległości między kanałami grzejnymi i grzanymi  $f_3$  i określmy następująco sympleksy odpowiednich wymiarów geometrycznych segmentu

$$F_1 = \frac{r_1}{f_3}, \quad F_2 = \frac{r_2}{f_3}, \quad R_1 = \frac{r_1}{f_3}, \quad R_2 = \frac{r_2}{f_3}, \quad H = \frac{h}{f_3} \quad (3.11)$$

Również szukaną wartość zastępczej drogi przewodzenia ciepła określimy przy pomocy sympleksu

$$\delta_0 = \frac{d_0}{f_3}. \quad (3.12)$$

Po wprowadzeniu do równań (3.9) i (3.10) określeń sympleksów (3.11) oraz wykonaniu działań określonych w równaniu (1.10) otrzymujemy wyrażenie na sympleks zastępczej drogi przewodzenia ciepła postaci

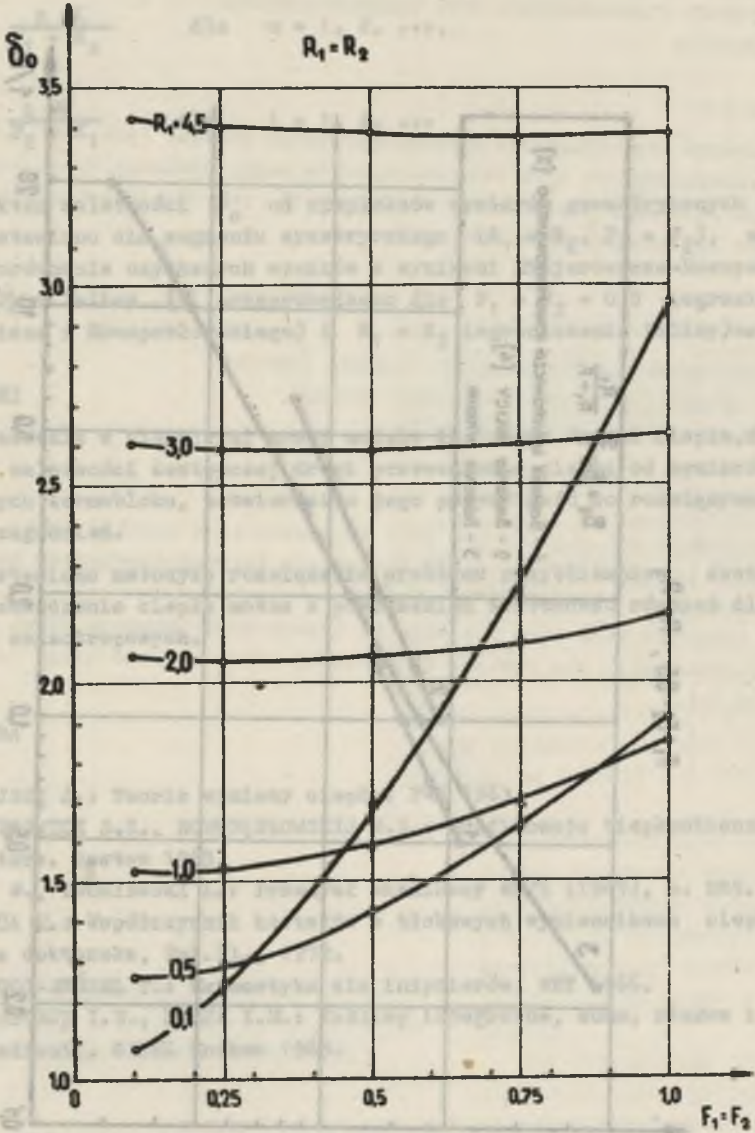


Rys. 4. Wykres funkcji  $\delta_0 = f(R_1, P_1)$  dla symetrycznego segmentu z kanałami okrągłymi

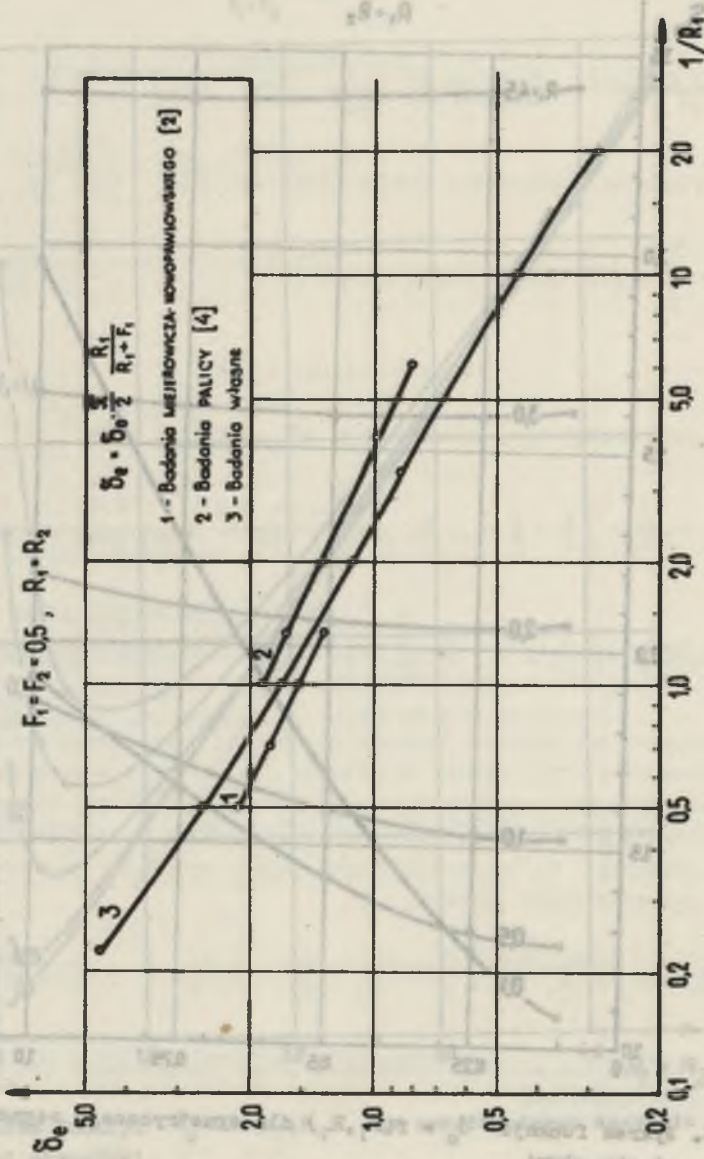
$$\delta_0 = \frac{d_0}{F_3} = H - \frac{2}{\pi} (R_1 + R_2) - \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\text{si}(\beta_i^* R_1)}{\beta_i^*} - \frac{\pi/\beta_i^*}{\exp(2\beta_i^* H) - 1} \right] +$$



$$= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\text{si}(\alpha_n^* R_2)}{\alpha_n^*} - \frac{\pi/\alpha_n^*}{\exp(2\alpha_n^* H) - 1} \right], \quad (3.13)$$



Rys. 5. Wykres funkcji  $\delta_0 = f(F_1, R_1)$  dla symetrycznego segmentu z kanałami okrągłymi



Rys. 6. Porównanie wyników badań własnych nad zależnością sympleksu zstępującej drogi przewodzenia ciepła  $\delta_e$  od geometrii segmentu, z dostępnymi danymi literaturowymi

gdzie wartości własne  $\alpha_n^*$  i  $\beta_1^*$  są określone z zależności

$$\alpha_n^* = \frac{n \pi}{F_1 + R_2} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, \quad (3.14)$$

$$\beta_1^* = \frac{1 \pi}{F_2 + R_1} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Charakter zależności  $\delta_0$  od sympleksów wymiarów geometrycznych segmentu przedstawiono dla segmentu symetrycznego ( $R_1 = R_2, F_1 = F_2$ ), na rys. 4 i 5. Porównanie uzyskanych wyników z wynikami Miejerowicza-Nowopawłowskiego [2] i Palicy [4] przeprowadzono dla  $F_1 = F_2 = 0,5$  (ograniczenie Miejerowicza i Nowopawłowskiego) i  $R_1 = R_2$  (ograniczenie Palicy) na rys.6.

## 5. WNIOSKI

1. Zastosowanie w niniejszej pracy modelu liniowego źródeł ciepła, dla przybliżenia zależności zastępczej drogi przewodzenia ciepła od wymiarów geometrycznych termobloku, potwierdziło jego przydatność do rozwiązywania tego typu zagadnień.

2. Przedstawiono metodykę rozwiązania problemu przybliżenia zastępczej drogi przewodzenia ciepła można z powodzeniem zastosować również dla materiałów anizotropowych.

## LITERATURA

- [1] MADEJSKI J.: Teoria wymiany ciepła. PWN 1963.
- [2] MIEJEROWICZ S.S., NOWOPAWŁOWSKIJ W.S.: Grafitowaja ciepłobiennaja aparatura. Rostow 1965.
- [3] MRÓZ W., TRONIEWSKI L.: Przemysł chemiczny 48/5 (1969), s. 289.
- [4] PALICA M.: Współczynnik kształtu w blokowych wymiennikach ciepła - Praca doktorska, Pol.Śl., 1972.
- [5] TRAJDOS-WRÓBEL T.: Matematyka dla inżynierów. WNT 1966.
- [6] GRADSZTEJN I.S., RYŻIK I.M.: Tablicy całek, sum, riasow i prozizwiedienij. GIFML Moskwa 1963.



ПРИМЕНЕНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА  
ДЛЯ РАСЧЁТОВ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПУТИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
В ТЕРМОБЛОКАХ

Р е з ю м е

В блочном теплообменнике выделен повторяемый элемент (рис. 1). Для определения эквивалентного пути теплопроводности между каналами блока эти каналы заменены линейными источниками тепла (рис. 2). Сопоставлены результаты, полученные другими методами (рис. 6).

APPLICATION OF THE CONCENTRATED THERMAL SOURCES  
FOR CALCULATIONS OF THE EQUIVALENT THERMAL  
CONDUCTION PATH IN THERMOBLOCKS

S u m m a r y

The recurrent element has been separated in a block heat exchanger (fig. 1.) in order to state the equivalent thermal conduction path between block channels.

These channels have been replaced by linear heat sources (fig. 2.).

A comparison with the results obtained by other methods (fig. 6.) has been carried out.