

Mirosław CHUDEK
Piotr HACHOŃ
Zenon SZCZEPANIAK

WPLYW KSZTAŁTU ŁUKÓW O PROFILU V NA ICH NOŚNOŚĆ GRANICZNĄ

Streszczenie. Powszechnie stosowaną w wyrobiskach korytarzowych jest obudowa z łuków stalowych o profilu V. Jej elementami konstrukcyjnymi są trzy lub cztery łuki opisane danym promieniem, dające kontur całego układu konstrukcyjnego zbliżony do wycinka koła. W pracy rozpatrzono wpływ kształtu łuku na jego parametry wytrzymałościowe. Analizie poddano trzy rodzaje kształtu łuku dwuprzegubowego: kołowy, eliptyczny i paraboliczny. Jako kryterium porównawcze przyjęto stan nośności granicznej konstrukcji. Teoria ta pozwala określić statycznie dopuszczalne obciążenie, w wyniku którego konstrukcja - poprzez powstanie odpowiedniej ilości przekrojów plastycznych - staje się układem geometrycznie zmiennym i nie może być użytkowana zgodnie z założonym przeznaczeniem.

Charakter pracy łuku zasadniczo różni się od charakteru pracy innych konstrukcji prętowych. Odróżniającą cechą jest tu istotny wpływ sił podłużnych na nośność łuku. Dlatego postać zależności granicznej przedstawia się jako funkcję zarówno momentu zginającego, jak i sił podłużnych. Bywa ona bardzo rozbudowana, niemniej często podczas analizy stanów granicznych korzysta się z pewnych dopuszczalnych uproszczeń tych postaci.

Dla każdego analizowanego kształtu łuku oraz założonego równomiernego obciążenia na całej jego rozpiętości zastosowano równanie zależności granicznej w postaci:

$$\frac{N}{N_0} \pm \frac{M}{M_0} - 1 = 0$$

Przedstawiono ogólną metodykę postępowania przy określaniu przekrojów niebezpiecznych, jak również charakterystyczne (dla każdego kształtu) rozwiązanie analityczne. W celu porównania otrzymanych wyników rozpatrzono kształty łuków określone stosunkiem $\frac{W}{I}$. Dodatkowo warianty konstrukcyjne uzyskano poprzez zmianę rozpiętości łuku oraz zmianę jego profilu (V25-V44). Wyniki przeprowadzonych obliczeń przedstawiono na wykresach, zaś ich ocenę - w końcowej części pracy.

1. Wprowadzenie

Przy wykonywaniu wyrobiska korytarzowego na różnych głębokościach istnieje tendencja do wytworzenia się wokół niego tzw. naturalnego sklepienia ciśnien. Sklepienie takie wg Sałustowicza przyjmuje kształt zbliżony do elipsy, a wg Protodiakonowa - do paraboli [7]. Z punktu widzenia samosta-

teczności skał w otoczeniu wyrobiska korytarzowego, powyższe kształty zakładają zachowanie naprężeń ściskających na obrysie wyłomu wyrobiska. Natomiast uwzględniając statyczną pracę obudowy, jej konstrukcja powinna być ukształtowana wg linii zapewniającej przejmowanie odpowiednio wysokich obciążeń, przy równoczesnym szybkim wciągnięciu otaczających skał do pracy w trójosiowym stanie naprężenia. Linia konturu obudowy powinna więc być zbliżona do kształtującej się samoczynnie krzywej naprężeń w górotworze. W pracy analizie poddano trzy rodzaje kształtu łuków:

- a) łuk kołowy,
- b) łuk eliptyczny,
- c) łuk paraboliczny.

Optymalizację kształtu przeprowadzono wg kryterium stanów granicznych. W metodzie stanów granicznych wyróżnić można:

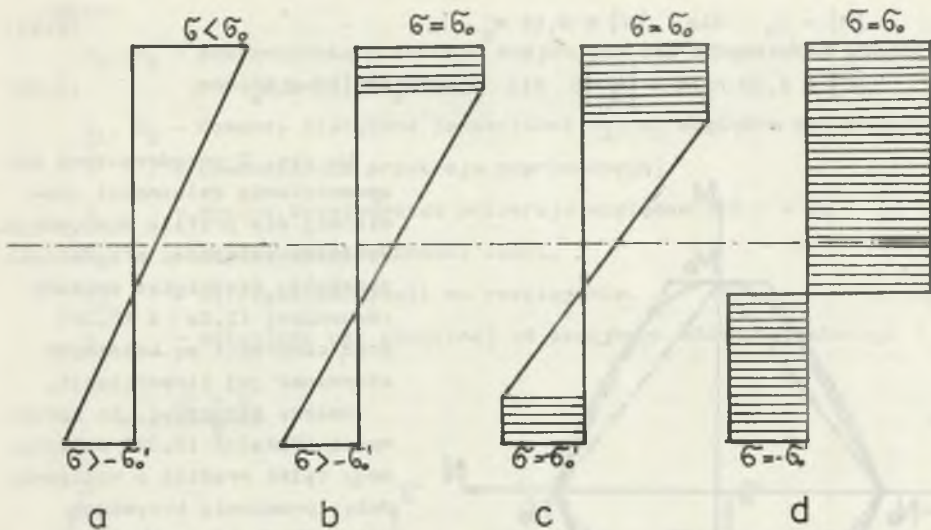
- a) stany graniczne nośności, które charakteryzuje trwałe odkształcenie spowodowane przekroczeniem granicy plastyczności materiału,
- b) stany graniczne użytkowania, w których występują przemieszczenia i drgania uniemożliwiające normalną eksploatację konstrukcji.

Określenie nośności granicznej konstrukcji sprężysto-plastycznej osiągnięte może być w dwojaki sposób [10]. Jeden z nich polega na śledzeniu całego procesu zachowania się konstrukcji pod działaniem narastających obciążeń zewnętrznych, poczynawszy od stanu idealnie sprężystego, poprzez stany sprężysto-plastyczne aż do stanu zniszczenia. Takie podejście, właściwe teorii odkształceń sprężysto-plastycznych (w zakresie słuszności jej związków), napotyka trudności matematyczne, ograniczające możliwość uzyskania rozwiązań konkretnych problemów inżynierskich. Podejście drugie, reprezentowane przez teorię nośności granicznej, interesuje się wyłącznie układem geometrycznie zmiennym (mechanizmem). Analizę przeprowadza się tu opierając się na sztywno-plastycznym modelu materiału i przy wykorzystaniu związków teorii plastycznego płynięcia. Podejście to pozwala na stosunkowo łatwe rozwiązanie problemu nośności granicznej, ale nie może dostarczyć informacji o tym, jak konstrukcja zachowywała się w stadiach poprzedzających zniszczenie i czy nie utraciła swej technicznej przydatności wskutek wystąpienia innych zjawisk, jak np. niedopuszczalne zmiany w geometrii.

2. Zależności graniczne przekrojów mimośrodowo ściskanych

Rozróżnić można cztery fazy pracy przekroju (rys. 1):

- a) faza sprężysta,
- b) faza sprężysto-plastyczna z jednostronnym uplastycznieniem,
- c) faza sprężysto-plastyczna z obustronnym uplastycznieniem,
- d) faza czysto-plastyczna.



Rys. 1. Poszczególne fazy pracy przekroju

a) faza sprężysta, b) faza sprężysto-jednostronnie plastyczna, c) faza sprężysto-obustronnie plastyczna, d) faza czysto plastyczna

Fig. 1. Particular phases of the section work

a) the elastic phase, b) the elastic - one sided plastic phase, c) the elastic - two sided plastic phase, d) the full plastic phase

Stan graniczny przekroju osiągnięty może być jedynie wówczas, gdy we wszystkich jego włóknach naprężenia osiągną granicę plastyczności. Warunek uplastycznienia całego przekroju elementu można zapisać w postaci funkcji sił wewnętrznych, zwanej zależnością graniczną:

$$(M, N, T) = 0 \quad (2.1)$$

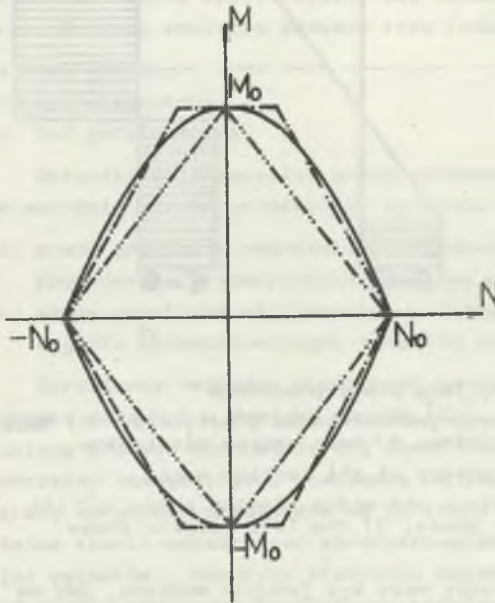
Przy założeniu pominięcia wpływu naprężeń stycznych na uplastycznienie, warunek (2.1) uprości się. Siła poprzeczna T , posiadająca charakter reakcji wewnętrznej, nie wpływa na uplastycznienie przekroju [5]. Cała teoria nośności granicznej opiera się na odpowiednio sformułowanej postaci zależności granicznej. Zakres stosowalności równań ograniczony jest założeniem:

- a) o posiadaniu przez dany materiał konstrukcyjny wyraźnej granicy plastyczności,
- b) o "wyrównaniu" naprężeń w stanie granicznym.

Równania zależności granicznych dla różnych profili [5] mają niekiedy bardzo skomplikowaną postać. Przepisy wielu krajów [9] dopuszczają przyjęcie uproszczeń zależności granicznej w postaci (dla profilu dwuteowego):

$$|M| = M_0 \quad \text{dla} \quad |N| \leq 0,15 N_0 \quad (2.2a)$$

$$|M| = 1,18 M_0 \left(1 - \left|\frac{N}{N_0}\right|\right) \quad \text{dla} \quad 0,15 N_0 < |N| \leq N_0 \quad (2.2b)$$



Rys. 2. Dopuszczalne postacie zależności granicznych momentu M od siły osiowej N dla profilu dwuteowego

Fig. 2. Allowable limit dependences between the moment M and axial force N for I - steel section

Na rys. 2 przedstawiono dwa uproszczenia zależności granicznej dla profilu dwuteowego. Dokładną zależność przedstawi parabola; sześciokąt opisany równaniami (2.2a) i (2.2b) oraz czworokąt są kolejnymi stopniami jej linearyzacji.

Należy zaznaczyć, że zależności (2.2a) i (2.2b) dotyczyć mogą tylko profili o względnie dużym promieniu krzywizny r ($r \geq 5h$, h to wysokość profilu).

Zgodnie z PN-80/B-03200, obliczanie konstrukcji budowlanych, do których zaliczyć należy obudowy długotrwałych wyrobisk górniczych, wg stanu nośności granicznej sprowadza się do sprawdzenia warunku:

$$\sigma \leq R_a \quad (2.3)$$

gdzie:

σ - naprężenie w krytycznym przekroju,

R_a - wytrzymałość obliczeniowa stali.

W celu określenia naprężenia w przekroju krytycznym, w pracy [6] przyjęto model ciała sztywno plastycznego ze wzmocnieniem (rys. 3) jako dający najlepsze przybliżenie do rzeczywistości. Równania opisujące nośność graniczną profilu V można wówczas przedstawić w postaci:

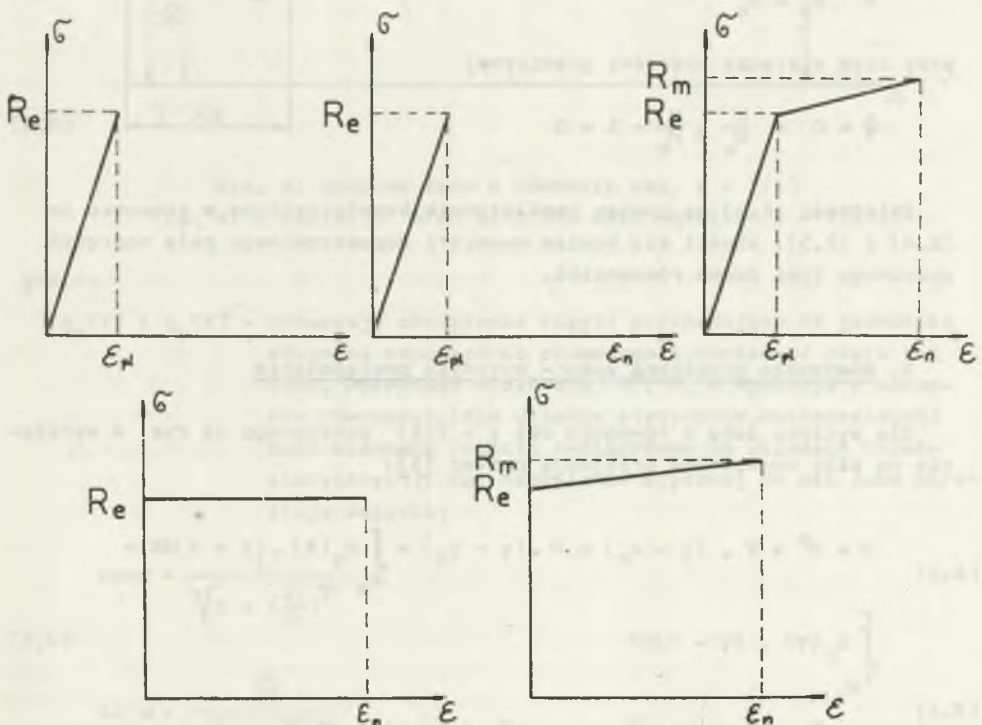
$$N = (A_1 - A_2 + \frac{n}{x} \cdot A \cdot a) \cdot R_0 \quad (2.4)$$

$$M = S_1 + S_2 \frac{n \cdot (I_x + A \cdot a^2)}{x} \cdot R_0 - N \cdot a \quad (2.5)$$

gdzie:

- A_1, A_2 - powierzchnia przekroju znajdująca się odpowiednio powyżej i poniżej osi obojętnej,
- S_1, S_2 - momenty statyczne powierzchni A_1, A_2 względem osi obojętnej,
- A - powierzchnia przekroju poprzecznego,
- I_x - moment bezwładności przekroju względem osi $x - x$,
- R_0 - granica plastyczności stali,
- R_m - wytrzymałość stali na rozciąganie,
- x - odległość osi obojętnej od skrajnego włókna ściskanego

$$n = \frac{R_m - R_0}{R_0} \quad (2.6)$$



Rys. 3. Zależność naprężenia σ od odkształcenia ϵ odpowiadające modelom ciała

a) sprężystego, b) sprężysto-plastycznego, c) sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem, d) sztywno-plastycznego, e) sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem

Fig. 3. Relationship between stress σ and strain ϵ for the following models
 a) elastic, b) elastic-plastic, c) elastic-plastic with the strain hardening, d) rigid-plastic, e) rigid-plastic with the strain hardening

Zależności (2.4) i (2.5) opisują w sposób dokładny warunki równowagi sił osiowych i momentów gnących, jednak są dosyć kłopotliwe przy sprawdzaniu warunku nośności granicznej. Dlatego nowe wytyczne [2] proponują zapisywać warunek ten w postaci:

$$\frac{M}{W_x} + \frac{N}{A} \leq R_a \cdot (m + n) \quad (2.7)$$

gdzie:

W_x - wskaźnik wytrzymałości przekroju,

m - współczynnik Schaefera; dla kształtowników korytkowych $m \approx 1,4$.

Po przekształceniu wzoru (2.7) otrzymuje się zależność graniczną:

$$\Phi = \frac{N}{N_0} \pm \frac{M}{M_0} - 1 \quad (2.8)$$

przy czym w stanie nośności granicznej

$$\Phi = 0 = \frac{N}{N_0} \pm \frac{M}{M_0} - 1 = 0 \quad (2.9)$$

Zależność (2.9) ma pewien współczynnik bezpieczeństwa w stosunku do (2.4) i (2.5); mieści się bowiem wewnątrz dopuszczalnego pola naprężeń opisanego tymi dwoma równaniami.

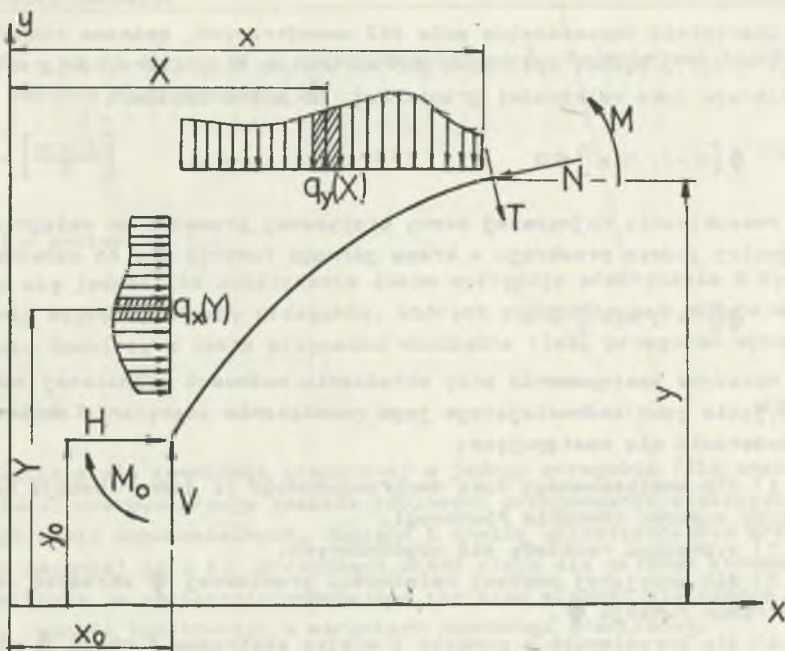
3. Równowaga graniczna łuku - metodyka postępowania

Dla wycinka łuku o równaniu osi $y = f(x)$ pokazanego na rys. 4 wyrażenia na siły wewnętrzne przyjmują postać [5]:

$$M = M^0 + V \cdot (x - x_0) - H \cdot (y - y_0) - \int_{x_0}^x q_y(X) \cdot (x - X) dX - \int_{y_0}^y q_x(Y) \cdot (y - Y) dY \quad (3.1)$$

$$N = \left[V - \int_{x_0}^x q_y(X) dX \right] \cdot \sin \alpha + \left[H + \int_{y_0}^y q_x(Y) dY \right] \cdot \cos \alpha \quad (3.2)$$

$$T = \left[V - \int_{x_0}^x q_y(X) dX \right] \cdot \cos \alpha - \left[H + \int_{y_0}^y q_x(Y) dY \right] \cdot \sin \alpha \quad (3.3)$$

Rys. 4. Wycinek łuku o równaniu osi $y = f(x)$ Fig. 4. A sector of arch with the axis equation $y = f(x)$

gdzie:

$q_x(y)$ i $q_y(x)$ - oznaczają obciążenie ciągle przypadające na jednostkę długości odpowiednio pionowego i poziomego rzutu osi łuku. Pozostałe wielkości M^0 , V , H wynikają z warunków równowagi (dla układów statycznie wyznaczalnych) bądź stanowią reakcje nadliczbowe (w układach hiperstatycznych). Kąt nachylenia stycznej do osi łuku określają związku:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (3.4)$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (3.5)$$

Statycznie dopuszczalne pole sił wewnętrznych, opisane równaniami (3.1)-(3.3), będzie spełniono pod warunkiem nieprzekroczenia w żadnym przekroju łuku zależności granicznej, co można zapisać:

$$\Phi [N(x), N(x)] \leq 0 \quad (3.6)$$

Poszukiwanie najwyższej oceny statycznej prowadzi do osiągnięcia w co najmniej jednym przekroju - kresu górnego funkcji Φ , co oznacza:

$$\Phi [N(x), N(x)] = 0 \quad (3.7)$$

Metodyka postępowania przy określaniu nośności granicznej łuku (przy przyjęciu jako zadowalającego jego rozwiązanie statycznie dopuszczalnego) przedstawia się następująco:

- 1) dla analizowanego łuku dwuprzegubowego (z jedną reakcją nadliczbową) należy wypisać równania równowagi,
- 2) wyznaczyć rozkłady sił uogólnionych,
- 3) dla przyjętej postaci zależności granicznej Φ określić miejsce ekstremum funkcji Φ ,
- 4) dla określonych w punkcie 3 miejsc ekstremum funkcji Φ obliczyć należy wielkości sił uogólnionych,
- 5) przyrównać do zera (warunek równowagi granicznej) funkcję Φ w znalezionych przekrojach niebezpiecznych,
- 6) określić wartość reakcji nadliczbowej,
- 7) bezpośrednio z warunku stanu granicznego nośności w jednym z przegubów plastycznych obliczyć dopuszczalne obciążenie łuku.

Z uwagi na stosunkowo kłopotliwe poszukiwanie miejsca ekstremum zależności granicznej Φ oraz dodatkowo na niewielką zmienność sił osiowych wzdłuż osi łuku - można przyjąć miejsca ekstremum jako miejsca maksimum momentu M. Dalsze postępowanie jest analogiczne do przedstawionego powyżej.

4. Stan graniczny nośności łuku dwuprzegubowego

W dalszej części opracowania przeprowadzono rozważania nad nośnością graniczną łuków dwuprzegubowych o różnych kształtach. Do analizy przyjęto równomierne obciążenie łuków na całej ich rozpiętości. Reakcję nadliczbową stanowi kąt zwarty między reakcją poziomą i pionową w przegubie (rozwiązanie dla łuku kołowego i eliptycznego). Dodatkowe równanie pozwalające określić statycznie niewyznaczalną wielkość uzyskano przy założeniu przekształcenia układu w mechanizm (a więc osiągnięcia stanu nośności granicznej) o $(n + 1)$ przegubach (n oznacza krotność statycznej niewyznaczalności). Ogólnie biorąc, powstanie przegubu nadaje układowi dwa stop-

nie swobody - są to obroty φ i odkształcenia osi λ . Najmniejsza liczba przegubów powinna więc wynosić [5].

$$P_0 = \left[\frac{n+1}{2} \right] \quad (4.1)$$

gdzie: [] - entier.

Okazuje się jednak, że zniszczenie łuków występuje praktycznie w wyniku powstania większej liczby przegubów, których położenie osi obrotu może być zupełnie dowolne. W takim przypadku niezbędna ilość przegubów wynosi:

$$P_0 = n + 1 \quad (4.2)$$

Osiągnięcie stanu równowagi granicznej w jednym przegubie (dla analizowanego łuku) nie wyczerpuje jeszcze zdolności przejmowania większych obciążeń statycznie dopuszczalnych. Dopiero z chwilą uplastycznienia przekroju w co najmniej $(n + 1)$ przegubach układ staje się układem kinematycznie zmiennym, a obciążenie powodujące ten stan stanowi statycznie dopuszczalną nośność konstrukcji w warunkach równowagi granicznej.

4.1. Łuk kołowy - rozwiązanie analityczne

Łuk kołowy przedstawiony na rys. 5 poddany jest równomiernemu obciążeniu na całej swojej rozpiętości.

Zgodnie z oznaczeniami wyrażenia na siły wewnętrzne (3.1) do (3.3) przyjmą postać:

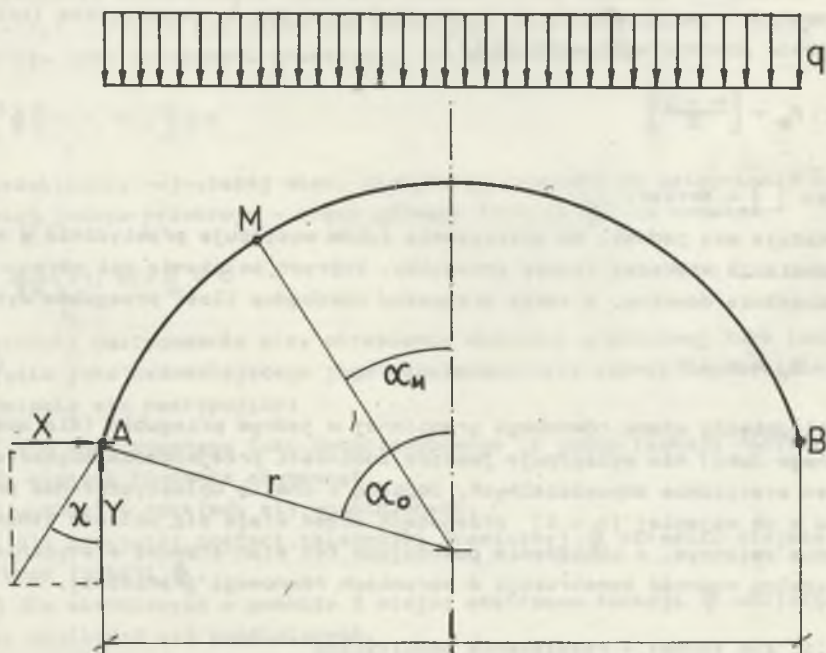
$$M = Y \cdot r \cdot (\sin\alpha_0 - \sin\alpha) + X \cdot r \cdot (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) - M_q \quad (4.1.1)$$

$$N = Y \cdot \sin\alpha + X \cdot \cos\alpha - N_q \quad (4.1.2)$$

Wielkości M_q i N_q dla przyjętego układu obciążenia wyrażają się wzorami:

$$M_q = r^2 \int_{\alpha}^{\alpha_0} q_y \cdot \cos\phi \cdot (\sin\phi - \sin\alpha) d\phi \quad (4.1.3)$$

$$N_q = r \int_{\alpha}^{\alpha_0} q_y \cdot \cos\phi \cdot \sin\alpha d\phi \quad (4.1.4)$$



Rys. 5. Dwuprzegubowy łuk kołowy poddany równomiernemu obciążeniu na całej swojej rozpiętości

Fig. 5. Two-articulated circular arch loaded uniformly on its whole span

wzory te po przekształceniu mają postać:

$$M_q = -\frac{1}{2} q_y r^2 (\cos^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha) - q_y \cdot r^2 \cdot \sin \alpha (\sin \alpha_0 - \sin \alpha) \quad (4.1.5)$$

$$N_q = q_y \cdot r \cdot \sin \alpha (\sin \alpha_0 - \sin \alpha) \quad (4.1.6)$$

Z przedstawionego rysunku 5 wynika:

$$l = 2r \cdot \sin \alpha_0 \quad (4.1.7)$$

$$Y = \frac{q_y \cdot l}{2} = q_y \cdot r \cdot \sin \alpha_0 \quad (4.1.8)$$

Dodatkową reakcją hiperstatyczną X przedstawiono jako funkcję kąta między kierunkami działania reakcji w przegubie:

$$X = \frac{q_y \cdot l}{2} \cdot \operatorname{tg} \chi = q_y \cdot r \cdot \sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \chi \quad (4.1.9)$$

Ze względu na przyjęcie jednego kierunku obciążenia, dla przejrzystości obliczeń przyjęto:

$$q_y = q \quad (4.1.10)$$

Wstawiając zależności (4.1.5)-(4.1.10) do równań (4.1.1) i (4.1.2) uzyskano następującą ich postać:

$$M_\alpha = q \cdot r^2 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) \cdot [\sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \chi - \frac{1}{2} (\cos \alpha_0 + \cos \alpha)] \quad (4.1.11)$$

$$N_\alpha = qr (\sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \chi \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha) \quad (4.1.12)$$

W celu znalezienia miejsca ekstremum M i N obliczono:

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = q \cdot r^2 \cdot \sin \alpha [\sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \chi - \cos \alpha] \quad (4.1.13)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = q \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot [2 \cos \alpha - \sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \chi] \quad (4.1.14)$$

Po przyrównaniu do zera pochodnych (4.1.13) i (4.1.14) otrzymano:

$$M_{\text{ekstr}} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \cos \alpha = \sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \chi \quad (4.1.15)$$

$$N_{\text{ekstr}} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \chi \quad (4.1.16)$$

Widać więc, że jednym z przegubów plastycznych będzie miejsce geometryczne określone kątem $\alpha = 0$. Drugi punkt znaleziono z warunku nośności granicznej dla $M_\alpha < 0$ i $N_\alpha > 0$:

$$\Phi_3 = \frac{N}{N_0} - \frac{M}{M_0} - 1 \quad (4.1.17)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1 + \frac{q}{\varphi}}{2 + \frac{q}{\varphi}} \cdot \sin \alpha_0 \cdot \operatorname{tg} \chi \quad (4.1.18)$$

gdzie:

$$\rho = \frac{N_0}{M_0} \cdot r \quad (4.1.19)$$

Po znalezieniu miejsca ekstremum funkcji Φ_3 (4.1.18) obliczono wartości sił uogólnionych w tym miejscu (4.1.11) i (4.1.12) i wyznaczono zależność graniczną (4.1.17) w postaci:

$$\Phi_3 = \frac{q \cdot l^2}{4 \cdot M_0 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot [(G - D)\text{tg}^2 \chi + (H - E)\text{tg} \chi + I - F] - 1 \quad (4.1.20)$$

Podobną operację wykonano dla $\alpha = 0$, tzn. obliczono $M(\alpha = 0)$, $N(\alpha = 0)$ oraz $\Phi_1(\alpha = 0)$ mającą postać:

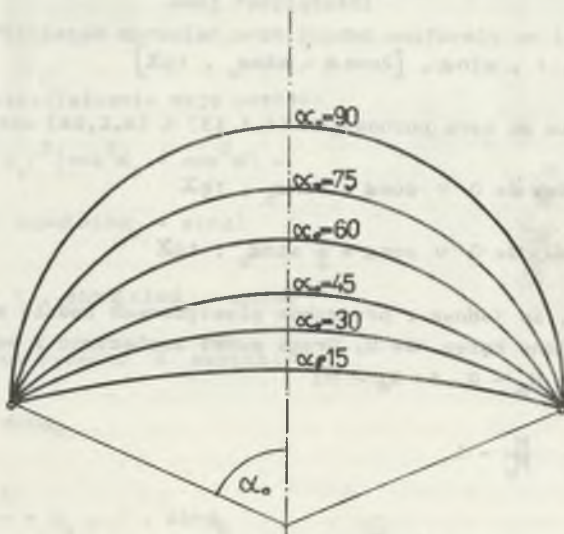
$$\Phi_1 = \frac{q \cdot l^2}{4 \cdot M_0 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot [(P + P_1)\text{tg} \chi + (R + R_1)] - 1 \quad (4.1.21)$$

gdzie:

$E, F, G, H, I, P, P_1, R, R_1$ - są pewnymi funkcjami kąta rozwarcia łuku α_0 .

Po przyrównaniu zależności (4.1.20) i (4.1.21) znaleziono reakcję nadliczbową χ i bezpośrednio np. z (4.1.21) określono graniczną nośność łuku:

$$q = \frac{4M_0 \sin^2 \alpha_0}{l^2 [(P + P_1)\text{tg} \chi + R + R_1]} \quad (4.1.22)$$



Rys. 6. Analizowane konstrukcje dwuprzegubowego łuku kołowego o zadanej rozpiętości

Fig. 6. Analysed constructions of two-articulated circular arch with the given span

Analizę nośności granicznej łuku kołowego przeprowadzono dla sześciu różnych promieni określonych kątem α_0 oraz dla ośmiu rozpiętości l określonych niżej podanymi zależnościami:

$$\alpha_0 = k \cdot 15^\circ \quad \text{rys. 6} \quad (4.1.23)$$

gdzie: $k = 1, \dots, 6$

$$l = 3 + n \quad (4.1.24)$$

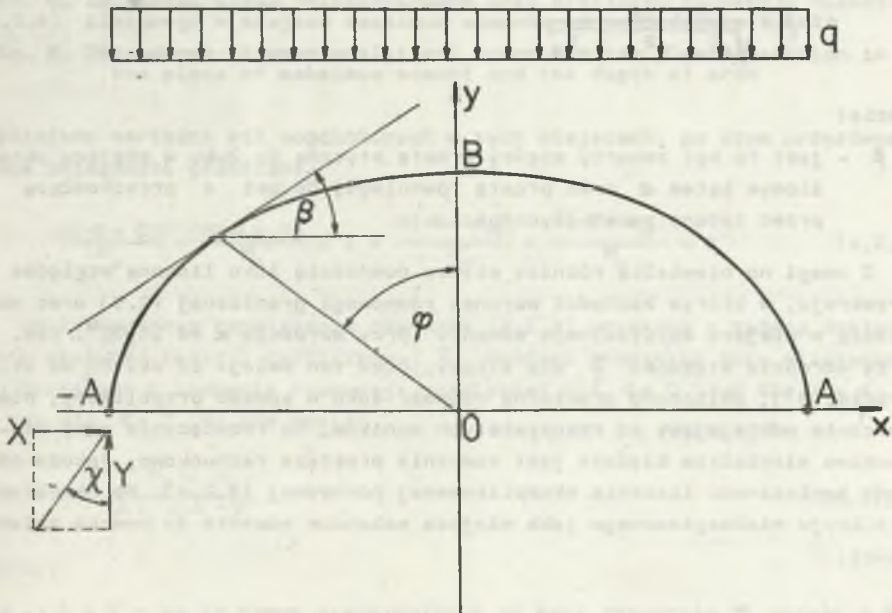
gdzie: $n = 0, \dots, 7$.

4.2. łuk eliptyczny - rozwiązanie analityczne

Łuk eliptyczny (rys. 7) obciążony równomiernie na całej rozpiętości, opisany jest równaniem parametrycznym [6] w postaci:

$$x = A \cdot \sin \varphi \quad (4.2.1)$$

$$y = B \cdot \cos \varphi \quad (4.2.2)$$



Rys. 7. Dwuprzegubowy łuk eliptyczny poddany równomiernemu obciążeniu na całej swej rozpiętości

Fig. 7. Two-articulated elliptical arch loaded uniformly on the whole span

gdzie:

A, B - to półosie elipsy odcięte na osiach odpowiednio X i Y układu współrzędnych, zaś φ - to kąt zwarty między półprostą wychodzącą z początku układu współrzędnych a osią y . Stosując podobny tok postępowania, co dla łuku kołowego oraz wykorzystując w zależnościach (3.1)-(3.3) pochodne wyrażen (4.2.1) i (4.2.2), otrzymano następujące wzory na siły wewnętrzne:

$$M_{\alpha} = q(\cos \varphi - \cos \alpha \left[AB \sin \varphi \operatorname{tg} \chi - \frac{1}{2} A^2 (\cos \varphi + \cos \alpha) \right]) \quad (4.2.3)$$

$$N_{\alpha} = \frac{qA}{\sqrt{A^2 + B^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}} \left[B \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + A \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \chi \right] \quad (4.2.4)$$

Przy wyprowadzeniu równania (4.2.4) wykorzystano związki (3.4) i (3.5), mające dla łuku eliptycznego postać:

$$\cos \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (4.2.5)$$

$$\sin \beta = \frac{B \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{A^2 + B^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (4.2.6)$$

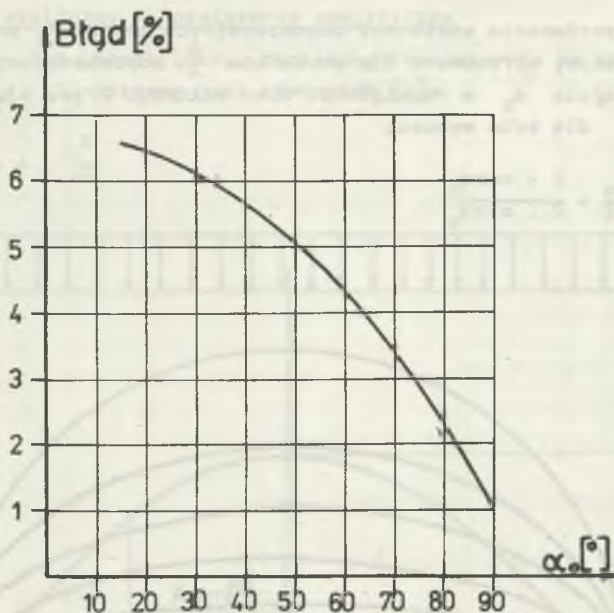
gdzie:

β - jest to kąt zawarty między prostą styczną do łuku w miejscu określonym kątem α oraz prostą równoległą do osi x przechodzącą przez zadany punkt styczności.

Z uwagi na niewielką różnicę między nośnością łuku liczoną względem przekroju, w którym zachodzi warunek równowagi granicznej (2.9) oraz nośnością w miejscu maksymalnego momentu (przy wzroście α od $15-90^\circ$, tzn. przy wzroście stosunku $\frac{B}{A}$ dla elipsy, błąd ten maleje od ok. 6% do ok. 1% - (rys. 8)), obliczono graniczną nośność łuku w sposób przybliżony, nieznacznie odbiegający od rzeczywistych wyników. To rozwiązanie przy stosunkowo niewielkim błędzie jest znacznie prostsze rachunkowo, jako że odpada konieczność liczenia skomplikowanej pochodnej (4.2.4). Po określeniu przekroju niebezpiecznego jako miejsca maksimum momentu za pomocą zależności:

$$\alpha = 0 \quad (4.2.7)$$

$$\cos \alpha_{\text{gr}} = \frac{B}{A} \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \chi \quad (4.2.8)$$



Rys. 8. Zależność błędu obliczeniowego przy przyjęciu przekroju niebezpiecznego w miejscu maksimum momentu od wyniosłości łuku

Fig. 8. Dependence between analytical error for the plastic-section in the place of maximum moment and the depth of arch

obliczono wartości sił uogólnionych w tych miejscach, po czym przyrównano obie zależności graniczne:

$$\frac{N(\alpha = 0)}{N_0} + \frac{M(\alpha = 0)}{M_0} - 1 = \frac{N(\alpha = \alpha_M)}{N_0} + \frac{M(\alpha = \alpha_M)}{M_0} - 1 \quad (4.2.9)$$

Po iteracyjnym rozwiązaniu równania (4.2.9) uzyskano z żadaną dokładnością wielkość reakcji nadliczbowej λ . Nośność graniczną łuku eliptycznego określono z równania równowagi granicznej dla $\alpha = 0$ lub dla $\alpha = \alpha_M$. I tak dla $\alpha = 0$ ma ona postać:

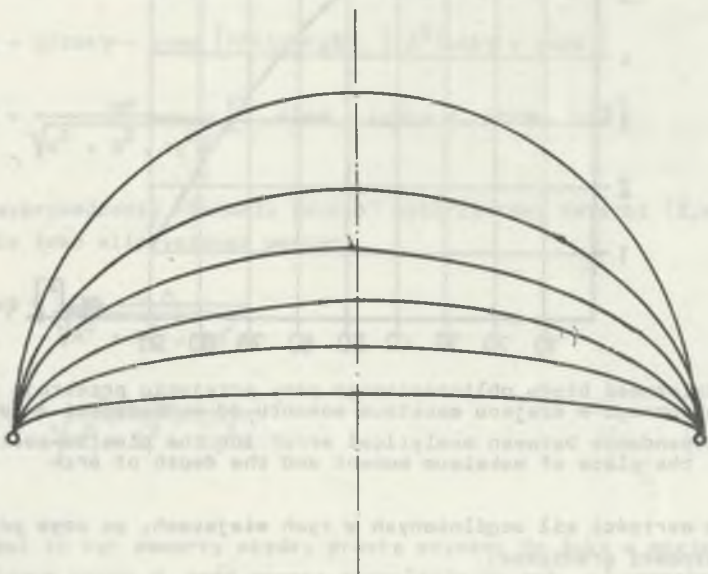
$$q = \frac{N_0 + M_0}{\lambda \cdot \tau g \lambda + \gamma} \quad (4.2.10)$$

gdzie:

λ i γ - są to pewne stałe zależne od kąta rozwarcia ψ , czyli w rozwiązaniu elipsy zależne od stosunku $\frac{W}{I}$ lub $\frac{B}{\lambda}$.

W celu porównania wielkości dopuszczalnych obciążeń, analityczne rozwiązanie elipsy opracowano dla stosunków $\frac{B}{A}$, odpowiadających określonym kątom rozwarcia α_0 w rozwiązaniu łuku kołowego (rys. 9). Odpowiednia relacja S dla koła wynosi:

$$S = \frac{W}{I} = \frac{1 - \cos \alpha_0}{2 \cdot \sin \alpha_0} \quad (4.2.11)$$



Rys. 9. Analizowane konstrukcje dwuprzegubowego łuku eliptycznego o zadanej rozpiętości

Fig. 9. Analysed constructions of two-articulated elliptical arch with the given span

Dla elipsy zaś, przy założeniu (ustaleniu):

$$A = 1,5 + 0,5 n \quad \text{gdzie: } n = 0, \dots, 7 \quad (4.2.12)$$

otrzymano:

$$B = A \cdot S \quad (4.2.13)$$

lub

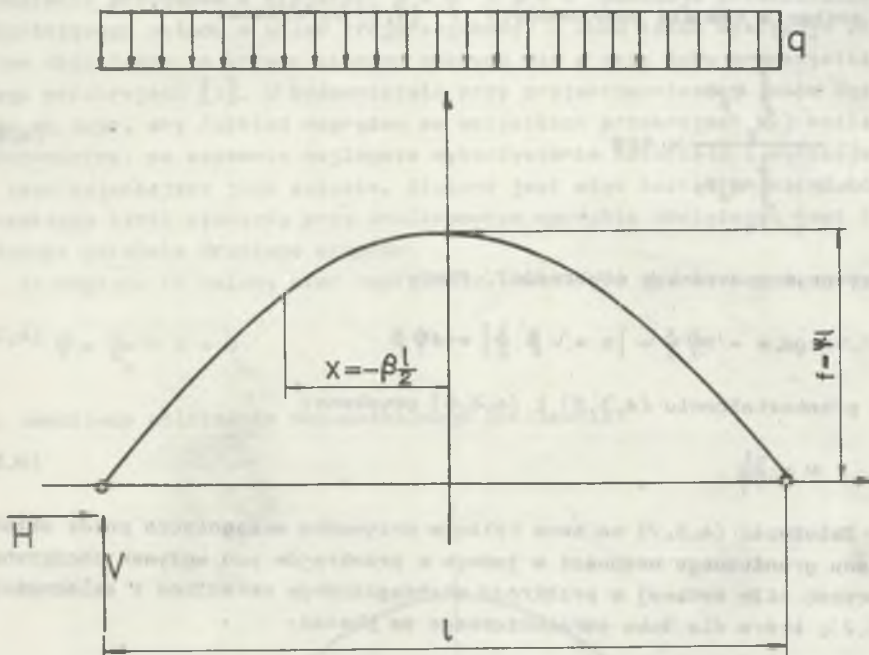
$$B = (1,5 + 0,5 n) \frac{1 - \cos \alpha_0}{2 \cdot \sin \alpha_0} \quad (4.2.14)$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 12.

4.3. Łuk paraboliczny - rozwiązanie analityczne

Dwuprzegubowy łuk paraboliczny, obciążony równomiernie na całej swojej rozpiętości (rys. 10) opisany jest równaniem [5]:

$$y = f\left(1 - 4 \cdot \frac{x^2}{l^2}\right) \quad (4.2.1)$$



Rys. 10. Dwuprzegubowy łuk paraboliczny poddany równomiernemu obciążeniu na całej swej rozpiętości

Fig. 10. Two-articulated parabolical arch loaded uniformly on the whole span

Pochylenie stycznej określają wzory (3.4) i (3.5), które przyjmują postać:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + (8\phi \frac{x}{l})^2}} \quad (4.3.2)$$

$$\sin \alpha = - \frac{8\phi \frac{x}{l}}{\sqrt{1 + (8\phi \frac{x}{l})^2}} \quad (4.3.3)$$

Miejsce powstania przegubu plastycznego określone jest współczynnikiem β , przy czym zgodnie z (rys. 10):

$$\beta \in \langle 0, 1 \rangle \quad (4.3.4)$$

Zakładając, że przeguby powstają w miejscu ekstremum momentu, z warunku znikania tam sił poprzecznych T (3.3) otrzymano:

$$\frac{V - \int_{x_0}^x q_y dx}{H + \int_{y_0}^y q_x dy} = \operatorname{tg} \alpha \quad (4.3.5)$$

Przy czym α - to kąt stycznej, równy:

$$\operatorname{tg} \alpha = - 8\phi \frac{x}{l} = \left| x = -\beta \frac{l}{2} \right| = 4\phi \beta \quad (4.3.6)$$

Po przekształceniu (4.3.5) i (4.3.6) uzyskano:

$$H = \frac{q_1}{8\phi} \quad (4.3.7)$$

Zależność (4.3.7) ma sens tylko w przypadku osiągnięcia przez układ stanu granicznego nośności w jednym z przekrojów pod wpływem obciążenia q . Wartość siły osiowej w przekroju niebezpiecznym określono z zależności (3.2), która dla łuku parabolicznego ma postać:

$$N_{x = -\frac{\beta l}{2}} = \frac{q_1}{8\phi} \sqrt{16\phi^2 \beta^2 + 1} \quad (4.3.8)$$

Określając ekstremum siły osiowej w przedziale zmienności β uzyskano:

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = 2\phi q_1 (1 + 16\phi^2 \beta^2) \quad (4.3.9)$$

W przedziale określoności β , równanie (4.3.9) ma wartości dodatnie, co oznacza, że siła osiowa rośnie od wartości:

$$\beta = 0 \rightarrow N = \frac{q_1}{8\phi} \quad (4.3.10)$$

do wartości:

$$\beta = 1 \rightarrow N = \frac{q_1}{8\phi} \sqrt{16\phi^2 + 1} \quad (4.3.11)$$

Wypisując równanie momentu względem przekroju określonego parametrem β , przy spełnieniu warunku (4.3.7) uzyskano zależność:

$$M(\beta) = 0 \quad (4.3.12)$$

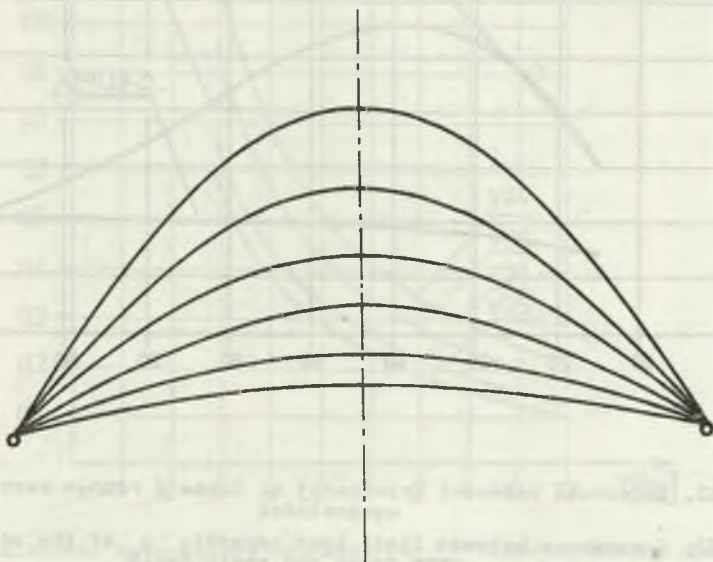
$$\beta \in \langle 0, 1 \rangle$$

Z chwilą osiągnięcia przez łuk paraboliczny stanu granicznego nośności powstanie przegubów w miejscach $\beta = 0$ i $\beta = 1$ powoduje przekształcenie istniejącego układu w układ trójprzegubowy. W łuku takim występuje osiowy stan obciążenia, a krzywa ciśnień pokrywa się z osią łuku we wszystkich jego przekrojach [3]. W budownictwie przy projektowaniu osi łuków dąży się do tego, aby rozkład naprężeń we wszystkich przekrojach był możliwie równomierny, co zapewnia najlepsze wykorzystanie materiału i wynikające z tego najmniejsze jego zużycie. Słuszne jest więc kształtowanie łuków wg przebiegu linii ciśnień; przy analizowanym sposobie obciążenia jest to właśnie parabola drugiego stopnia.

Ze względu na osiowy stan naprężenia, zależność graniczna ma postać:

$$\Phi = \frac{N}{N_0} - 1 = 0 \quad (4.3.13)$$

co umożliwi obliczenie dopuszczalnego obciążenia:

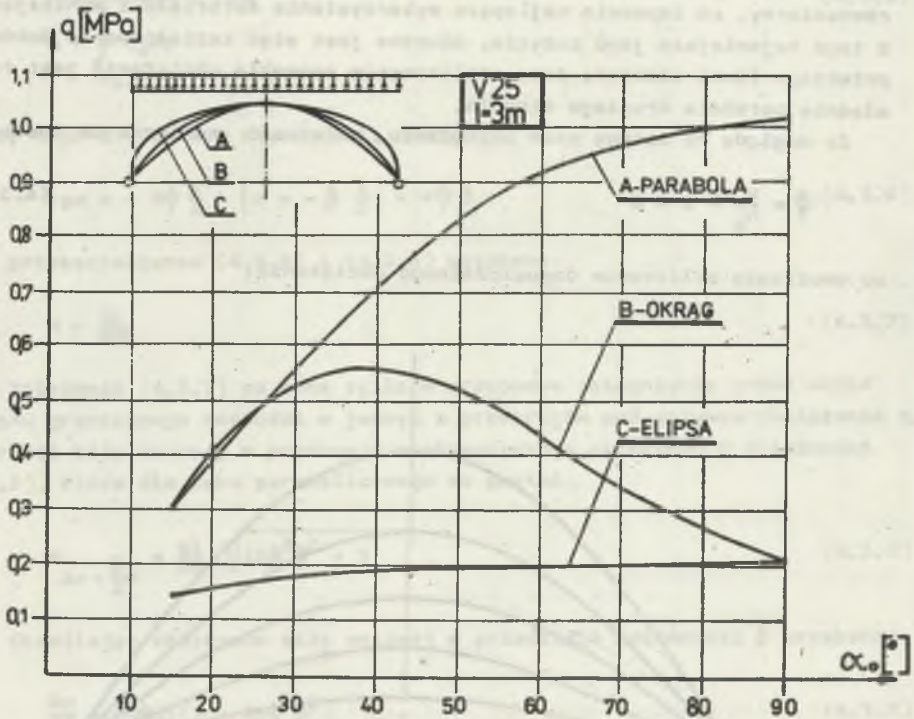


Rys. 11. Analizowane konstrukcje dwuprzegubowego łuku parabolicznego o zadanej rozpiętości

Fig. 11. Analysed constructions of two-articulated parabolic arch with the given span

$$q = \frac{8 \cdot N_o \cdot \psi}{1 \sqrt{1 + 16\psi^2}} \quad (4.3.14)$$

Podobnie jak w rozwiązaniach dla łuku kołowego i eliptycznego, przyjęto do obliczeń różne warianty kształtu paraboli określone kątem rozwarcia α_o dla łuku kołowego (4.2.11) (rys. 11). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 12.



Rys. 12. Zależność nośności granicznej q łuków o różnym kształcie od ich wyniosłości

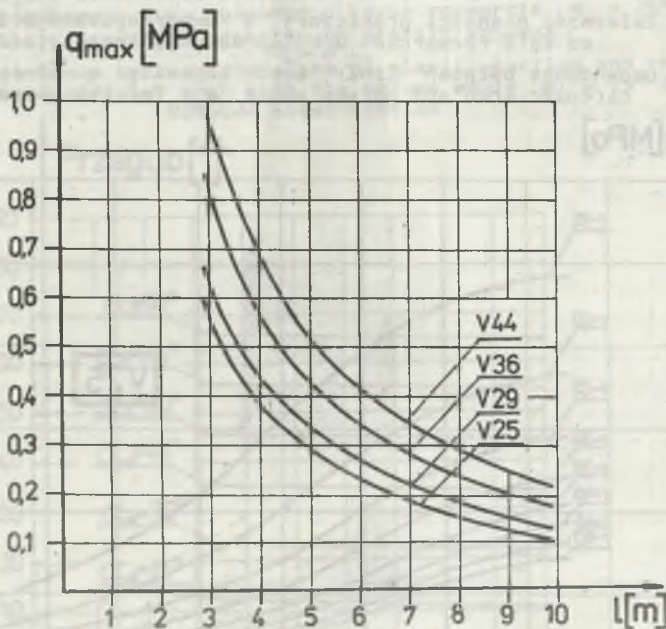
Fig. 12. Dependence between limit load capacity q of the arches of different forms and their depth

5. Wnioski końcowe

Na podstawie przedstawionego rozwiązania zagadnienia nośności granicznej łuków o różnych kształtach sformułować można następujące wnioski:

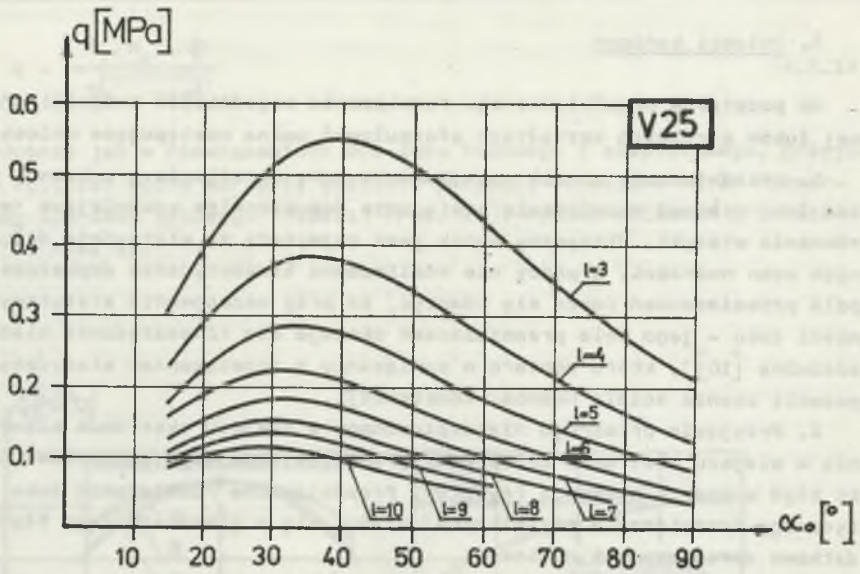
1. Przedstawiony sposób postępowania przy określaniu granicznej nośności łuku stanowi rozwiązanie statycznie dopuszczalne spełniające jedynie równania statyki. Otrzymany wynik jest najwyższą ze statycznie dopuszczalnych ocen nośności. W pracy nie analizowano kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczeń (może się zdarzyć, że przy oszacowaniu statycznym nośności łuku – jego pole przemieszczeń okazuje się kinematycznie niedopuszczalne [10]), które dopiero w powiązaniu z rozwiązaniem statycznym pozwoli ocenić ściśle nośność konstrukcji.

2. Przyjęcie przekroju niebezpiecznego w miejscu ekstremum momentu, a nie w miejscu ekstremum zależności granicznej powoduje stosunkowo niewielki błąd w ocenie nośności (rys. 8). Przedstawione rozwiązanie łuku elipsycznego (rozwiązanie przybliżone) mieści się w granicach tego błędu i dodatkowo upraszcza tok obliczeń.



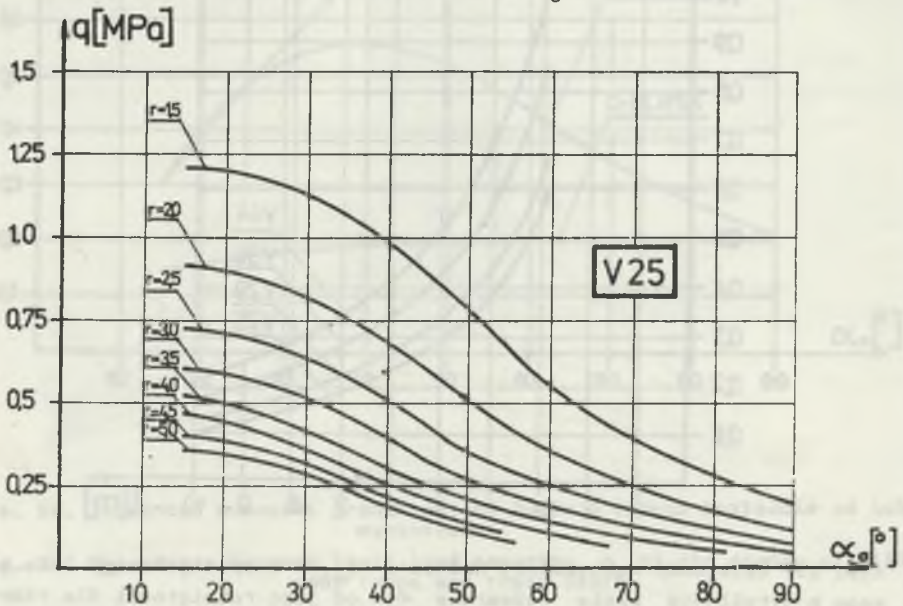
Rys. 13. Zależność maksymalnej nośności q_{max} dwuprzegubowego łuku kołowego o określonym kącie rozwarcia α_0 od jego rozpiętości dla różnych profili V

Fig. 13. Dependence between maximum load capacity q_{max} of two-articulated circular arch with the given obtuse angle α_0 and its span for the different V-steel sections



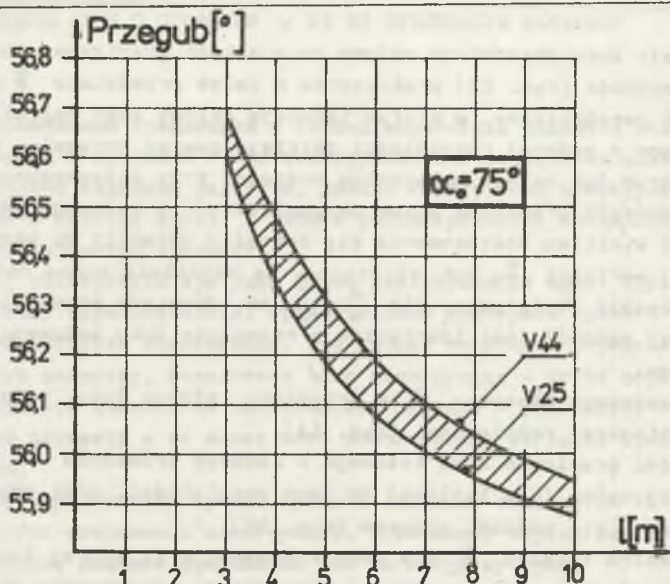
Rys. 14. Zależność nośności granicznej q dwuprzegubowego łuku kołowego od kąta rozwarcia α_0 dla zadanych rozpiętości

Fig. 14. Dependence between limit load capacity q of two-articulated circular arch and obtuse angle α_0 for the given spans



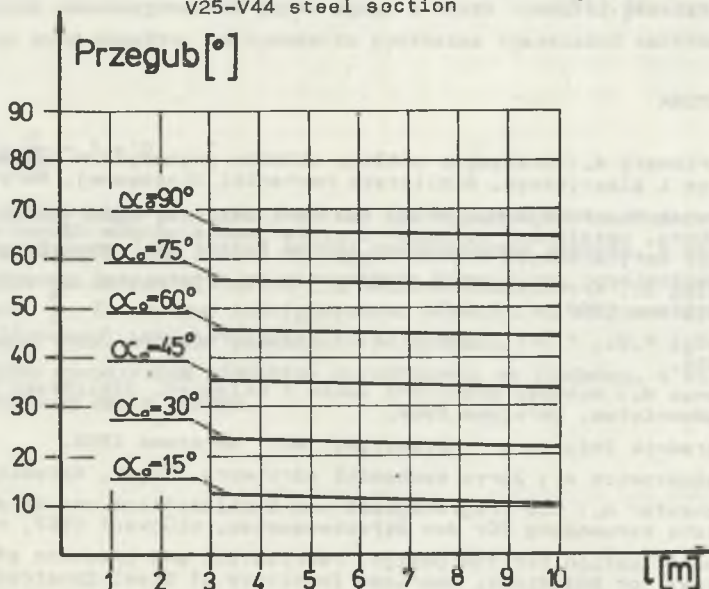
Rys. 15. Zależność nośności granicznej q dwuprzegubowego łuku kołowego opisanego promieniem r od kąta rozwarcia α_0

Fig. 15. dependence between limit load capacity q of two-articulated circular arch with the r radius and its obtuse angle α_0



Rys. 16. Miejsce utworzenia przegubu plastycznego w zależności od rozpiętości dwuprzegubowego łuku kołowego o kącie rozwarcia $\alpha_0 = 75^\circ$ dla analizowanych granicznych profili V25-V44

Fig. 16. Dependence between the place of plastic-section and the span of two-articulated circular arch with the obtuse angle $\alpha_0 = 75^\circ$ for analysed V25-V44 steel section



Rys. 17. Miejsce utworzenia przegubu plastycznego w zależności od rozpiętości dwuprzegubowego łuku kołowego o profilu V25 dla różnej jego krzywizny

Fig. 17. Dependence between the place of plastic-section and the span of two-articulated circular arch with the V25 steel section for its different

3. Kształt łuku zasadniczo wpływa na wielkość granicznej nośności. Najwyższą nośność (rys. 12) praktycznie w całym przedziale $\frac{w}{l} \in (0; \frac{1}{2})$ posiada łuk paraboliczny, w którym istnieje osiowy stan naprężenia. Dla łuku kołowego o zadanej rozpiętości istnieje pewien optymalny stosunek $\frac{w}{l}$, przy którym łuk osiąga maksymalną nośność. Przy spłaszczonych łukach ($\frac{w}{l} < 0,1$) nośność graniczna łuków parabolicznego i kołowego jest zbliżona; jest to wynikiem dostosowania się kształtu paraboli do kształtu koła przy takiej wartości $\frac{w}{l}$; łuk eliptyczny ma najniższą ocenę nośności przy zadanym sposobie obciążenia. Dla $\frac{w}{l} = \frac{1}{2}$, co odpowiada przejściu elipsy w okrąg, jej nośność jest identyczna z nośnością łuku kołowego, opartego na półokręgu.

4. Dla zadanego stosunku $\frac{w}{l}$, w przypadku każdego łuku, wyższą nośność ma łuk o mniejszej rozpiętości (rys. 14).

5. Nośność graniczna łuku kołowego o zadanym promieniu R jest odwrotnie proporcjonalna (nie liniowo) do jego rozpiętości, przy czym im promień mniejszy, tym nośność większa (rys. 15).

6. Optymalna relacja $\frac{w}{l}$ dla łuku kołowego, przy której łuk osiąga maksymalną nośność, w miarę wzrostu rozpiętości nieznacznie maleje (rys. 14).

7. Dla zadanego stosunku $\frac{w}{l}$ miejsce tworzenia się przegubu plastycznego w miarę wzrostu rozpiętości nieznacznie przesuwają się w stronę pionowej osi łuku. Wraz ze wzrostem $\frac{w}{l}$ przegub plastyczny oddala się od osi łuku (rys. 16, 17).

LITERATURA

- [1] Borkowski A.: Statyczna analiza układów prętowych w zakresie sprężystym i plastycznym. Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Warszawa 1985.
- [2] Chudek M., Mateja H., Rułka K.: Podstawy teoretyczne oraz nowe zasady doboru, ustalenia, obciążeń i wymiarowania obudów długotrwałych wyrobisk korytarzowych i komorowych. ZN Polit. Śl., Gliwice 1985, nr 124.
- [3] Dyląg Z., Krzemieńska-Niemiec E., Filip F.: Mechanika budowli. PWN, Warszawa 1980, t. 1 i 2.
- [4] Hodge P.G.: Plastic Analysis of Structures. Mac Graw-Hill, New York 1959.
- [5] Janas M.: Nośność graniczna łuków i sklepień, Biblioteka Inżynierii i Budownictwa, Warszawa 1967.
- [6] Poradnik Inżyniera - Matematyka. WNT, Warszawa 1986.
- [7] Sałustowicz A.: Zarys mechaniki górotworu. Śląsk, Katowice 1965.
- [8] Schaefer N.: Die Tragfähigkeit von Stahlprofilen und ihre wirtschaftliche Verwendung für den Streckenausbau. Glückauf 1967, nr 29-30.
- [9] Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings. American Institute of Steel Constructions, New York 1963.
- [10] Teoria plastyczności. Praca zbiorowa pod red. W. Olszaka, P. Perzyny, A. Sawczuka, PWN, Warszawa 1965.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Kazimierz Rułka

Wpłynęło do Redakcji w marcu 1988 r.

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ АРОК С ПРОФИЛЕМ V НА ИХ ПРЕДЕЛЬНУЮ НАГРУЗКУ

Резюме

Общеприменяемым креплением в горных выработках являются стальные рамы арочной крепи с профилем V. Их конструктивными элементами являются 3 или 4 арки описанные заданным радиусом, дающие контур всей конструктивной системы близкий к сектору круга. В работе рассматривается воздействие формы арки на её параметры крепости.

Анализу подвергнуты три рода формы двухшарнирной арки: круггообразная, эллиптическая, параболическая. Сравнительным критерием принято состояние предельной нагрузки конструкции. Эта теория позволяет определить статически допускаемую нагрузку, вследствие чего конструкция – путём образования соответствующего количества пластических сечений – становится геометрически изменяемой системой и не может быть использована согласно принятому предназначению.

Характер работы рамы арочной крепи в основном отличается от характера работы других стержневых конструкций. Отличающей чертой является здесь действительное влияние продольных сил на нагрузку арки.

Поэтому форму предельной зависимости представляем как функцию и изгибающего момента, и продольных сил. Она бывает очень расширенной, тем не менее часто, во время анализа предельного состояния, пользуемся некоторыми допускаемыми упрощениями этих форм.

Для каждой анализированной формы арки, а также принятой равномерной нагрузки на всём пролёте, мы применили уравнение предельной зависимости в форме:

$$\frac{N}{N_0} \pm \frac{M}{M_0} - 1 = 0$$

Представлена общая методика действий при определении опасных сечений, а также характерное (для каждой формы) аналитическое решение. С целью сравнения полученных результатов мы рассмотрели формы арок, определённые соотношением $\frac{M}{T}$. Добавочные конструктивные варианты мы получили путём изменения пролёта арки, а также изменения его профиля.

Результаты проведённых подсчётов представлены на графиках, а их оценка – в заключительной части работы.

INFLUENCE OF THE SHAPE OF THE V SECTION
ARCHES ON THEIR LIMIT LOAD CAPACITY

S u m m a r y

Steel arch lining with the V section is generally used in mining excavations. It consists of three or four elements defined by a radius, giving an outline of a whole construction system similar to circular sector. In this paper the influence of the shape of the arch on its strength parameters has been considered. Three kinds of the two-articulated arch shape: circular, elliptical and parabolic have been analysed. The state of extreme load capacity of the construction has been assumed as a comparative criterion.

This theory allows to define statically acceptable load, as a result of which - by forming an exact number of plastic sections the construction becomes a variable geometrical configuration and it cannot be used appropriately.

The work of the arch is quite different from other bar constructions because of the essential influence of longitudinal forces on the arch load capacity. Therefore the form of limit dependence stands as function both of the bending moment and longitudinal forces. This dependence is sometimes developed but during the analysis of the limit states some allowable reductions of these forms are used.

For each analysed shape of the arch and assumed uniform load on its whole span, an equation of the following limit dependence has been used:

$$\frac{N}{N_0} \pm \frac{M}{M_0} - 1 = 0$$

General methodology of the procedure when defining plastic sections as well as characteristic (for every shape) analytical solution have been presented.

The shapes of the arches- defined by $\frac{w}{T}$, have been analysed in order to compare the results obtained. Additional constructional alternatives have been obtained through the change in the span of the arch and in its steel section (V25-V44).

The results of the above made calculations have been presented on diagrams and their analysis has been made at the end of this paper.