

Krzysztof KURPIŚZ
Instytut Techniki Ciepłej

NIEUSTALONE POLA TEMPERATUR W RÓWNOLEGŁOPRĄDOWYCH WYMIENNIKACH WIELOSTRUMIENIOWYCH^{*)}

Streszczenie. W pracy opisano analityczno-numeryczną metodę wyznaczania pola temperatur w wymiennikach ciepła w stanie nieustalonym. Rozważania dotyczą wymienników wielostrumieniowych równoległoprądowych, a także pewnych typów wymienników krzyżowo-prądowych.

Pola temperatur w wielostrumieniowych wymiennikach ciepła opisuje się przy pomocy układu cząstkowych równań różniczkowych, będących bilansami energii dla płynów i przegród. Równania te są w ogólności równaniami nieliniowymi. Przyjmując jednak pewne założenia upraszczające, stosowane zresztą powszechnie, otrzymuje się je w postaci liniowej. Założenia te są następujące:

- a) entalpie płynów są proporcjonalne do temperatury,
- b) właściwości termiczne płynów i przegród są stałe,
- c) pomija się wpływ przewodzenia ciepła w przegrodach,
- d) temperatury płynów są wyrównane w kierunku prostym do przepływu płynu,
- e) przepływ ciepła między przegrodą, a płynem odbywa się tylko na drodze konwekcji,
- f) pomija się akumulację masy w płynach
- g) przekroje kanałów są niezmiennie,
- h) pomija się straty ciepła do otoczenia.

Jeżeli strumienie płynów są niezmiennie w czasie, to dodatkowo współczynniki równań są stałe i taki przypadek będzie przedmiotem dalszych rozważań. Przy zmiennych strumieniach płynów stosuje się metodę linearyzacji [1], która prowadzi do równań liniowych o stałych współczynnikach.

Wśród różnych typów wymienników ciepła można wyróżnić grupę wymienników równoległoprądowych. Równania bilansu energii dla tej grupy po transformacji Laplace'a i wyeliminowaniu temperatur ścianek można przedstawić w postaci układu n równań różniczkowych zwyczajnych, gdzie n jest liczbą strumieni

^{*)} Fragment pracy doktorskiej wykonanej pod kierunkiem prof. dr hab. Stanisława Jerzego Gduli.

$$\frac{d\tilde{T}}{dz} = A\tilde{T} + B \quad (1)$$

W układzie tym \tilde{T} jest macierzą jednokolumnową zredukowanych temperatur n strumieni, a A i B - macierzami współczynników. Rozwiązanie układu (1) jest znane i wynosi

$$\tilde{T}(z,s) = \phi(z,s) \int_0^z \phi^{-1}(\eta,s) B(\eta,s) d\eta + \phi(z,s) C(s) \quad (2)$$

gdzie wektor stałych C może być także wyznaczony z zależności

$$C(s) = \phi^{-1}(0,s) \tilde{T}(0,s)$$

Przez ϕ^{-1} oznaczono macierz odwrotną względem macierzy ϕ . Macierz ϕ stanowi fundamentalny układ rozwiązań układu równań (1), tzn. spełnia ona zależność

$$\frac{d\phi}{dz} = A\phi \quad (3)$$

Elementy tej macierzy znajduje się rozwiązując zagadnienia na wektory i wartości własne macierzy A , tzn. rozwiązując układ równań

$$A D = \lambda D, \quad (4)$$

gdzie λ jest wartością własną, a D wektorem własnym macierzy A . Wartości własne λ znajduje się wykorzystując warunek na istnienie niezerowych rozwiązań układu równań (4), tj. warunek zerowania się wyznacznika głównego układu (4)

$$\det |A - \lambda E| = 0 \quad (5)$$

gdzie E jest macierzą jednostkową.

Po rozwinięciu tego wyznacznika i przyrównaniu go do zera otrzymuje się równanie algebraiczne n -tego stopnia względem λ , zwane równaniem charakterystycznym macierzy A . Rozwiązanie tego równania daje n wartości własnych λ , a każdej z nich odpowiada jeden wektor własny D . "n" wartościom własnym odpowiada zatem macierz kwadratowa K , której kolumnami są wektory własne D . Jeżeli wszystkie wartości własne λ są rzeczywiste i jednokrotne (jest to najczęstszy przypadek), to macierz ϕ fundamentalnego układu rozwiązań przedstawia się następująco:

$$\Phi = \begin{bmatrix} k_{11} e^{\lambda_1 Z} & k_{12} e^{\lambda_2 Z} & \dots & k_{1n} e^{\lambda_n Z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} e^{\lambda_1 Z} & k_{n2} e^{\lambda_2 Z} & \dots & k_{nn} e^{\lambda_n Z} \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie k_{ij} są elementami macierzy kwadratowej K . Wektor stałych C występujący w równaniu (2) wyznacza się z warunków brzegowych dla konkretnego wymiennika.

Po wyznaczeniu elementów macierzy Φ można znaleźć za pomocą równania (2) wartości temperatur płynów. Jednakże rozwiązanie to dane jest w obszarze transformaty Laplace'a, a nie oryginału. Wobec skomplikowanej postaci funkcji $\tilde{T}(Z, s)$ analityczne wyznaczenie retransformaty jest niemożliwe. Posłużono się zatem metodą numeryczną. Szczególnie dogodną okazała się metoda zaproponowana przez A. Papoulisa [3]. Metoda tą wyznacza się oryginał funkcji, wykorzystując znajomość transformaty w równo odległych punktach

$$s = (2i + 1)\sigma, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

gdzie σ jest dobraną liczbą dodatnią. Wybór tej liczby jest tutaj szczególnie ważny, bowiem od niego zależy poprawność otrzymanych wyników. Generalną zasadą jest dobór dużych wartości dla małych czasów i małych dla dużych czasów. Metoda pozwala uzyskać szybko wyniki obliczeń i jest szczególnie przydatna przy stosowaniu maszyn cyfrowych.

1. RÓWNANIA BILANSU ENERGII

Wymiennikami, które mogą być opisane układem równań (2) są klasyczne typy wymienników płaszczowo-rurowych, wymienniki typu Fiedla oraz wymienniki płytowe. Bilans energii dla "i-tej" przegrody opisuje równanie (w postaci bezwymiarowej)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_i}{\partial z} + (Bi_{i,i} + Bi_{i,j}) \theta_i &= \\ = Bi_{i,i} T_i + Bi_{i,j} T_j \end{aligned} \quad (7)$$

W równaniu tym θ oznacza zredukowaną temperaturę przegrody, T - zredukowaną temperaturę płynu, zaś

$$Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}$$

oznacza liczbę Biota, gdzie δ jest grubością przegrody. Wskaźnik i-j oznacza, że wielkość z nim związana dotyczy i-tej ścianki i j-tego strumie-

nia. Równanie bilansu energii dla i -tego strumienia przedstawia się następująco

$$Po_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial Z} + \sum_{j=k}^m K_{j-1} (T_1 - \Theta_j) = 0 \quad (8)$$

W równaniu tym

$$Po = \frac{a}{\delta^2} \frac{L}{w}$$

oznacza liczbę Fouriera, gdzie L jest długością wymiennika, a w prędkością płynu, zaś

$$K = \frac{cV}{V}$$

jest liczbą kryterialną (V - oznacza pojemność cieplną płynu). W równaniu (7) i (8) przez τ oznaczono czas zredukowany, który z czasem rzeczywistym $\bar{\tau}$ związany jest zależnością

$$\tau = \frac{a}{\delta^2} \bar{\tau}$$

Liczba v_1 przybiera wartość "+1" gdy czynnik płynie zgodnie z kierunkiem osi Z , a "-1", gdy przeciwnie. Suma jaka pojawiła się w równaniu (8) wynika z możliwości wystąpienia większej liczby sprzężeń cieplnych pomiędzy strumieniami.

Do układu równań (7) i (8) należy dołączyć warunki początkowe i brzegowe. Dla zagadnień liniowych, a takie są przedmiotem rozważań, można przyjąć zerowe warunki początkowe, tzn. wyznaczać nadwyżki temperatur ponad pierwotny stan ustalony.

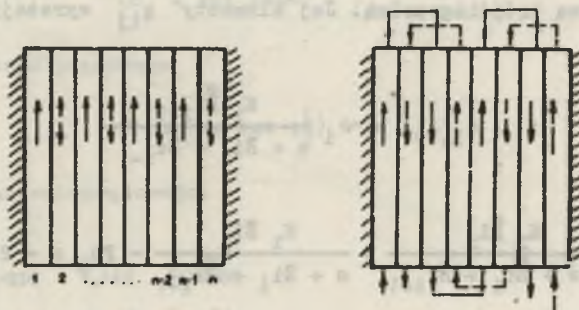
Warunki brzegowe narzucone są przez konkretną konstrukcję wymiennika. Również zakresy wskaźników i, j, k, m wyznaczone są przez konstrukcję wymiennika.

Równania (7) i (8) poddaje się transformacji Laplace'a, a następnie eliminuje się z nich temperatury ścianek Θ_1 . W wyniku tych operacji równania bilansu energii można sprowadzić do postaci (1). Jeżeli wymiennik jest dobrze izolowany, tzn. jeżeli pomija się straty ciepła do otoczenia (założenie h), to macierz B w układzie (1) równa jest wektorowi zerowemu

$$B = 0$$

2. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA METODY

Zastosowanie proponowanej metody można pokazać na przykładzie wymienników płytowych (rys. 1). Wymienniki te mogą mieć elementy łączone szeregowo lub równoległe.



Rys. 1. Schemat wymiennika płytowego o równoległym i szeregowym łączeniu elementów

Równanie bilansu energii dla przegrody jest następujące (zgodnie z (7))

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial \tau} + (Bi_{i,i} + Bi_{i,i+1}) \Theta_i = Bi_{i,i} T_i + Bi_{i,i+1} T_{i+1}$$

$$i=0,1,2,\dots,n \quad (9)$$

zaś dla płynu

$$Fo_i \frac{\partial T_i}{\partial \tau} + \nu_i \frac{\partial T_i}{\partial z} + K_{i,i} (T_i - \Theta_i) +$$

$$+ K_{i,i-1} (T_i - \Theta_{i-1}) = 0, \quad i=1,2,\dots,n \quad (10)$$

gdzie "n" oznacza liczbę strumieni.

Zatem liczba j w równaniu (7) przyjmuje wartość

$$j = i + 1$$

a liczby k,m w równaniu (8) odpowiednio

$$k = i-1, \quad m = i$$

Wartości liczb Biota

$$Bi_{0,0} = 0 \quad i \quad Bi_{n,n+1} = 0 \quad (\text{założenie } h)$$

Z uwagi na to, że kanały są zwykle symetryczne, można zaniedbać podwójne wskaźnikowanie dla liczb kryterialnych. Jedynie liczby Biota dla skrajnych kanałów mogą być niesymetryczne, stąd dalej zróżnicowano tylko liczby Biota: z lewej strony przegrody (dwie kreseczki) i z prawej (jedna).

Po transformacji Laplace'a i eliminacji temperatur ścianek otrzymuje się układ równań typu (1). Jak widać z postaci równań (9), (10) macierz \mathbf{A} jest macierzą trójdziagonalną. Jej elementy $a_{i,j}$ wyrażają się następująco

$$a_{i,i-1} = \sim_1 \frac{K_i \overline{\overline{B}}_{i-1}}{s + \overline{B}_{i-1} + \overline{\overline{B}}_{i-1}}$$

$$a_{i,i} = \sim_1 \left[\frac{K_i \overline{\overline{B}}_i}{s + \overline{B}_i + \overline{\overline{B}}_{i+1}} + \frac{K_i \overline{B}_i}{s + \overline{B}_i + \overline{\overline{B}}_{i-1}} - P_{0i} s - 2 K_i \right]$$

$$a_{i,i+1} = \sim_1 \frac{K_i \overline{B}_{i+1}}{s + \overline{B}_i + \overline{\overline{B}}_{i+1}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

przy czym

$$\overline{\overline{B}}_0 = \overline{\overline{B}}_{n+1} = 0$$

Dla wymiennika o elementach łączonych równolegle warunki brzegowe określone są wprost przez funkcję, podającą zależność temperatury na wlocie do wymiennika $\tilde{f}_i(s)$.

Dla wymiennika o elementach łączonych szeregowo dodatkowo dochodzą warunki równości temperatur w punktach styku dwóch strumieni. Warunki te schematu dla przedstawionego na rys. 1 (parzysta liczba strumieni) można zapisać następująco

$$\tilde{T}_{4l-1}(1,s) = \tilde{T}_{4l-3}(1,s),$$

$$\tilde{T}_{4l}(1,s) = \tilde{T}_{4l-2}(1,s)$$

dla $l = 1, 2, \dots, \text{ent}\left(\frac{n}{4}\right)$,

$$\tilde{T}_{4l+1}(0,s) = \tilde{T}_{4l-1}(0,s),$$

$$\tilde{T}_{4l}(0,s) = \tilde{T}_{4l+2}(0,s)$$

dla $l = 1, 2, \dots, \text{ent}\left(\frac{n-2}{4}\right)$.

Liczbę ν_1 można przedstawić jako

$$\nu_1 = (-1)^{\omega_1},$$

gdzie

$$\omega_1 = \text{ent} \left(\frac{i+1}{2} \right) + 1,$$

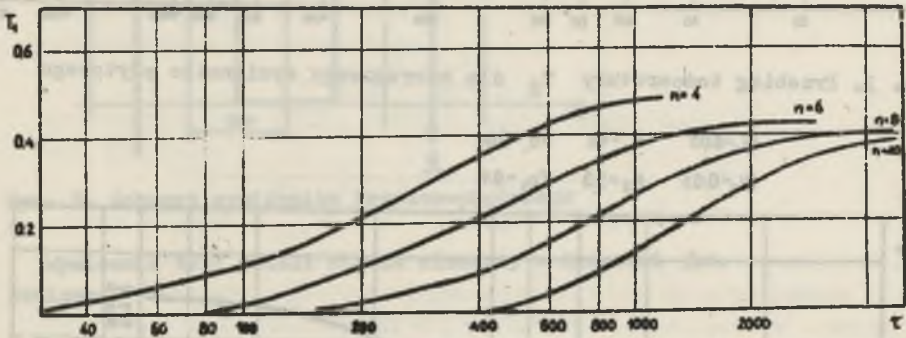
dla wymiennika współprądowego

$$\omega_1 = \text{ent} \left(\frac{i}{2} \right) + 2$$

dla wymiennika przeciwprądowego.

$$Bi_1 = 0.05 \quad K_1 = 4.0 \quad Fo_1 = 0.09$$

$$Bi_2 = 0.03 \quad K_2 = 3.5 \quad Fo_2 = 0.1$$



Rys. 2. Przebieg temperatury wylotowej dla szeregowego wymiennika płytowego

Na rys. 2, 3 i 4 pokazano przykładowe wyniki obliczeń, dla wymienników płytowych. Dotyczą one przepływów przeciwprądowych.

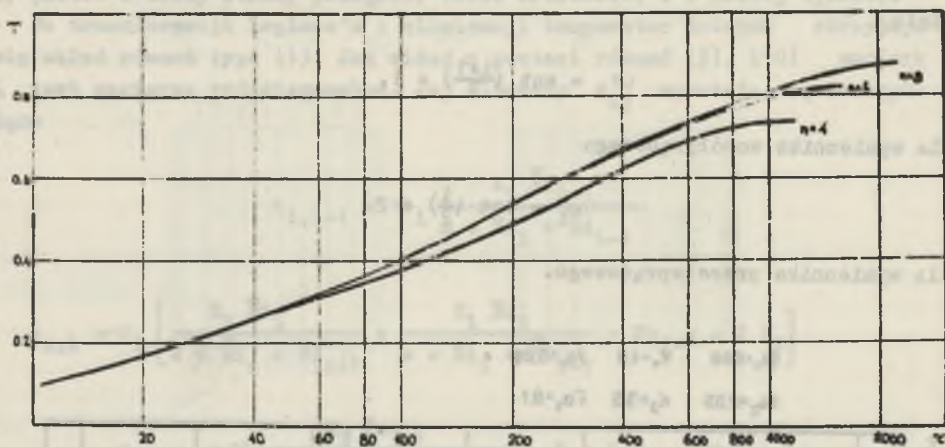
Na rys. 2 pokazano przebieg temperatury wylotowej czynnika, którego temperatura na wlocie została zakłócona ($T_1(0, \tau) = H(\tau)$, gdzie $H(\tau)$ - funkcja Heaviside'a) dla wymiennika o elementach łączonych szeregowo, przy różnej liczbie strumieni "n".

Na rys. 3 pokazano przebieg temperatury wylotowej $T_2(0, \tau)$ przy tych samych warunkach.

Na rys. 4 przedstawiono przebieg temperatury wylotowej czynnika o stałej temperaturze na wlocie, który oznaczony jest indeksem "n-2" (por.rys. 1) dla wymiennika płytowego o elementach łączonych równolegle.

$$Bi_1 = 0.05 \quad K_1 = 4.0 \quad Fo_1 = 0.09$$

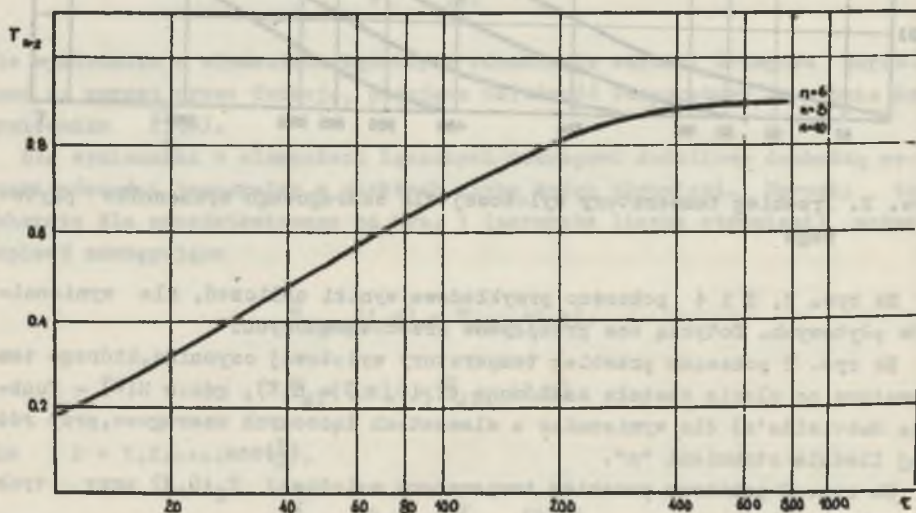
$$Bi_2 = 0.03 \quad K_2 = 3.5 \quad Fo_2 = 0.1$$



Rys. 3. Przebieg temperatury T_2 dla szeregowego wymiennika płytowego

$$Bi_1 = 0.05 \quad K_1 = 4.0 \quad Fo_1 = 0.09$$

$$Bi_2 = 0.03 \quad K_2 = 3.5 \quad Fo_2 = 0.1$$



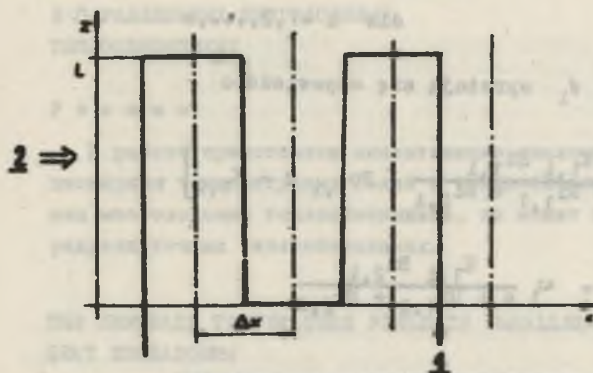
Rys. 4. Przebieg temperatury wylotowej dla równoległego wymiennika płytowego

Jakkolwiek obliczenia wykonano dla różnej liczby strumieni n , temperatura " $n-2$ " prawie zupełnie nie zależy od liczby " n ".

3. UWAGI KOŃCOWE

Metoda opisana powyżej charakteryzuje się dużą prostotą i dużą szybkością obliczeń. W praktyce zagadnienie na wartości i wektory własne rozwiązywano metodą Kryżowa [2], zaś równanie charakterystyczne (5) rozwiązywano metodą Bairstowa [2].

Metoda ta może być także stosowana dla niektórych typów wymienników krzyżowoprądowych, z uwzględnieniem pewnych uproszczeń. Przykładem takim może być aparat przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5. Schemat wymiennika krzyżowoprądowego

Wymiennik taki dzieli się na elementy o długości Δx .
Ponieważ

$$\Delta x \ll L$$

równanie bilansu energii dla czynnika płynącego w przestrzeni międzyrurkowej i sporządzone dla i -tego elementu o długości Δx można zapisać w postaci uproszczonej

$$Fo_{2,i} \frac{\partial \bar{T}_{2,i}}{\partial t} + T_{2,i} - T_{2,i-1} + K_{2,i} (T_{2,i} - \theta_1) = 0 \quad (11)$$

W równaniu tym poszczególne wielkości oznaczają

$$K_{2,i} = \frac{\alpha_{2,i} A_1}{\eta_{2,i}}, \quad Fo_{2,i} = \frac{s}{\delta^2} \frac{\Delta x}{w_2},$$

zaś $\bar{T}_{2,i}$ jest średnią temperaturą płynu w elemencie Δx . Równania bilansu energii dla przegród i czynnika płynącego w rurkach pozostają bez zmian i są zgodne z postacią (7) i (8).

Po transformacji Laplace'a i wyeliminowaniu temperatur ścianek otrzymuje się układ równań zwyczajnych typu (1)

$$\frac{d\tilde{T}_{1,i}}{dz} = \alpha_i \tilde{T}_{1,i} + \beta_i \tilde{T}_{2,i} \quad (12)$$

Temperatury $\tilde{T}_{2,i}$ dane są następującym wzorem rekurencyjnym

$$\tilde{T}_{2,i} = \vartheta_i \tilde{T}_{1,i} + \delta_i \tilde{T}_{2,i-1} \quad (13)$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$

Współczynniki $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \vartheta_i$ wyrażają się odpowiednio

$$\alpha_i = \nu_i \left[\frac{K_{1,i} Bi_{1,i}}{s + Bi_{1,1} + Bi_{2,1}} - Fo_{1,i} s - K_{1,i} \right],$$

$$\beta_i = \nu_i \frac{K_{1,i} Bi_{2,i}}{s + Bi_{1,1} + Bi_{2,1}}$$

$$\delta_i = \frac{2}{Fo_{2,i} s + K_{2,i} + 2 - \frac{K_{2,i} Bi_{2,i}}{s + Bi_{1,1} + Bi_{2,1}}}$$

$$\vartheta_i = \frac{K_{2,i} Bi_{1,i}}{2(s + Bi_{1,1} + Bi_{2,1})} \delta_i$$

dla $i = 1, 2, \dots, n$

Wykorzystując wzór rekurencyjny (13) doprowadza się układ (12) do postaci (1)

$$\frac{d\tilde{T}_1}{dz} = \mathbf{A} \tilde{T}_1 + \mathbf{B}$$

Macierz \mathbf{A} jest tutaj macierzą podtrójkątną i stąd bardzo łatwo wyznacza się jej wartości i wektory własne. Jeżeli temperatura wlotowa

$$T_{2,0}(0, \tau) = 0,$$

to wektor \mathbf{B} jest równy wektorowi zerowemu.

Jak widać z przytoczonych rozważań, przy pomocy przedstawionej metody można łatwo i szybko wyznaczać pola temperatur w wymiennikach ciepła, nawet przy ich dość złożonej strukturze.

LITERATURA

- [1] CZERMAK J., PETERKA W.; *Dynamika regulirujemych system w ciepłotecnice i chemii*, Izd. "Mir" (1972).
- [2] LEGRAS J.; *Praktyczne metody analizy numerycznej*, Wyd. Nauk.-Techn. (1974).
- [3] PAPOULIS A.; *Quart.Appl.Meth.*, vol. XIV, No 4 (1957), p. 405.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ
В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МНОГОХОДОВЫХ
ТЕПЛООБМЕННИКАХ

Резюме

В работе представлен аналитическо-численный метод определения нестационарных температурных полей в теплообменниках. Метод касается параллельных многоходовых теплообменников, но может тоже применяться в некоторых перекрестоточных теплообменниках.

THE UNSTEADY TEMPERATURE FIELD IN PARALLEL-MULTIFLOW
HEAT EXCHANGERS

Summary

In the paper a numerical-analytical method for determination of the unsteady temperature field in heat exchangers has been presented. This method deals with the parallel-multiflow heat exchangers and some kinds of the cross-flow heat exchangers.

