ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1976

Seria: ENERGETYKA z.57 Nr kol. 493

Bolesław SEREDYŃSKI[x)]

Główny Instytut Górnictwa

WYZNACZANIE NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY W SYMETRYCZNEJ PŁYCIE, PRZY NADMIARZE DANYCH OBARCZONYCH BŁĘDAMI

Streszczenie. Wyznaczono nieustalone pole temperatury w symetrycznie ogrzewanej płycie w przypadku, gdy oprócz początkowego rozkładu temperatury (4) dany jest rozkład temperatury po czasie τ_1 (5) i oba te rozkłady są obarczone błędami. Uzyskano rozwiązanie analityczne w postaci szeregu (25), którego współczynniki określają równania (20) - (22).

Wykonywanie obliczeń przy nadmiarze danych obarczonych błędami jest problemem spotykanym w różnych dziedzinach nauki. W zagadnieniach techniki cieplnej na problem ten zwrócili uwagę i wykonali pierwsze prace z tego zakresu J. Szargut i Z. Kolenda (por. np. [2], [3]).

W klasycznym ujęciu obarczone błędami i występujące w nadmiarze dane są danymi liczbowymi, a układ równań, który mają spełnić jest układem równań algebraicznych. Wiele zjawisk fizycznych jest opisanych za pomocą równań różniczkowych, którym towarzyszą warunki brzegowe i początkowe. Nadmiar tych warunków, przy jednoczesnym założeniu, że zawarte w nich informacje są obarczone błędami, stwarza problem analogiczny do klasycznego.

W niniejszej pracy rozpatrzymy przykład zjawiska przewodzenia ciepła w ciele stałym. Opisuje je równanie różniczkowe Fouriera-Kirchhoffa. Dla jednowymiarowego przewodzenia ciepła w rozległej płycie o stałym współczynniku przewodzenia ciepła λ równanie to ma postać

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\,\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \tag{1}$$

W klasycznym przedstawieniu tego problemu (bez nadmiaru danych [1] równaniu temu towarzyszą dwa warunki brzegowe i jeden warunek początkowy. Warunki brzegowe określają charakter wymiany ciepła na powierzchniach płyty. W przypadku, gdy płaszczyzna środkowa płyty (x=0) jest płaszczyzną adiabatyczną (symetryczne nagrzewanie płyty), a powierzchnia zewnętrzna

---

x) Doktorant Instytutu Techniki Cieplnej. Promotor prof. dr hab. Stanisław Jerzy Gdula.

$(x=\delta)$ wymienia ciepło drogą konwekcji z płynem o temperaturze t_o, warunki te mają postać

$$\text{dla } x = 0 \qquad \frac{\partial t}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\text{dla } x = \delta \qquad -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = \alpha(t - t_o) \; . \tag{3}$$

Warunek początkowy określa początkowy rozkład temperatury w płycie

$$\text{dla } \tau = 0 \qquad t = t_p(x) \, . \tag{4}$$

Symetria zagadnienia wymaga oczywiście, by funkcja ta była parzysta, $t_p(-x) = t_p(x)$.

Nadmiarowe dane (warunki brzegowe i początkowe) mogą być różne. Może to być np. dodatkowy rozkład temperatury po czasie τ_1 (dana funkcyjna) lub też temperatury t_i zmierzone w określonych miejscach $x=x_i$ i po określonych czasach τ_i (dane liczbowe), może to również być dodatkowy warunek brzegowy - np. zadana temperatura powierzchni $t(\delta,\tau) = t_\delta(\tau)$ lub strumień ciepła na powierzchni jako funkcja czasu (dane funkcyjne). Różnie też można podchodzić do problemu błędów, którymi są obarczone warunki brzegowe i początkowe. Jedno z tej klasy zagadnień rozwiązał numerycznie Norwisz [4].

W niniejszej pracy przyjmujemy do rozważań przypadek, gdy dany jest dodatkowy rozkład temperatury po czasie $\tau = \tau_1$

$$\text{dla } \tau = \tau_1 \qquad t = t_1(x), \tag{5}$$

przy czym oba rozkłady temperatury (4) i (5) są w jednakowym stopniu obarczone błędami. Pozostałe dane zawarte w równaniu różniczkowym i warunkach brzegowych traktujemy jako dokładne.

Podobnie jak w klasycznym rachunku wyrównawczym będziemy poszukiwali takiego rozwiązania problemu $t(x,\tau)$, by wynikające z niego korekty danych rozkładów temperatur spełniały warunek będący uogólnieniem zasady najmniejszych kwadratów

$$\int_0^\delta \left[t(x,0) - t_p(x)\right]^2 dx + \int_0^\delta \left[t(x,\tau_1) - t_1(x)\right]^2 dx = \text{min.} \tag{6}$$

Przedstawiony zapis rozpatrywanego problemu można sprowadzić do postaci bezwymiarowej. Po przyjęciu charakterystycznej temperatury t_{po} (będącej np. średnią całkową rozkładu $t_p(x)$, lub jedną z jego skrajnych wartości), definiujemy następujące zmienne bezwymiarowe

$$\xi = \frac{x}{\delta}, \qquad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}, \qquad Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}, \tag{7}$$

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{t(x,\tau) - t_o}{t_{po} - t_o}, \tag{8}$$

$$\Theta_p(\xi) = \frac{t_p(x) - t_o}{t_{po} - t_o}, \qquad \Theta_1(\xi) = \frac{t_1(x) - t_o}{t_{po} - t_o}. \tag{9}$$

Bezwymiarowa postać równań (1) i (6) jest następująca

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \tag{10}$$

dla $\xi = 0$ $\qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0$ (11)

dla $\xi = 1$ $\qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + Bi\Theta = 0$ (12)

dla $Fo = 0$ $\qquad \Theta = \Theta_p(\xi)$ (13)

dla $Fo = Fo_1$ $\qquad \Theta = \Theta_1(\xi)$ (14)

$$\int_0^1 \left[\Theta(\xi, 0) - \Theta_p(\xi)\right]^2 d\xi + \int_0^1 \left[\Theta(\xi, Fo_1) - \Theta_1(\xi)\right]^2 d\xi = \min. \tag{15}$$

Rozwiązania będziemy poszukiwać w postaci szeregu Fouriera

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n \xi \exp(-\mu_n^2 Fo), \tag{16}$$

gdzie wartości własne μ_n są rosnącym ciągiem dodatnich pierwiastków równania

$$Bi \operatorname{ctg} \mu_n = \mu_n. \tag{17}$$

Funkcje $\Theta_p(\xi)$ i $\Theta_1(\xi)$ można rozwinąć w szeregi Fouriera

$$\Theta_p(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \mu_n \xi \tag{18}$$

$$\Theta_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \mu_n \xi \tag{19}$$

ze współczynnikami

$$a_n = \frac{1}{c_n}\int_0^1 \Theta_p(\xi)\cos\mu_n\xi\,d\xi \tag{20}$$

$$b_n = \frac{1}{c_n}\int_0^1 \Theta_1(\xi)\cos\mu_n\xi\,d\xi \tag{21}$$

przy czym

$$c_n = \int_0^1 \cos^2\mu_n\xi\,d\xi = \frac{\mu_n^2 + Bi^2 + Bi}{2(\mu_n^2 + Bi^2)}\,. \tag{22}$$

Po wstawieniu równań (16), (18) i (19) warunek (15) uzyskuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left\{A_n\left[1+\exp(-2\mu_n^2 Fo_1)\right] - 2A_n\left[a_n+b_n\exp(-\mu_n^2 Fo_1)\right] + a_n^2 + b_n^2\right\} = \min. \tag{23}$$

Funkcjonał ten osiąga minimum dla wartości A_n wyrażających się równaniem

$$A_n = \frac{a_n + b_n\exp(-\mu_n^2 Fo_1)}{1 + \exp(-2\mu_n^2 Fo_1)}\,. \tag{24}$$

Ostatecznie więc poszukiwane rozwiązanie ma postać

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n\exp(-\mu_n^2 Fo_1)}{1 + \exp(-2\mu_n^2 Fo_1)}\cos\mu_n\xi\exp(-\mu_n^2 Fo), \tag{25}$$

przy czym współczynniki a_n i b_n określają równania (20) - (22). Skorygowany początkowy rozkład temperatury uzyskamy kładąc w równaniu (25) $Fo = 0$, a skorygowany drugi dany rozkład temperatury-podstawiając $Fo = Fo_1$.

LITERATURA

[1] Łykow A.W.: Tieorija tiepłoprowodnosti. Wysszaja Szkoła,Moskwa 1967.
[2] Szargut J., Kolenda Z.: Theory of coordination of material and energy balances in metallurgical processes. Arch.Hutn. 13, 2,s.153-169 (1968.)
[3] Kolenda Z.S., Allman J.S.: Coordination of Energy Balances in Heat Transfer. Bull. Acad. Pol. Scienc. 22, 6, 1974.
[4] Norwisz J. Numeryczne wyznaczanie pola temperatury w ciałach stałych w procesach stacjonarnej wymiany ciepła przy nadmiarze danych obarczonych błędami przypadkowymi. Praca dokt. AGH, 1972.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ПЛИТЕ ПРИ ИЗБЫТКЕ ДАННЫХ С ОШИБКАМИ

Р е з ю м е

Определено неустановившееся температурное поле в симметрически нагреваемой плите в случае, когда кроме начального распределения температуры (4) даётся распределение температуры после времени τ_1 (5) и оба эти распределения обременены ошибками. Получено аналитическое решение в виде ряда (25) которого коэффициенты определяют уравнения (20) - (22).

DETERMINATION OF NON-SETTLED TEMPERATURE FIELD
IN A SYMMETRICAL PLATE UNDER EXCESS OF DATA
BURDENED WITH ERRORS

S u m m a r y

It was determined the temperature field in symmetrical heated plate,in case when besides the initial temperature distribution (4) the temperature distribution after time τ_1 (5) has been given and these both distributions were burdened with errors. It was obtained the analytical solution in a form of series (25), the coefficients of which define the equations (20) - (22).